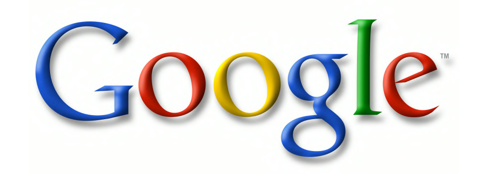
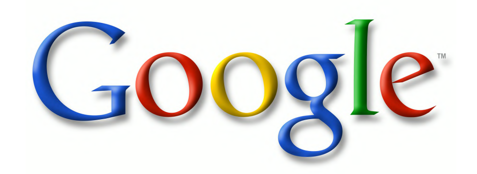
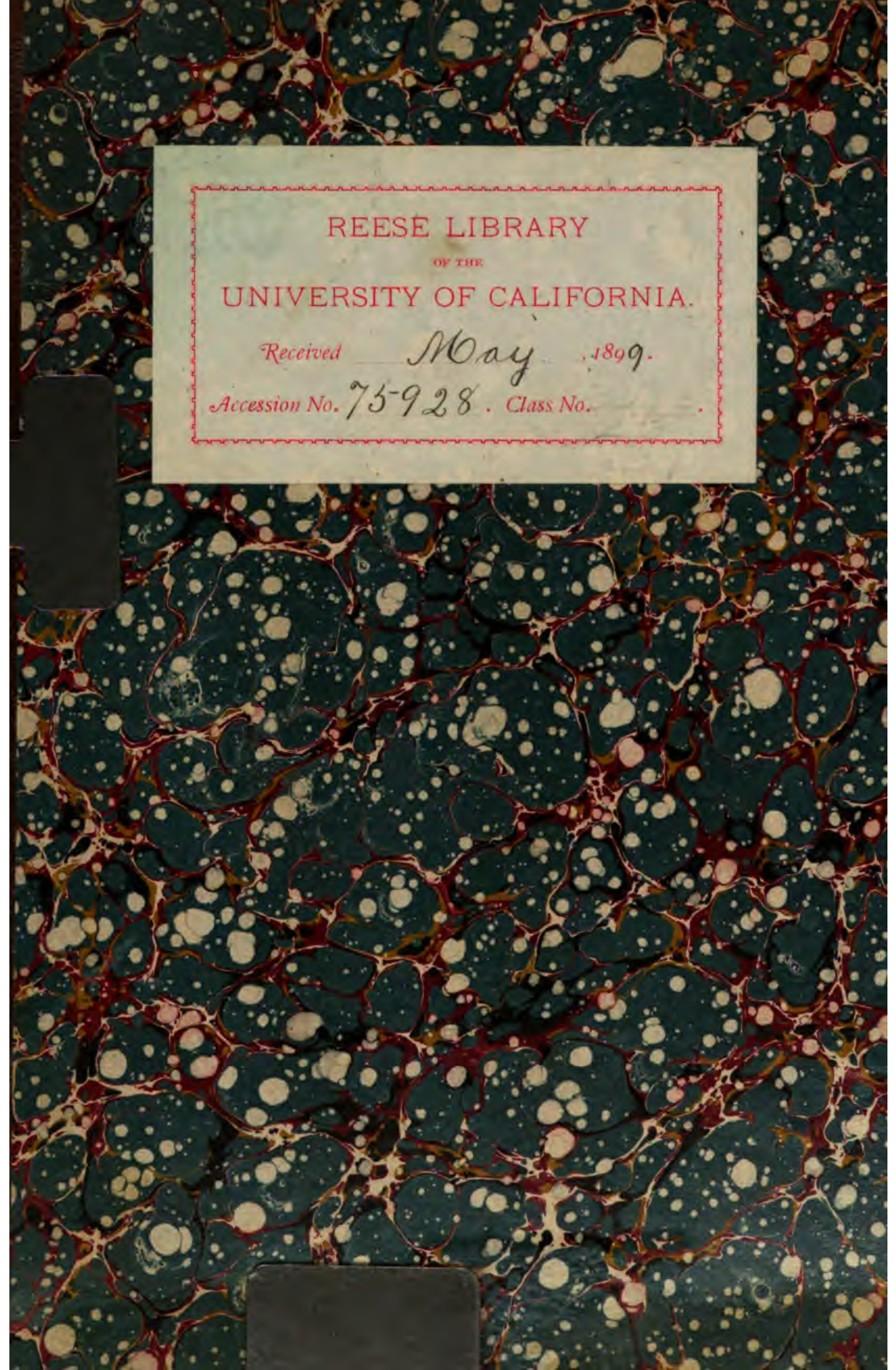
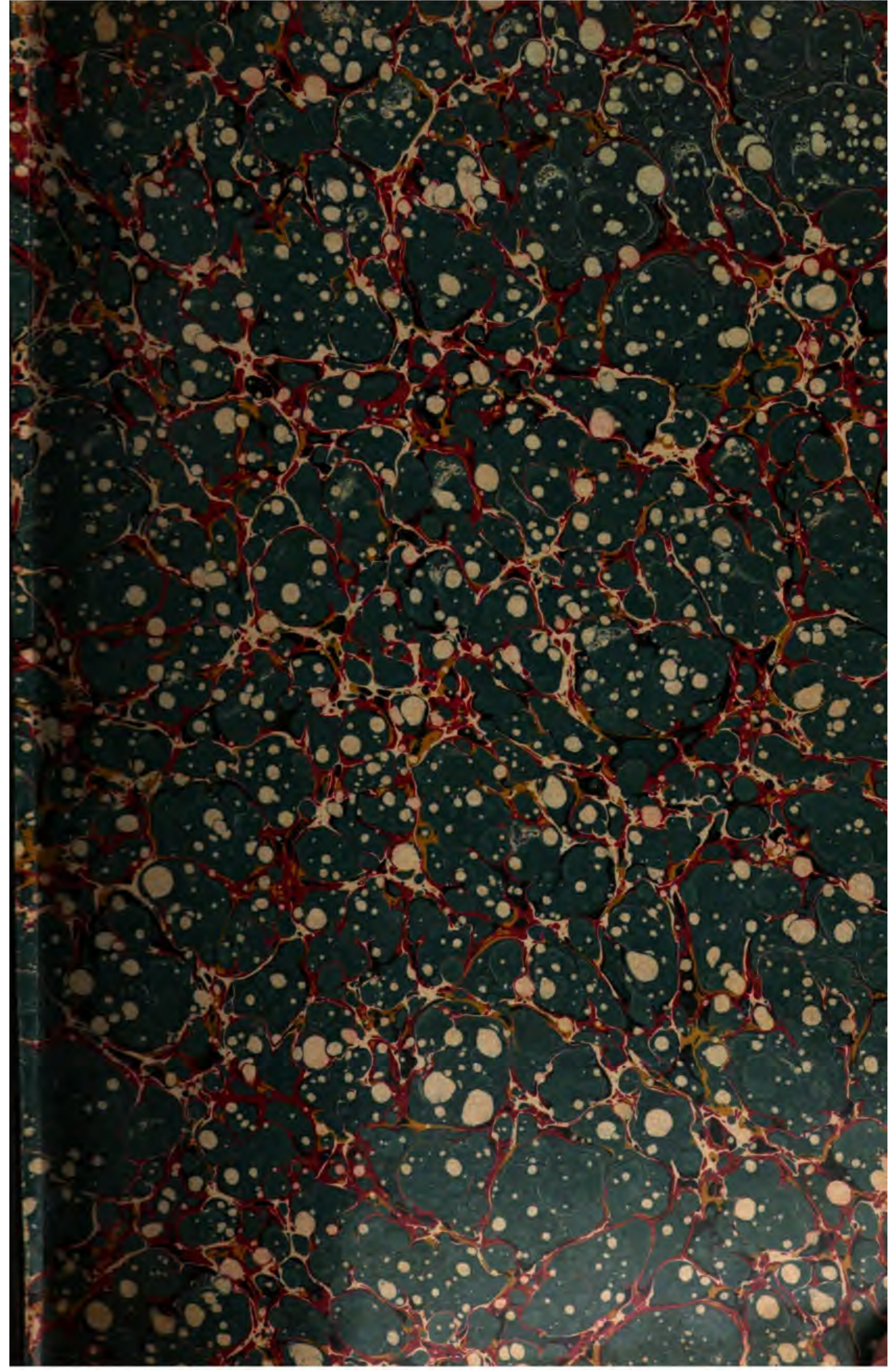


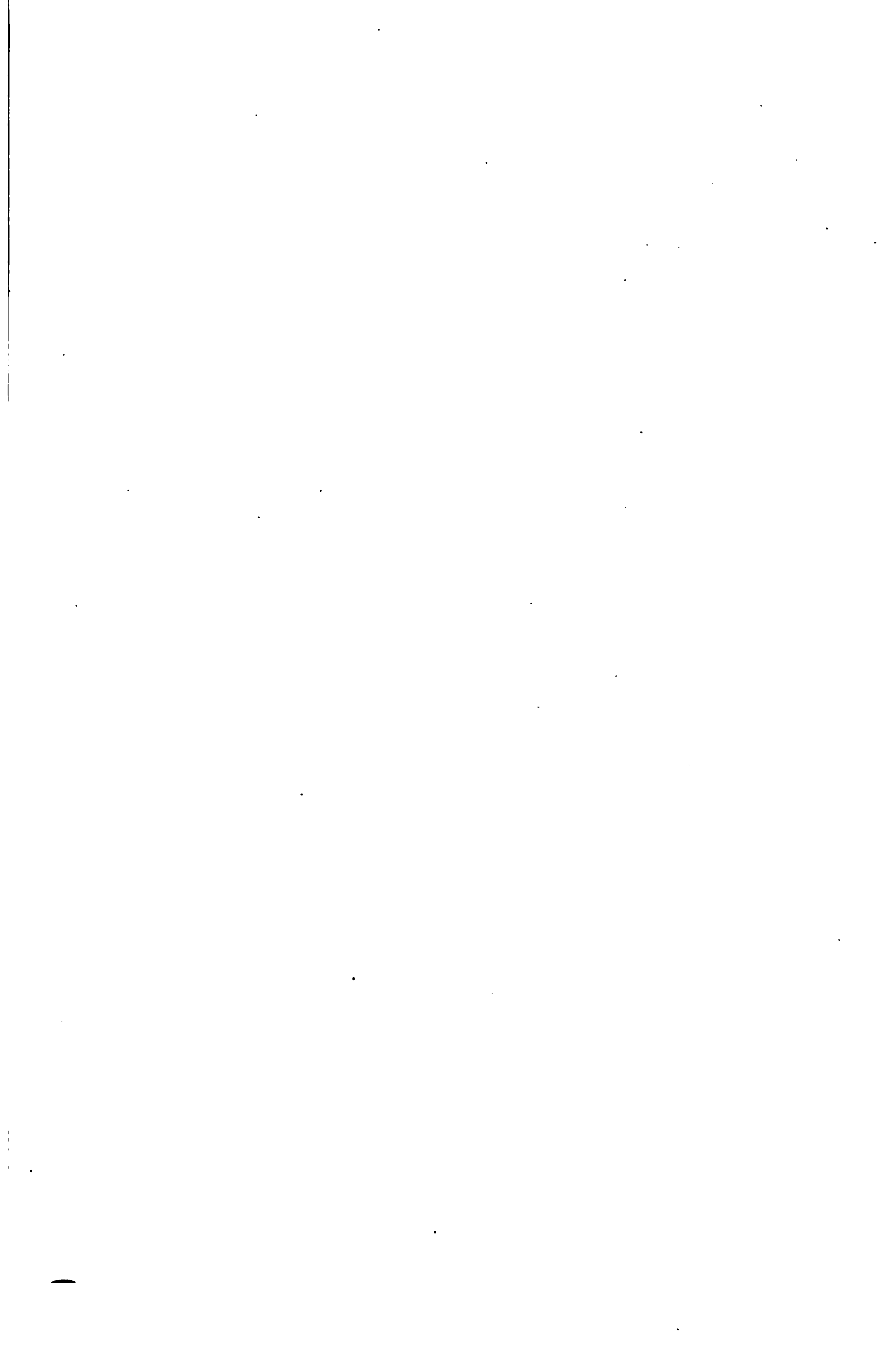


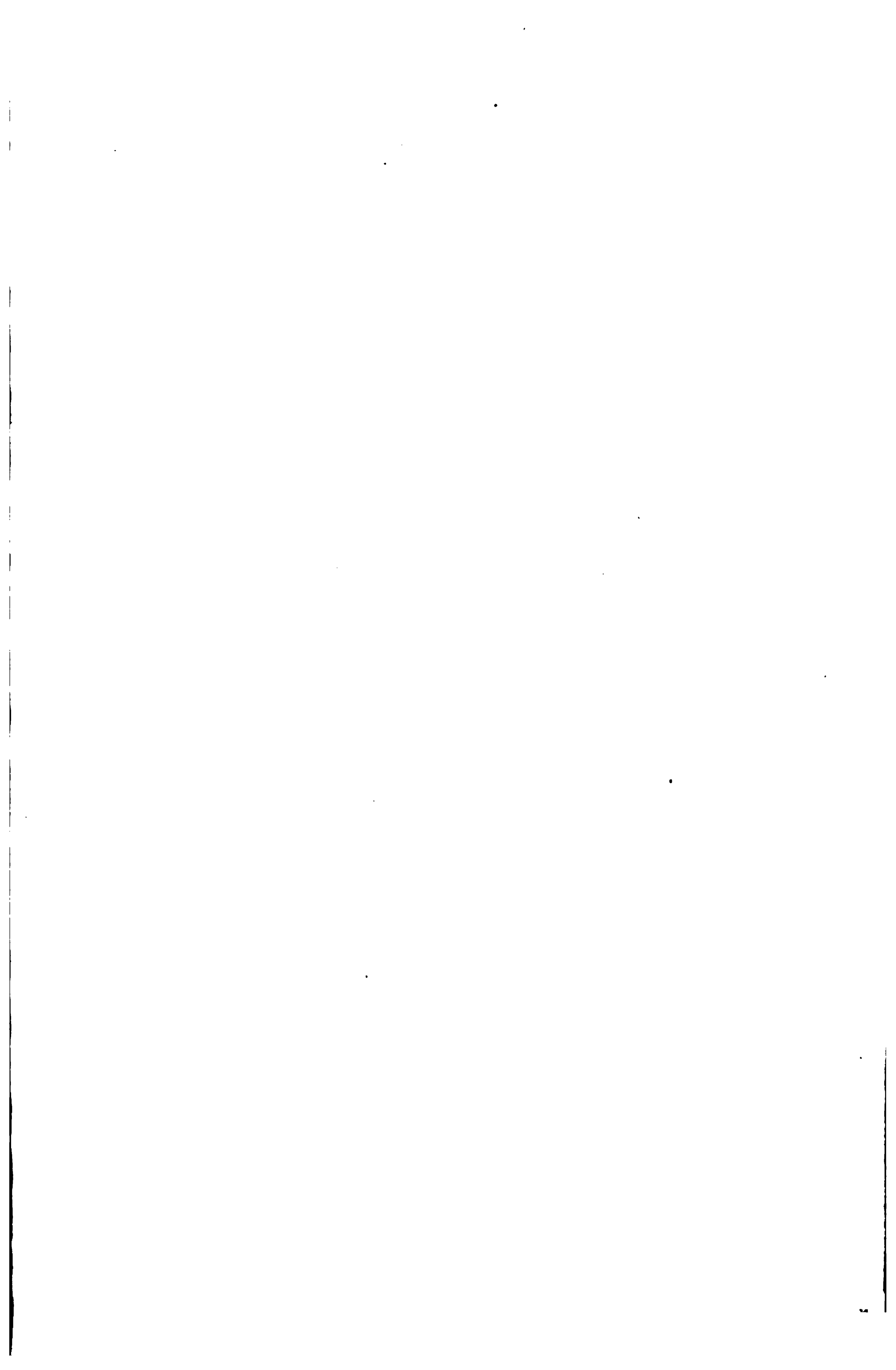


REESE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.
Received May , 1899.
Accession No. 75928 . Class No. .











Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

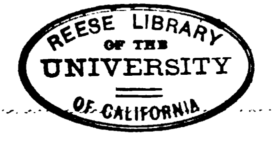
und

Dr. M. Cantor.



XXIX. Jahrgang.

Mit 9 lithographirten Tafeln.



Leipzig,
Verlag von B. G. Teubner.
1884.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

I.

Ueber Achromasie.

Von

F. Kessler.

Hierzu Taf. I u. II.

Das Problem der Achromasie, zwei verschiedenfarbige Bilder eines ebenen Objectes zur Deckung zu bringen, lässt sich in zwei Elementarprobleme theilen: nämlich entweder die Bilder von gleicher Grösse herzustellen oder sie in eine Ebene zu legen. Jedes dieser beiden niederen Probleme kann, wie im ersten und zweiten Abschnitt der folgenden Abhandlung gezeigt werden soll, für sich mittels einer Einzellinse gelöst werden, während das vollständige Problem, dem der dritte Abschnitt gewidmet ist und zu dessen Lösung mindestens zwei Linsen erforderlich sind, durch die ersten unter neue Gesichtspunkte gebracht wird. Viertens sollen die Beziehungen der Ersatzflächen*, die sich für zwei Farben zu Ersatzlinsen combiniren lassen, zu den Achromasien verschiedener Art untersucht werden.

Indem hier von der sphärischen Aberration abgesehen ist, also nur nahe der Axe verlaufende, sogenannte Centralstrahlen betrachtet werden, dient zur graphischen Darstellung und zu den bezüglichen Beweisen das durch die Werke von Reusch** und von Ferraris*** genugsam bekannte Verfahren, die Abstände in der zur optischen Axe normalen Richtung unermesslich zu vergrössern, so zwar, dass die brechenden sphärischen Flächen als Gerade erscheinen. Alsdann wird der gebrochene Strahl construirt, indem man das durch den Einfallsstrahl abgeschnittene Stück der Ordinate des Krümmungsmittelpunktes proportional dem Brechungsverhältniss verlängert resp. verkürzt und den Endpunkt mit dem Einfallspunkt verbindet. Die Abstände in der Richtung der Axe werden

* Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XVI, 362—365.

** Constructionen zur Lehre von den Haupt- und Brennpunkten eines Linsensystems. 1870.

*** Die Fundamentaleigenschaften dioptrischer Instrumente, übersetzt von F. Lippich. 1879.

positiv gezählt vom ersten Scheitelpunkte weg im Sinne der Lichtbewegung, Krümmungshalbmesser von der Fläche aus zum Mittelpunkte genommen.

Erster Abschnitt.

Zwei verschiedenfarbige Bilder von gleicher Grösse.

1. Bedingungen gleicher Grösse verschiedenfarbiger Bilder. In Fig. 1 sind o_1 und o_2 Scheitelpunkte, c_1 und c_2 Krümmungsmittelpunkte zweier Linsenflächen, O_1, O_2, C_1, C_2 die in diesen Punkten normal zur Axe geführten Geraden, n der Brechungsquotient des Linsenmittels für eine bestimmte Farbe. Schneidet ein auf den Punkt a_0 der Axe gerichteter Strahl die O_1 in e_1, die C_1 in u_1, so macht man auf letzterer $c_1 v_1 = c_1 u_1/n$, zieht $e_1 v_1$ bis a_1 auf der Axe, wodurch O_2 in e_2, C_2 in u_2 geschnitten wird, zieht $u_1 a_2$, das C_2 in v_2 schneidet, womit $c_2 v_2 = n . c_2 u_2$ wird, und zieht $e_2 v_2$ bis a_2 auf der Axe. Dann ist a_1 das erste, a_2 das zweite, d. h. das durch die Linse gegebene Bild von a_0. Für zwei verschiedene Farben, z. B. roth und blau, im Texte durch die Zeichen $\bar{}$, $\breve{}$ unterschieden, erhält man alle genannten Punkte und Linien doppelt, also schliesslich auch zwei Austrittsstrahlen $\bar{e}_2 \bar{v}_2$ und $\breve{e}_2 \breve{v}_2$, wie zwei Bilder $\bar{a}_2$ und $\breve{a}_2$, die, sofern sie zu einem gemischtfarbigen Strahle resp. Objecte conjugirt sind, gegenfarbig genannt werden sollen.

Bezeichnet man durch grosse Buchstaben die Grösse der Bilder in den gleichlautenden Punkten resp. in den diesen entsprechenden Ebenen, so wird das Grössenverhältniss der Bilder — bekanntlich gleich dem Verhältniss deren Abstände von dem Mittelpunkte der sie conjugirenden Fläche — durch folgende Gleichungen ausgedrückt:

$$1)\quad \begin{cases} \bar{A}_2/A_0 = (\bar{A}_2/\bar{A}_1).(\bar{A}_1/A_0) = (c_2 \bar{a}_2/c_2 \bar{a}_1).(c_1 \bar{a}_1/c_1 a_0), \\ \breve{A}_2/A_0 = (\breve{A}_2/\breve{A}_1).(\breve{A}_1/A_0) = (c_2 \breve{a}_2/c_2 \breve{a}_1).(c_1 \breve{a}_1/c_1 a_0). \end{cases}$$

Setzt man voraus, dass die beiden in $\bar{a}_2$ und $\breve{a}_2$ befindlichen Bilder des Objects a_0 unter sich gleich gross werden, dass also $\bar{A}_2 = \breve{A}_2$, so folgt hieraus

$$2)\quad c_2 \bar{a}_2 . c_1 \bar{a}_1 / c_2 \bar{a}_1 = c_2 \breve{a}_2 . c_1 \breve{a}_1 / c_2 \breve{a}_1 .$$

Da nach der Construction $c_1 \bar{a}_1 / c_2 \bar{a}_1 = c_1 \bar{u}_1 / c_2 \bar{v}_2$ auch $c_1 \breve{a}_1 / c_2 \breve{a}_1 = c_1 \breve{u}_1 / c_2 \breve{v}_2$, so geht Gleichung 2) über in

$$3)\quad c_2 \bar{a}_2 / c_2 \bar{v}_2 = c_2 \breve{a}_2 / c_2 \breve{v}_2 .$$

Mithin sind alsdann die Linien $\bar{a}_2 \bar{v}_2$ und $\breve{a}_2 \breve{v}_2$ parallel. Also:

Zwei gegenfarbige Strahlen werden parallel, wenn die ihnen zugehörigen Bilder gleich gross sind, und umgekehrt:

Sind zwei gegenfarbige Bilder gleich gross, so sind die zugehörigen Strahlen parallel.

Durch ein analoges Verfahren ergeben sich aus derselben Bedingung Beziehungen zwischen der Dicke der Linse, dem zweiten Krümmungsradius und anderen in Betracht kommenden Strecken, welche sich kürzer ausdrücken lassen, wenn man $o_1 c_1 = r_1$, $o_2 c_2 = r_2$, $o_1 o_2 = d$, $c_1 c_2 = i$ setzt, übrigens aber die Abstände der auf der Axe liegenden Punkte vom ersten Scheitelpunkte o_1 durch die schlichten Namen dieser Punkte selbst bezeichnet. So wird z. B.

$$4)\qquad c_2 = \frac{(\breve{n}-\bar{n})\breve{a}_1\bar{a}_1 + (\bar{a}_1-\breve{a}_1)d}{\breve{n}\bar{a}_1 - \bar{n}\breve{a}_1} = \frac{(\breve{n}-\bar{n})\breve{a}_1\bar{a}_1 - (\bar{a}_1-\breve{a}_1)r_2}{(\breve{n}-1)\bar{a}_1 - (\bar{n}-1)\breve{a}_1},$$

$$5)\qquad d = \frac{(\breve{n}\bar{a}_1 - \bar{n}\breve{a}_1)c_2 - (\breve{n}-\bar{n})\breve{a}_1\bar{a}_1}{\bar{a}_1-\breve{a}_1} = \frac{(\breve{n}-\bar{n})\breve{a}_1\bar{a}_1 - (\breve{n}\bar{a}_1-\bar{n}\breve{a}_1)r_2}{(\breve{n}-1)\bar{a}_1-(\bar{n}-1)\breve{a}_1)},$$

$$6)\qquad r_2 = \frac{(\breve{n}-\bar{n})\breve{a}_1\bar{a}_1 - [(\breve{n}-1)\bar{a}_1 - (\bar{n}-1)\breve{a}_1]d}{\breve{n}\bar{a}_1 - \bar{n}\breve{a}_1}$$

$$= \frac{(\breve{n}-\bar{n})\breve{a}_1\bar{a}_1 - [(\breve{n}-1)\bar{a}_1 - (\bar{n}-1)\breve{a}_2]c_2}{\bar{a}_1-\breve{a}_1}.$$

Diese Gleichungen lehren, dass, wenn von einer Linse die erste Fläche, zwei gegenfarbige Brechungsquotienten und ein Objectpunkt, mithin die ersten gegenfarbigen Bildpunkte gegeben sind, für gleich grosse gegenfarbige zweite Bilder die Dicke der Linse und der zweite Krümmungsradius gegenseitig lineare Functionen sind. Ist $d=0$ oder die Linse unendlich dünn, so ist $c_2 = r_2 = r_1$. Mit wachsendem d nimmt c_2 zu, r_2 ab, so dass $d = c_2$ und $r_2 = 0$, wenn

$$7)\qquad d = \frac{(\breve{n}-\bar{n})\breve{a}_1\bar{a}_1}{(\breve{n}-1)\bar{a}_1 - (\bar{n}-1)\breve{a}_1}$$

ist. Wächst d noch weiter, so wird r_2 negativ, d. h. die Linse biconvex.

2. Isometrische Punkte einer Linse. Bezeichnet man einen Objectpunkt a_0 für den Fall der gleichen Grösse seiner zweiten gegenfarbigen Bilder mit g, eben dadurch also auch dessen Abstand von o_1 im Sinne der Lichtbewegung und setzt die Werthe von $\bar{a}_1$ und $\breve{a}_2$ aus ihren Conjunctgleichungen mit g, nämlich

$$8)\qquad \bar{a}_1 = \frac{\bar{n}r_1 g}{(\bar{n}-1)g+r_1},\quad \breve{a}_1 = \frac{\breve{n}r_1 g}{(\breve{n}-1)g+r_1},$$

in eine der beiden Gleichungen 5b) oder 6a), so ergiebt sich daraus folgende Gleichung für den Abstand des Punktes g vom ersten Scheitelpunkte

$$9)\qquad g = \frac{r_1 d}{\acute{n}\bar{n}(r_1 - r_2) - (\breve{n}\bar{n} - d)} = \frac{r_1 d}{d - \breve{n}\bar{n} i}.$$

Die Gleichung 9) ermöglicht es also, für zwei durch ihre Brechungsquotienten gegebene Farben aus den Dimensionen einer Linse den Abstand einer in jenen Farben leuchtenden Ebene so zu bestimmen, dass diese Ebene mittels der Linse zu zwei unter sich gleich grossen gegenfarbigen Bildern conjugirt ist.

Denkt man die Lichtbewegung in entgegengesetzter Richtung, so findet sich ein dem Punkte g analoger Punkt g', dessen Abstand von dem zweiten Scheitelpunkte, aber im Sinne der ursprünglichen Lichtbewegung gemessen, ist

$$10)\qquad g' - d = \frac{r_2 d}{\breve{n}\bar{n}(r_1 - r_2) - (\breve{n}\bar{n} - 1) d} = \frac{r_2 d}{d - \breve{n}\bar{n} i}.$$

Die beiden Punkte g und g', wie auch die ihnen zugehörigen Ebenen sind nicht etwa unter einander conjugirt, sondern jeder derselben ist zu zweien anderen: $\bar{g}_2$ und $\breve{g}_2$, resp. $\bar{g}'_2$ und $\breve{g}'_2$ so conjugirt, dass sowohl die in $\bar{g}_2$ und $\breve{g}_2$ befindlichen gegenfarbigen Bilder unter sich, als auch die in $\bar{g}'_2$ und $\breve{g}'_2$ unter sich gleich gross sind. Man kann diese Punkte g und g' deshalb „dichromatisch-isometrisch" oder auch innerhalb des vorliegenden Bereiches schlechtweg „isometrisch" nennen. Den Gauss'schen Hauptpunkten würde dagegen nach einem von J. B. Listing († 24. Dec. 1882) mir im März vorigen Jahres brieflich gemachten Vorschlage die vielleicht auch sonst schon gebrauchte Bezeichnung „tautometrisch" gewahrt bleiben. Letztere fallen bei Linsen und Linsensystemen zusammen mit den Knotenpunkten, den tautogonalen (Listing), nicht aber bei Systemen, deren Anfangs- und Endmittel ungleich dicht sind. Offenbar würden bei letzteren also auch noch besondere „isogonale" Punkte für zwei Farben zu unterscheiden sein.

Die Gleichungen 9) und 10) sind, wie sich mit Voraussicht auf Gleichung 12) zeigt, analog construirt mit denen für die Abstände der Hauptpunkte einer Linse von ihren entsprechenden Scheiteln, nur ist der dortige einzelne Brechungsquotient hier durch das Product der beiden gegenfarbigen ersetzt. Man kann daher sagen: Dichromatisch-isometrische (isogonale) Punkte einer Linse sind tautometrische (tautogonale) Punkte einer congruenten Linse, deren Brechungsquotient gleich dem Producte aus den bezüglichen beiden gegenfarbigen Brechungsquotienten der ersten Linse ist. Beispielsweise würden die Hauptpunkte einer Linse für $n = 2{,}4$ (Diamant) dieselbe Lage haben, wie die isometrischen Punkte einer Glaslinse für $\bar{n} = 1{,}5360$ und $\breve{n} = 1{,}5625$, da in diesem Falle $n = \bar{n}.\breve{n}$ wäre.

3. Eigenschaften von Linsen, deren isometrische Punkte unendlich weit entfernt sind. Die Gleichungen 9) und 10) lehren, dass, wenn

$$11)\qquad d=\frac{\breve{n}\bar{n}(r_1-r_2)}{\breve{n}\bar{n}-1}$$

ist, beide isometrische Punkte unendlich weit entfernt sind. In diesem Falle ist also ein parallel der Axe einfallender gemischtfarbiger Strahl zu zwei unter sich parallelen gegenfarbigen Austrittsstrahlen conjugirt, und die gegenfarbigen Brennweiten werden einander gleich.

Solche Linsen haben bezüglich der Lage ihrer Hauptpunkte noch besondere Eigenschaften. Setzt man den Werth von d aus Gleichung 11) in die bekannte Gleichung für den Abstand irgend eines, z. B. des ersten rothen Hauptpunktes $\bar{h}$ einer Linse vom ersten Scheitelpunkte derselben ein, so erhält man

$$12)\qquad \bar{h}=\frac{r_1 d}{\bar{n}(r_1-r_2)-(\bar{n}-1)d}=\frac{\breve{n}r_1}{\breve{n}-1}$$

und analog

$$13)\qquad \breve{h}=\frac{\bar{n}r_1}{\bar{n}-1},$$

$$14)\qquad \bar{h}'-d=\frac{\breve{n}r_2}{\breve{n}-1},$$

$$15)\qquad \breve{h}'-d=\frac{\bar{n}r_2}{\bar{n}-1}.$$

Da die rechten Seiten der Gleichungen 12)—15) ebenfalls gewisse Brennweiten einzelner Linsenflächen ausdrücken, so treten also bei einer derartigen Linse folgende Coincidenzen auf:

I rother Hauptpunkt der Linse mit II blauem Brennpunkt der I. Fläche,
I blauer „ „ „ „ II rothem „ „ I. „
II rother „ „ „ „ I blauem „ „ II. „
II blauer „ „ „ „ I rothem „ „ II. „

oder allgemein: Ein farbiger Hauptpunkt einer Linse mit unendlich entfernten isometrischen Punkten coincidirt mit dem gegenfarbigen und gegenzahligen Brennpunkt der gleichzahligen Fläche.

Diese Coincidenzen sind in Fig. 2 für eine convex-concave und in Fig. 3 für eine biconvexe Linse dargestellt und zwar, wie es bei graphischen Beispielen in so kleinem Maassstabe unvermeidlich ist, unter Annahme der etwas übernatürlichen Dispersion $\bar{n}=3/2$, $\breve{n}=14/9$. Für $r_1=30$, $r_2=10$ wird Gleichung 11) zufolge $d=35$ und, wenn man die Flächenbrennpunkte, resp. ihre Abstände von o_1 mit b bezeichnet, die Haupt- und

Brennpunkte der Linse u. s. w. desgleichen mit h und f, so werden hier $\bar{f}' = -9$, $\breve{f}' = -7$, $\bar{h}' = \bar{b}_2 = 63$, $\breve{h}' = \bar{b}_2 = 65$, $\bar{h} = \breve{b}'_1 = 84$, $\breve{h} = \bar{b}'_1 = 90$ $\bar{f} = 156$, $\breve{f} = 162$, die Brennweiten der Linse $\bar{F} = \breve{F} = -72$ (Fig. 2). Die Namen der Hauptpunkte sind (für beide Farben gemeinschaftlich) an ihren Ordinaten da eingetragen, wo man diesen bei der gewöhnlichen Construction zuerst begegnet: auf dem Durchschnittspunkte des Einfalls- und seines conjugirten Austrittsstrahles. Das von hier noch in der Farbe des Hauptpunktes auf die Axe gefällte Loth trifft dann jedesmal den gegenfarbigen Brennpunkt der durch das obige Schema oder Gesetz angezeigten Fläche. Die von rechts nach links den Weg $\infty e_2 e_1$ machenden Strahlen, fernerhin als „rückgehende" zu bezeichnenden Strahlen liefern $\bar{b}_2$ und $\breve{b}_2$ als erste Brennpunkte der zweiten Fläche, $\bar{h}$ und $\breve{h}$ als erste Hauptpunkte und $\bar{f}$ und $\breve{f}$ als erste Brennpunkte der Linse, die von links nach rechts auf $\infty' e'_1 e'_2$ „hingehenden" Strahlen aber $\bar{b}'_1$, $\breve{b}'_1$ als zweite Brennpunkte der ersten Fläche u. s. w. Ist dagegen $r_2 = -10$, so wird $d = 70$, $\breve{h}' = \bar{b}_2 = 40$, $\bar{h}' = \breve{b}_2 = 42$, $\bar{f} = 48$, $\breve{f} = 54$, $\bar{f}' = 76$, $\breve{f}' = 78$, $\bar{h} = \breve{b}'_1 = 84$, $\breve{h} = \bar{b}'_1 = 90$, $\bar{F} = \breve{F} = 36$ (vergl. Fig. 3).

Das Vorhergehende lehrt auch, dass die bekannte Gleichung für die Brennweite einer Linse, in welcher n einen Brechungsquotienten bedeutet,

$$F = \frac{n r_1 r_2}{(n-1)[n(r_2 - r_1) + (n-1)d]}$$

und die nach n aufgelöst zwar gewöhnlich, d. h. bei dünnen Linsen nur einen „brauchbaren" Werth hierfür liefert, sich nicht unter allen Umständen so verhält. Setzt man in dieser Gleichung beispielsweise $r_1 = 10$, $r_2 = 3$, $d = 12$, $F = -19\frac{181}{201}$, so wird $n = 1{,}54925 \pm 0{,}01325$ oder $\bar{n} = 1{,}5360$, $\breve{n} = 1{,}5625$, welche Werthe recht wohl vorkommen können. Es ist also nicht richtig, wenn man schlechtweg sagt, eine Linse aus einem Stück könne nicht für zwei Farben dieselbe Brennweite haben.

4. Isometrische Punkte eines Systems mehrerer Linsen. Bezeichnet man die Fundamentalpunkte und Brennweiten eines Linsensystems wie bisher bei Einzellinsen, den Abstand von $\bar{h}$ hinter $\breve{h}$ durch Δh, den von $\bar{h}$ und $\breve{h}$ hinter dem ersten dichromatisch-isometrischen Punkte g mit $\bar{\gamma}$ und $\breve{\gamma}$, so dass also $\bar{\gamma} - \breve{\gamma} = \Delta h$ ist, habe sodann das rothe Bild des Punktes g den Abstand x vor $\bar{h}'$ und das blaue den Abstand y vor $\breve{h}'$, so wird vermöge der Ortsgleichungen dieser Bilder

$$16) \quad (\bar{F} - \bar{\gamma})(\bar{F} + x) = \bar{F}^2,$$

$$17) \quad (\breve{F} - [\bar{\gamma} - \Delta h])(\breve{F} + y) = \breve{F}^2,$$

und wegen gleicher Grösse der gegenfarbigen Bilder nach der Grössengleichung

$$\bar{\gamma}/(\bar{\gamma}-\Delta h)=y/x \tag{18}$$

sein. Aus diesen Gleichungen ergiebt sich durch Elimination von x und y

$$\bar{\gamma}=\frac{\bar{F}.\Delta h}{\bar{F}-\breve{F}}=\frac{\bar{F}.\Delta h}{\Delta F} \tag{19}$$

und aus den mit Gleichung 18) analog aufzustellenden

$$\breve{\gamma}=\frac{\breve{F}.\Delta h}{\Delta F}, \tag{20}$$

$$\bar{\gamma}'=\frac{\bar{F}.\Delta h'}{\Delta F}, \tag{21}$$

$$\breve{\gamma}'=\frac{\breve{F}.\Delta h'}{\Delta F}, \tag{22}$$

wonach sich die Lagen der isometrischen Punkte eines Linsensystems aus den Lagen der gegenfarbigen Fundamentalpunkte bestimmen lassen. Für jedwedes Linsensystem ist demnach

$$\bar{\gamma}/\breve{\gamma}=\bar{\gamma}'/\breve{\gamma}'=\bar{F}/\breve{F}, \tag{23}$$

$$\bar{\gamma}/\bar{\gamma}'=\breve{\gamma}/\breve{\gamma}'=\Delta h/\Delta h', \tag{24}$$

oder in Worten: **Die Abstände dichromatisch-isometrischer Punkte von ihren zugehörigen Hauptpunkten verhalten sich 1. bei gleicher Zahl (Nummer) wie die Brennweiten der entsprechenden Farben, 2. bei gleicher Farbe wie die Aenderungen der Lage der entsprechend gezählten Hauptpunkte.**

5. Construction eines Linsensystems, dessen isometrische Punkte unendlich weit entfernt sind. Die Gleichungen 19) – 22) lehren, dass die isometrischen Punkte eines Linsensystems unendlich weit entfernt liegen, wenn die gegenfarbigen Brennweiten gleich sind und dabei die gegenfarbigen Hauptpunkte nicht coincidiren. Zunächst handelt es sich also darum, das Linsensystem so einzurichten, dass die von einem parallel zur Axe einfallenden Strahl herrührenden gegenfarbigen Theile das System parallel unter sich verlassen. Beschränkt man sich dabei auf die am häufigsten gebrauchten Combinationen von zwei planconvexen, mit ihren gleichartigen Flächen nach derselben Seite gewendeten Linsen derselben Glassorte (Huyghens-Ocular und Umkehrungssystem des terrestrischen Fernrohrs), so lässt sich die Aufgabe zweimal variiren. Man kann erstens das System so stellen, dass die Endfläche entweder convex oder plan ist, und zweitens entweder den Halbmesser der sphärischen Fläche der zweiten Linse oder den Abstand dieser Linse von einem bekannten Punkte aus den übrigen Daten bestimmen. Daraus ergeben sich vier Fälle.

I. **Die Endfläche ist sphärisch und deren Krümmungshalbmesser gesucht.** Man berechnet aus den Daten die Orte der von

der dritten Fläche entworfenen Bilder $\bar{a}_3$ und $\breve{a}_3$ (Fig. 4, wo der Deutlichkeit halber die Bildorte mit Fortlassen des Buchstaben lediglich durch die Indices bezeichnet sind), bestimmt sodann die Lage des Divergenzpunktes der bezüglichen Strahlen, resp. dessen Projection ω_3, die nun als Abscissennullpunkt gilt. Dann wird mit Rücksicht auf Gleichung 4a), § 1 der Abstand des Mittelpunktes c_4 der vierten Fläche von ω_3

$$25)\qquad c_4 = \frac{(\breve{n}-\bar{n})\breve{a}_3\bar{a}_3 - (\bar{a}_3-\breve{a}_3)o_4}{\breve{n}\bar{a}_3 - \bar{n}\breve{a}_3}.$$

II. Die Endfläche ist sphärisch und der Abstand der zweiten Linse gesucht. Natürlich müssen die Dicke d_2 und der Endhalbmesser r_4 der zweiten Linse gegeben sein. Sind alsdann $\breve{a}_2$ und $\bar{a}_2$ die durch die erste Linse entworfenen Bilder (Fig. 4), welche durch O_3 nach $\breve{a}_3$ und $\bar{a}_3$ gebracht werden, und ist ω_2 die Projection des Divergenzpunktes der an O_3 einfallenden Strahlen, zugleich Abscissennullpunkt, während ω_3 die des gleichen der an O_3 austretenden Strahlen noch unbekannt ist, so setze man $\bar{a}_3-\omega_3 = x$, $\breve{a}_3-\omega_3 = y$, $o_3-\omega_3 = z$. Dann ist

$$26)\qquad z - x = \bar{n}(o_3-\bar{a}_2),$$

$$27)\qquad z - y = \breve{n}(o_3-\breve{a}_2),$$

$$28)\qquad (\bar{n}\bar{a}_2 - \breve{n}\breve{a}_2)z = \breve{n}\bar{n}(\bar{a}_2-\breve{a}_2)o_3,$$

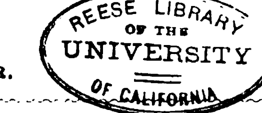
und mit Rücksicht auf Gleichung 6a), § 1

$$29)\qquad r_4 = \frac{(\breve{n}-\bar{n})xy - [(\breve{n}-1)x - (\bar{n}-1)y](o_3-d_2)}{\breve{n}x - \bar{n}y},$$

woraus nach Elimination von x, y, z der Abstand des dritten Scheitelpunktes o_3 von ω_2 sich ergiebt:

$$30)\quad o_3 = \frac{\breve{n}\bar{n}[(\breve{n}-\bar{n})\breve{a}_2\bar{a}_2 - (\bar{a}_2-\breve{a}_2)r_4] - [(\breve{n}-1)\bar{n}\bar{a}_2 - (\bar{n}-1)\breve{n}\breve{a}_2]d_2}{\breve{n}\bar{n}[(\breve{n}-1)\bar{a} - (\bar{n}-1)\breve{a}]}.$$

III. Die Endfläche ist plan und der Krümmungshalbmesser der vorletzten Fläche gesucht. (Fig. 5.) Auch hier geht man, wie bei II, von $\bar{a}_2$, $\breve{a}_2$ und ω_2 aus. Da die Richtung der an der Endfläche O_4 austretenden Strahlen unabhängig von dem Orte dieser Fläche ist, so kann man sich diese behufs der Demonstration durch den Krümmungsmittelpunkt c_3 der vorletzten Fläche gelegt denken. Zieht man dann in beiden Farben $e_2 a_2$ bis e_3 auf O_3 und bis u_3 auf C_3, macht $c_3 v_3 = c_3 u_3/n$, zieht $e_3 v_3$ bis a_3 auf der Axe und bis e_4 auf O_4, zieht endlich zu $a_3 u_3$ eine Parallele durch e_4 bis a_4 auf der Axe, so sind $\breve{a}_4$ und $\bar{a}_4$ die letzten gegenfarbigen Bilder. Damit aber, wie verlangt, $\bar{a}_4\bar{e}_4$ und $\breve{a}_4\breve{e}_4$ parallel



seien, müssen auch schon $\bar{a}_3\bar{u}_3$ und $\breve{a}_3\breve{u}_3$, weil sie jenen parallel sind, unter sich parallel gewesen sein. Aus dieser Bedingung ergiebt sich dann leicht folgender Werth für den Krümmungshalbmesser r_3 der vorletzten Fläche — alle Abstände: c, o, a von ω_2 aus zu zählen —:

$$31)\qquad r_3 = c_3 - o_3 = \frac{[(\breve{n}-1)\bar{a}_2 - (\bar{n}-1)\breve{a}_2]\,o_3 - (\breve{n}-\bar{n})\breve{a}_2\bar{a}_2}{\breve{a}_2 - \bar{a}_2}.$$

IV. Die Endfläche ist plan und der Abstand der zweiten Linse gesucht. Bezeichnet o_3 den Abstand des ersten Scheitelpunktes der zweiten Linse von ω_2, so transformirt man, da hier r_3 gegeben sein muss, Gleichung 31) direct in

$$32)\qquad o_3 = \frac{(\bar{a}_2 - \breve{a}_2)\,r_3 + (\breve{n}-\bar{n})\breve{a}_2\bar{a}_2}{(\breve{n}-1)\bar{a}_2 - (\bar{n}-1)\breve{a}_2}.$$

Als Beispiele zur Anwendung dieser Formeln dienen die in Fig. 6 und 7 gezeichneten Linsencombinationen, bei denen aus früher (§ 3) angeführtem Grunde die stark differenten Brechungsquotienten $\bar{n} = 3/2$, $\breve{n} = 14/9$ zu Grunde gelegt sind. Fig. 6 giebt in einem Grundmaasse von $\frac{1}{4}$ mm ein Huyghens-Ocular von folgenden Dimensionen: Dicke des Sammelglases $d_1 = 28$, des Oculars $d_2 = 12$, lichter Abstand beider $o_3 - o_2 = 180$, $r_1 = 156$, $r_3 = 50$. Hieraus ergeben sich die Abstände der Fundamentalpunkte von o_1:

$$\begin{array}{rrrrr}
\breve{h}' = 109\frac{9}{56} & \bar{f} = 144{,}3 & \breve{f}' = 255\frac{23}{56} & \bar{h} = 290{,}55 & \\
\bar{h}' = 118\frac{7}{8} & \breve{f} = 175{,}5 & \bar{f}' = 265\frac{1}{8} & \breve{h} = 321{,}75 & F = 146{,}25. \\
\hline
\Delta h = 9\frac{5}{7} & \Delta f = 31{,}2 & \Delta f' = 9\frac{5}{7} & \Delta h = 31{,}2 &
\end{array}$$

$$\bar{b}_2 = 108,\quad \breve{b}_2 = 118,\quad \Delta b_2 = 10,\quad \breve{b}'_1 = 290{,}8,\quad \bar{b}'_1 = 321\tfrac{1}{3},\quad \Delta b' = 30\tfrac{8}{15}.$$

Fig. 7 giebt den Umkehrungsapparat eines terrestrischen Fernrohrs, ohne Strahlenlänge, dessen Dimensionen bei $\frac{1}{8}$ mm Grundmaass genommen sind; $d_1 = d_2 = 35$, $o_2 o_3 = 360$, $r_2 = r_4 = -200$, woraus die Abstände von o_1:

$$\begin{array}{rrrrr}
\bar{f} = 7\frac{1}{3} & \breve{h}' = 22 & \bar{h} = 391\frac{1}{3} & \breve{f}' = 406 & \\
\breve{f} = 46\frac{1}{2} & \bar{h}' = 62 & \breve{h} = 430\frac{1}{2} & \bar{f}' = 446 & F = 384. \\
\hline
\Delta f = 39\frac{1}{6} & \Delta h' = 40 & \Delta h = 39\frac{1}{6} & \Delta f' = 40 &
\end{array}$$

$$\bar{b}_2 = 18\tfrac{1}{3},\quad \breve{b}_2 = 57\tfrac{1}{3},\quad \Delta b_2 = 39\tfrac{1}{6},\quad \breve{b}'_1 = 395,\quad \bar{b}'_1 = 435,\quad \Delta b'_1 = 40.$$

Diese Berechnungen lehren, dass das § 3 für Einzellinsen, deren isometrische Punkte unendlich weit entfernt sind, bewiesene Coincidenzgesetz für derartige Linsensysteme nur annähernd giltig ist. Allem Anscheine nach würde es aber auch hier absolute Geltung erhalten, wenn man, wie dies bei theoretischen Entwickelungen gemeiniglich geschieht, die Dicken der Linsen vernachlässigte.

Es ist einleuchtend, dass die vorbehandelten Combinationen, auch abgesehen von der übertriebenen Dispersion, noch nicht praktisch brauchbare Formen darstellen. Zunächst wurde, wie dies auch in theoretischen Lehrbüchern allgemein geschieht, angenommen, dass ein unendlich entferntes Object vorläge, während bei dem wirklichen Gebrauch das Object ein Bild in endlichem Abstande, zwar bei dem Huyghens-Ocular hinter, bei dem Umkehrungsapparat vor der ersten Linse ist. Die deshalb etwa nöthige Abänderung in der Construction erstreckt sich jedoch nicht auf die entwickelten Formeln 25) und 30)—32), da diese schon das durch die dritte resp. zweite Fläche der Combination entworfene Bild als gegeben annehmen. Nach dieser Berichtigung würde noch zu bedenken sein, dass auch bei gleicher Grösse der gegenfarbigen Bilder diese doch vermöge ihres verschiedenen Abstandes vom Augenpunkte ungleich gross erscheinen werden. Dies jedoch, wie auch die sphärische Aberration in Betracht zu ziehen, wurde von vornherein hier nicht beabsichtigt.

Zweiter Abschnitt.

Zwei verschiedenfarbige Bilder in einer Ebene.

6. Bedingungen der Lage gegenfarbiger Bilder in einer Ebene. Wenn man eine, Fig. 1 analoge Zeichnung mit dem Erfolge ausführt, den Fig. 8 zeigt, dass die Geraden $\bar{e}_2\bar{v}_2$ und $\breve{e}_2\breve{v}_2$, anstatt parallel zu werden, sich in einem Punkte t_2 auf der Axe schneiden, so wird diese Coincidenz an die Bedingung

$$33)\qquad o_2\bar{e}_2/o_2\breve{e}_2 = c_2\bar{v}_2/c_2\breve{v}_2$$

geknüpft sein. Da alsdann $c_2\bar{v}_2 = \bar{n}.c_2\bar{u}_2$ und $c_2\breve{v}_2 = \breve{n}.c_2\breve{u}_2$, also auch

$$34)\qquad \begin{cases} o_2\bar{e}_2/\bar{n}.c_2\bar{u}_2 = (\bar{a}_1 - d)/\bar{n}(\bar{a}_1 - d - r_2), \\ o_2\breve{e}_2/\breve{n}.c_2\breve{u}_2 = (\breve{a}_1 - d)/\breve{n}(\breve{a}_1 - d - r_2) \end{cases}$$

ist, so ergiebt sich mit Rücksicht auf Gleichung 33)

$$35)\qquad r_2 = \frac{(\breve{n} - \bar{n})(\bar{a}_1 - d)(\breve{a}_1 - d)}{\breve{n}(\bar{a}_1 - d) - \bar{n}(\breve{a}_1 - d)}.$$

Hiernach kann man bei gegebener Dicke einer Linse den Halbmesser der zweiten Linsenfläche so bestimmen, dass die durch die erste Fläche getrennt in den Punkten $\bar{a}_1$ und $\breve{a}_1$ entworfenen Bilder eines gegebenen Strahlpunktes der Axe wieder in einem Punkte t_2 der Axe vereinigt werden, resp. die gegenfarbigen Bilder eines ebenen Objects wieder in eine und dieselbe Ebene zu liegen kommen. Natürlich werden diese Bilder, wie aus § 1 folgt, ungleich gross sein. Solche Punktpaare, die also wie t_0 — so werde a_0 in diesem Falle bezeichnet — und t_2 für zwei Farben

zugleich conjugirt sind, kann man (dichromatisch-) isotopische Punkte nennen. Sie entsprechen den Symptosen Listing's, in denen für eine Farbe Object und Bild — ebenfalls verschieden gross — in eine Ebene fallen. Man könnte zur Analogie die Symptosen alsdann tautotopische Punkte nennen.

Die Gleichung 35) lässt sich, wenn r_2 gegeben ist, nach d, der Dicke der Linse, auflösen. Fallen die Strahlen parallel der Axe ein, so sind $\bar{a}_1$ und $\breve{a}_1$ die gegenfarbigen Brennpunkte der ersten Fläche und deren Abstände vom Punkte o_1 sind bei gleichzeitiger Einführung einer Abkürzung (m)

$$36)\qquad \bar{a}_1 = \frac{\bar{n} r_1}{\bar{n}-1} = \bar{m} r_1, \quad \breve{a}_1 = \frac{\breve{n} r_1}{\breve{n}-1} = \breve{m} r_1,$$

welche Werthe in Gleichung 35) eingesetzt zu der Gleichung

$$37)\qquad d^2 - [(\breve{m}+\bar{m}) r_1 - r_2] d = \breve{m}\bar{m} r_1 (r_2 - r_1)$$

führen. Somit kann man aus gegebenen gegenfarbigen Brechungsquotienten und den Halbmessern beider Linsenflächen die Dicke der Linse so bestimmen, dass Strahlen, die parallel der Axe von einer bestimmten Seite einfallen, nur einen Vereinigungspunkt haben, oder dass die Linse für die beiden Farben einen gemeinschaftlichen zweiten Brennpunkt besitzt. Soll aber für denselben Sinn der Lichtbewegung ein die Axe schneidender Strahl zweien axenparallelen Austrittsstrahlen conjugirt sein, so hat man die Linse nur umgekehrt zu denken oder in Gleichung 37) r_1 durch $-r_2$ und r_2 durch $-r_1$ zu ersetzen. Man findet dann die Dicke, für welche die Linse einen gemeinschaftlichen ersten Brennpunkt erhält. Natürlich führt die Auflösung der Gleichung 37) zuweilen auf complexe (imaginäre) Werthe von d, während nur reelle und ausserdem positive physikalisch brauchbar sind. Für den ersten Fall werden beispielsweise beide Wurzeln positiv, wenn $r_1 = 3$, $r_2 = 1$, $\bar{n} = 1{,}5$, $\breve{n} = 1{,}6$ gegeben sind, mithin nach 36), 37)

$$d^2 - 16 d = -48, \text{ daher } d_\alpha = 12,\ d_\beta = 4$$

erfolgt. Setzt man für den zweiten Fall $r_1 = 22$, $r_2 = 3$, so wird $d_\alpha = 24$, $d_\beta = -19$.

7. Eigenschaften einer Linse, bei welcher zwei verschiedenfarbige Brennpunkte coincidiren. Bezeichnet man, wie früher, den Abstand der Krümmungsmittelpunkte der Flächen mit i, so erhält man für axenparallele Einfallsstrahlen gemäss 35), 36), ohne die Abkürzung m zu benutzen,

$$38)\qquad i = d + r_2 - r_1 = \frac{r_1 d}{\breve{n}\bar{n} r_1 - (\breve{n}-1)(\bar{n}-1) d}.$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung für den Abstand eines zweiten, z. B. rothen Hauptpunktes von der zweiten Fläche ein, so wird dieser

$$39)\quad \bar{h}' - d = \frac{r_2 d}{d - \bar{n} i} = \frac{[\breve{n} r_1 - (\breve{n} - 1) d][\bar{n} r_1 - (\bar{n} - 1) d]}{\breve{n} \bar{n} r_1 - \bar{n} r_1 - (\breve{n} - 1)(\bar{n} - 1) d} = \frac{\breve{n} r_1 - (\breve{n} - 1) d}{\breve{n} - 1} = \frac{\breve{n} r_1}{\breve{n} - 1} - d,$$

folglich

$$40)\quad \bar{h}' = \frac{\breve{n} r_1}{\breve{n} - 1}$$

und analog

$$41)\quad \breve{h}' = \frac{\bar{n} r_1}{\bar{n} - 1}.$$

Ferner erhält man für axenparallele Austrittsstrahlen analog die Gleichungen

$$42)\quad \bar{h} = \frac{\breve{n} r_2}{\breve{n} - 1}$$

und

$$43)\quad \breve{h} = \frac{\bar{n} r_2}{\bar{n} - 1}.$$

Die Gleichungen 40)—43) lassen sich folgendermassen schematisiren:

Ist gemeinsam:		so coincidiren:
I Brennpunkt	I rother Hauptp.	mit I blauem Brennp. d. II. Fläche,
I „	I blauer „	„ I rothem „ „ II. „
II „	II rother „	„ II blauem „ „ I. „
II „	II blauer „	„ II rothem „ „ I. „

In Worten: Wenn bei einer Linse zwei gegenfarbige Brennpunkte coincidiren, so coincidiren auch die dem gemeinsamen Brennpunkte gleichzahligen Hauptpunkte mit den gleichzahligen und gegenfarbigen Brennpunkten der gegenzahligen Fläche.

Diese Linsen unterscheiden sich von den in § 3 behandelten wesentlich in Folgendem: Die ersten haben für zwei Farben gleiche Brennweiten. Infolge dessen liegen bei einer Linse beide isometrische Punkte im Unendlichen; ihre Conjuncte sind die vier Brennpunkte und es coincidiren vier Hauptpunkte mit vier Flächenbrennpunkten. Die zweiten haben einen gemeinsamen Brennpunkt, dessen Conjunct ein im Unendlichen liegender isotopischer Punkt ist. Das zweite Paar isotopischer Punkte (vergl. § 9) liegt im Endlichen und es coincidiren zwei Hauptpunkte mit zwei Flächenbrennpunkten.

Eine Linse mit zwei Paaren gemeinsamer Brennpunkte ist nicht darstellbar, da eine solche von symmetrischer Form sein müsste und alsdann Gleichung 37) stets complexe Werthe für d liefert.

8. Graphische Behandlung des Vorigen. Die eben nachgewiesenen Coincidenzen lassen sich auch aus Sätzen der neueren Geometrie ableiten. So ist allgemein bewiesen worden, dass, wenn man zu zwei homocentrischen Strahlenbüscheln $S(a, b, c)$ und $S'(a', b', c')$ die Verbindungslinien $l = a.b' - a'.b$, $m = a.c' - a'.c$, $n = b.c' - b'.c$ zieht, die drei Geraden l, m, n homocentrisch sind.* Hieraus folgt bezüglich Fig. 8, wenn zuerst $e_1(\breve{a}_1, \bar{a}_1, a_0)$ und $a_2(\bar{w}_2, \breve{w}_2, a_0)$ die beiden Büschel sind, dass $\breve{e}_2\bar{e}_2$, $\breve{a}_1\bar{w}_2$, $\bar{a}_1\breve{w}_2$ homocentrisch werden, und wenn $u_1(\breve{a}_1, \bar{a}_1, a_0)$ und $a_2(\bar{w}_2\breve{w}_2 a_0)$ die beiden Büschel sind, dass $\breve{v}_2\bar{v}_2$, $\breve{a}_1\bar{w}_2$, $\bar{a}_1\breve{w}_2$ homocentrisch werden. Also werden die vier Geraden $\breve{e}_2\bar{e}_2$, $\breve{v}_2\bar{v}_2$, $\breve{a}_1\bar{w}_2$, $\bar{a}_1\breve{w}_2$ homocentrisch. Da aber die beiden ersten derselben normal zur Axe, also unter sich parallel sind, so sind auch $\bar{a}_1\breve{w}_2$ und $\breve{a}_1\bar{w}_2$ unter sich parallel und normal zur Axe. Dies gilt aber auch in dem besondern Falle, wo $e_1 u_1$ parallel zur Axe ist, wo also die Fusspunkte der aus $\bar{w}_2$ und $\breve{w}_2$ auf die Axe gefällten Lothe die Hauptpunkte sind. Hiermit erweisen sich die Coincidenzen des § 7.

Analog lässt sich die eingangs § 6 analytisch behandelte Aufgabe graphisch lösen. Sind (Fig. 8) die durch die Vorderfläche O_1 zum Strahlenpunkte a_0 conjugirten Bildpunkte $\breve{a}_1$, $\bar{a}_1$ und der Scheitelpunkt o_2 gegeben, so zieht man zur Axe durch $\breve{a}_1$ und $\bar{a}_1$ Normale bis $\bar{w}_2$ und $\breve{w}_2$ auf $e_1 u_1$, verbindet $\breve{a}_1$ und $\bar{a}_1$ mit u_1, zieht $\bar{e}_2\bar{w}_2$ und $\breve{e}_2\breve{w}_2$, die $u_1\bar{a}_1$ resp. $u_1\breve{a}_1$ in $\bar{v}_2$ und $\breve{v}_2$ schneiden, zieht endlich $\bar{v}_2\breve{v}_2$, das die Axe in c_2, dem Krümmungsmittelpunkt der Endfläche o_2, schneiden wird.

Die oben nachgewiesenen Coincidenzen sind in Fig. 9 und 10 dargestellt. Fig. 9 ist eine Linse mit gemeinsamem z w e i t e m Brennpunkt f' von den Dimensionen der zuerst in § 7 berechneten, zwar von der kleineren der beiden möglichen Dicken, $d_\beta = 4$, woraus dann $\bar{h}' = \breve{b}'_1 = 8$, $\breve{h}' = \breve{b}'_1 = 9$, der Abstand des zweiten Brennpunktes von der zweiten Fläche, $\bar{\breve{f}} - d = -5$ wird. Dagegen ist in Fig. 11 der e r s t e Brennpunkt gemeinsam bei den Dimensionen $r_1 = 22$, $r_2 = 3$, $d = 24$, woraus $\bar{h} = \breve{b}_2 = 32$, $\breve{h} = \bar{b}_2 = 33$, $\bar{\breve{f}} = 44$ erfolgen.

9. Bestimmung der isotopischen Punkte eines Systems von Linsen. Sind die Fundamentalpunkte eines Systems bekannt und werden die Brennweiten $\bar{F} = p$, $\breve{F} = q$, der Abstand des ersten blauen Brennpunktes hinter dem ersten rothen, $\Delta f = \alpha$, der des zweiten blauen Brennpunktes vor dem zweiten rothen, $-\Delta f = \beta$ gesetzt, der Abstand eines isotopischen Objectpunktes hinter $\bar{f}$ mit x, der des ihm conjugirten Bildpunktes vor

---

* W i t z s c h e l l, Grundlinien der neueren Geometrie (1858), § 39.

$\bar{f}'$ mit y bezeichnet, so ist die Conjunction der beiden isotopischen Punkte für beide Farben ausgedrückt durch die Gleichungen

$$44)\qquad xy = p^2,$$

$$45)\qquad (x-\alpha)(y-\beta) = q^2,$$

deren Wurzeln, wenn

$$46)\qquad p^2 - q^2 + \alpha\beta = m$$

und

$$47)\qquad \sqrt{(p^2-q^2+\alpha\beta)^2 - 4\alpha\beta p^2} = w$$

gesetzt wird, heissen

$$48)\qquad x_1 = (m+w)/2\beta,$$

$$49)\qquad y_1 = (m-w)/2\alpha,$$

$$50)\qquad x_2 = (m-w)/2\beta,$$

$$51)\qquad y_2 = (m+w)/2\alpha.$$

Die hiernach zu bestimmende Lage dieser Punkte wird bei vielen Systemen imaginär, z. B. dem Huyghens-Ocular, dem Umkehrungssystem des terrestrischen Fernrohres und dem Ramsden-Ocular. Bei denselben ist auch die Lage der tautotopischen Punkte imaginär. Reell sind jedoch sämmtliche Punkte dieser Art bei gewöhnlichen Biconvex-Linsen. Um dies zu zeigen, ist eine solche von den Dimensionen $r_1 = 29$, $r_2 = -58$, $d = 8{,}7$ mm (also $r_1 : r_2 : d = 10 : -20 : 3$) mit der Dispersion $\bar{n} = 3/2$, $\breve{n} = 14/9$ erstens Fig. 11 $2\frac{1}{4}$ mal vergrössert von $\bar{f}$ bis $\bar{f}'$ und c_1, dann Fig. 12 zehnmal vergrössert von $\bar{s}$ bis $\bar{s}'$ (Symptosen) gezeichnet. In die letzte Figur sind ausser den isometrischen Punkten g, g' auch ihre Conjuncte $\bar{g}_2$, $\breve{g}_2$, $\bar{g}'_2$, $\breve{g}'_2$ eingetragen.

10. Grössenverhältnisse isotopischer Bilder. Bezeichnet man die Grösse eines Objects in der Ebene von t_0 mit X_1, die seines conjugirten rothen Bildes in der Ebene von t_2 mit $\bar{Y}_1$, die des blauen daselbst mit $\breve{Y}_1$, die analogen des isotopischen Paares $t'_0 t'_2$ mit X_2, $\bar{Y}_2$, $\breve{Y}_2$ und das Grössenverhältniss eines rothen Bildes zu dem in gleicher Ebene liegenden blauen mit χ_1 resp. χ_2, welche Zahl „chromatische Vergrösserung“ heissen soll, so wird nach bekannten Grössengleichungen und mit Rücksicht auf die Gleichungen 44) — 51)

$$52)\qquad \frac{\bar{Y}_1}{X_1} = \frac{p-y_1}{x_1-p},$$

$$53)\qquad \frac{\breve{Y}_1}{X_1} = \frac{q+\beta-y_1}{x_1-\alpha+q},$$

mithin

$$54)\qquad \chi_1 = \frac{\bar{Y}_1}{\breve{Y}_1} = \frac{(p-y_1)(x_1-\alpha-q)}{(x_1-p)(q+\beta-y_1)}.$$

Aus den Gleichungen 44)—51) lassen sich aber auch folgende Gleichungen ableiten:

55) $$(p-y_1)/(x_1-p)=y_1/p=p/x_1,$$

56) $$(x_1-\alpha-q)/(q+\beta-y_1)=q/(y_1-\beta)=(x_1-\alpha)/q,$$

vermöge welcher die Gleichung 54) übergeht in

57) $$\chi_1 \overset{\text{I)}}{=} \frac{y_1(x_1-\alpha)}{pq} \overset{\text{II)}}{=} \frac{pq}{x_1(y_1-\beta)}.$$

Ganz analog erhält man ausgehend von den Gleichungen 44)—51)

58) $$\chi_2 \overset{\text{I)}}{=} \frac{y_2(x_2-\alpha)}{pq} \overset{\text{II)}}{=} \frac{pq}{x_2(y_2-\beta)}.$$

Multiplicirt man 57, I) mit 58, II) oder 57, II) mit 58, I), so erhält man

59) $$\chi_1\chi_2=\frac{y_1(x_1-\alpha)}{x_2(y_2-\beta)} \quad \text{oder} \quad \chi_1\chi_2=\frac{y_2(x_2-\alpha)}{x_1(y_1-\beta)},$$

was, da nach den Gleichungen 48)—51) $x_1y_1=x_2y_2$, $\alpha y_1=\beta x_2$ und $\alpha y_2=\beta x_1$ ist, auf

60) $$\chi_1\cdot\chi_2=1$$

führt. Diese Gleichung lehrt, dass die chromatischen Vergrösserungen der Bilder zweier coordinirter isotopischer Punkte eines Systems reciprok sind.

Hiermit ist die Analogie zwischen den isometrischen (isogonalen) und isotopischen Punkten einerseits und den tautometrischen (tautogonalen) und tautotopischen Punkten andererseits vollständig durchgeführt. Was für die erstgenannten Punkte betreffs der gegenfarbigen Bilder eines Objects hier bewiesen wurde, das gilt bekanntlich auch für die letztgenannten Punkte betreffs des Objects und seines Bildes bei einer Farbe.

Dritter Abschnitt.

Zwei verschiedenfarbige gleich grosse Bilder in einer Ebene.

11. Das vollständig achromatische System im Allgemeinen. Ein dioptrisches System kann, wie § 4 gezeigt wurde, abgesehen von dem Falle, wo sowohl ΔF, als auch Δh oder $\Delta h'=0$ ist, nicht mehr als zwei dichromatisch-isometrische Punkte haben. Jeder derselben ist zwar mit zwei gegenfarbigen Bildpunkten conjugirt, jedoch bleibt es dabei möglich, dass Systeme bestehen, in welchen die beiden gegenfarbigen Conjuncte eines isometrischen Punktes coincidiren. In diesem Falle wird aber letzterer Coincidenzpunkt selbst zum zweiten isometrischen Punkte, dessen gegenfarbige Conjuncte in dem ersten isometrischen Punkte coincidiren. Folglich kann für ein dioptrisches System höchstens ein Paar Ebenen die

Eigenschaft haben, dass ein Object in der einen zweien farbigen unter sich gleich grossen Bildern in der andern conjugirt ist. Selbiges Paar ist demgemäss dann auch ein Paar isotopischer Ebenen, und zwar von der chromatischen Vergrösserung Eins. Wäre in diesem Falle noch ein zweites Paar isotopischer Ebenen vorhanden, so müsste nach § 10 Gleichung 60) die chromatische Vergrösserung daselbst ebenfalls gleich Eins sein, d. h. es wäre auch noch ein zweites Paar isometrischer Ebenen vorhanden. Da dies aber dem eben Geschlossenen widerspricht, so folgt der Satz:

Wenn in zwei durch ein dioptrisches System conjugirten Ebenen die gegenfarbigen Bilder sich decken, so existirt weder ein zweites Paar derselben Art, noch ein Paar Ebenen von der Art, dass einem Objecte in der einen zwei ungleich grosse gegenfarbige Bilder in der andern conjugirt sind.

Damit nun überhaupt zwei gegenfarbige Bilder zur Deckung gelangen, ist nur erforderlich, dass die von einem ursprünglich gemischten Centralstrahle herrührenden zerstreuten gegenfarbigen Theile auf der letzten Fläche sich treffen und dass die Krümmung dieser Fläche den beiden gegenfarbigen Austrittsstrahlen ein und dieselbe Richtung verleiht, sie also als einen einzigen Strahl austreten lässt. Dass dies mit Einer Linse nicht zu erreichen ist, liegt auf der Hand. Doch spricht vorläufig Nichts dagegen, den Erfolg mit zwei Linsen von einer Glassorte zu erzielen. So erhellt aus Fig. 5, dass, wenn dort die zweite Linse so dick genommen wird, dass der Schnittpunkt der Strahlen $\bar{e}_3\bar{v}_4$ und $\breve{e}_3\breve{v}_4$ in die letzte plane Fläche zu liegen kommt, dass dann nach der letzten Brechung beide Strahlen als ein einziger austreten, mithin zwei sich deckende Bilder geliefert werden. Indessen würde eine so bedeutende Dicke der Linse derartige andere Nachtheile im Gefolge haben, dass man auf die Anwendung dieser Methode in der Praxis verzichtet und sich darauf beschränkt, zwei verschieden stark zerstreuende Mittel zu combiniren.

12. Achromatische Combination für einen endlichen Objectabstand. Mikroskop-Objectiv. Angenommen, die beiden Mittel bestehen aus Kronglas und Flintglas mit ihren resp. gegenfarbigen Brechungsquotienten n_1, $\breve{n}_1$ und $\bar{n}_2$, $\breve{n}_2$, es seien der Abstand des Strahlpunktes, beide Krümmungshalbmesser und die Dicke der ersten (Kronglas-) Linse gegeben, auch werde die Endfläche derselben von der Vorderfläche der Flintglaslinse vollständig berührt: so wird auch schon über die Dicke und den Endhalbmesser der Flintglaslinse, sowie über den Abstand des Bildes verfügt sein. Denn die (Fig. 13) in ε_1 auf O_1 eingefallenen und dort divergent gewordenen gegenfarbigen Theile des Strahls werden bei der zweiten Brechung aus Kronglas in Flintglas in $\bar{\varepsilon}_2$ und $\breve{\varepsilon}_2$ auf O_2 (bei geeigneter Krümmung dieser Fläche) wieder convergent und bestimmen durch die Lage ihres Schnittpunktes ε_3 den Ort der Endfläche O_3. Be-

zeichnet man mit $\bar a_2$ und $\breve a_2$ die Abstände der durch die zweite Brechung entworfenen Bilder von der Endfläche O_3, so ergiebt sich der Halbmesser r_3 dieser aus der Gleichung 6a), § 1 oder 35), § 6, deren jede bei $d=0$ in

$$61) \qquad r_3 = \frac{(\breve n_2 - \bar n_2)\,\breve a_2 \bar a_2}{\breve n_2 \bar a_2 - \bar n_2 \breve a_2}$$

übergeht. Hiermit ist dann auch der mit a_0 für die beiden Farben conjugirte Punkt a_3 bestimmt, und wie aus dem Satze § 10 erhellt, sind dann a_0 und a_3 die einzigen durch dieses System für beide Farben zugleich conjugirten Punkte (Ebenen) mit gleicher Grösse der gegenfarbigen Bilder.

Um diese Beziehungen graphisch deutlich und richtig darzustellen, sind folgende exorbitant differente, resp. hohe Brechungsquotienten für die beiden Mittel angenommen: $\bar n_1 = 1{,}5$, $\breve n_1 = 1{,}6$ für Kronglas und $\bar n_2 = 1{,}7$, $\breve n_2 = 1{,}9$ für Flintglas. Befindet sich der Strahlpunkt a_0 alsdann im Abstande 630 vor o_1 und ist $r_1 = 90$, $d_1 = 10$, $r_2 = -40$, so berechnen sich Dicke der Flintglaslinse $d_1 = o_2 o_3 = 760/89$, Endhalbmesser $r_3 = -1316160/8633$ und Abstand des zu a_0 conjugirten Punktes a_3 von o_1 weg $o_1 a_3 = 52650/181$. Dieses Conjunctpaar, die Scheitelpunkte und die Fundamentalpunkte liegen dann in folgender Reihe:

$$a_0 \quad \breve f \bar f \quad o_1 \quad \breve h \bar h \quad o_2 \quad \bar h' \breve h' \quad o_3 \quad \bar f' \breve f' \quad a_3$$

und man erhält die Abstände

$$\begin{array}{rcl}
\breve f o_1 = 190{,}707\ 220 & & o_1 \breve f' = 205{,}066\ 274 \\
o_1 \breve h = 3{,}455\ 334 & & o_1 \breve h' = 10{,}903\ 720 \\
\hline
\breve f \breve h = 194{,}162\ 554 = & \breve F & = \breve h' \breve f' = 194{,}162\ 554 \\
\bar f o_1 = 190{,}258\ 271 & & o_1 \bar f' = 204{,}978\ 570 \\
o_1 \bar h = 4{,}102\ 714 & & o_1 \bar h' = 10{,}617\ 585 \\
\hline
\bar f \bar h = 194{,}360\ 985 = & \bar F & = \bar h \bar f' = 194{,}360\ 985,
\end{array}$$

$$\breve f o_1 - \bar f o_1 = 0{,}448\ 949 = \Delta f, \quad o_1 \bar h - o_1 \breve h = 0{,}647\ 380 = \Delta h,$$
$$o_1 \breve f' - o_1 \bar f' = 0{,}087\ 704 = \Delta f', \quad o_1 \breve h' - o_1 \bar h' = 0{,}286\ 135 = \Delta h',$$
$$\bar F - \breve F = 0{,}198\ 431 = \Delta F.$$

Es coincidiren also weder gegenfarbige Brennpunkte, noch werden solche Brennweiten gleich. Dagegen lassen sich mittels dieser Werthe folgende bereits allgemein bewiesene Gesetze verificiren:

I. Weil a_0 und a_3 isometrische Punkte sind, so muss mit Rücksicht auf die Gleichungen 23), 24) für das vorliegende Beispiel sein

$$a_0 \bar h : a_0 \breve h = \bar h' a_3 : \breve h' a_3 = \bar F : \breve F, \quad a_0 \bar h : \bar h' a_3 = a_0 \breve h : \breve h' a_3 = \Delta h : \Delta h'.$$

II. Weil a_0 und a_3 isotopische Punkte sind, so folgt aus den Gleichungen 44), 45)

$$a_0\bar{f}.\bar{f}'a_3 = \bar{F}^2, \quad a_0\breve{f}.\breve{f}a_3 = \breve{F}^2.$$

III. Weil a_0 und a_3 sowohl isometrische als isotopische Punkte, d. h. wirkliche achromatische Conjuncte sind und kein anderes Paar dieser Art vorhanden ist, so dürfen die Gleichungen 44), 45) hier nur ein Wurzelpaar geben. Dieses findet statt, wenn der durch Gleichung 47) substituirte Werth w gleich Null ist.

Aus der Gleichung

62) $$w = \sqrt{(p^2 - q^2 + \alpha\beta)^2 - 4\alpha\beta p^2} = 0$$

folgt aber

63) $$\alpha\beta = (p - q)^2$$

oder gemäss der zuletzt gebrauchten graphischen Bezeichnung

64) $$\Delta f.\Delta f' = (\Delta F)^2,$$

was überall numerisch genau übereinstimmt.

Die Gleichung 64) zeigt am deutlichsten das charakteristische Merkmal eines vollkommen achromatischen Systems: Das Product der Aenderungen der Lage der Brennpunkte ist gleich dem Quadrate der Aenderung der Brennweite.

Man kann ein solches System von dem folgenden unterscheiden durch die Benennung: Mikroskop-Objectiv — natürlich nur in theoretischem Sinne, da die wirklichen Mikroskop-Objective aus mehreren derartigen Systemen bestehen.

Eine Zeichnung der hauptsächlichsten Strahlengänge im Mikroskop-Objectiv konnte bei den trotz der übertriebenen Dispersion verhältnissmässig sehr kleinen Aenderungen der Lage der Fundamentalpunkte nur stückweise wiedergegeben werden. Für Fig. 13 ist die Einheit des Horizontalmaassstabes 2 mm, und wenn man den oberen Theil der Figur um 298 mm höher stellt, so dass z. B. $e'_1 e_3$ 360 mm über der Axe liegt, so werden die verlängerten Geraden $\varepsilon_1 a_0$, $\varepsilon_3 a_3$, $e_1 f$, $e'_3 f'$ in den verhältnissmässig richtigen Abständen, z. B. $\varepsilon_1 a_0$ in 1260 mm vor o_1 die Axe treffen.

13. Achromatische Combination für einen unendlichen Objectabstand. Teleskop-Objectiv. Die Construction einer auf unendlichen Abstand des Objects zu achromatisirenden Kron-Flintglas-Combination folgt genau den in § 12 dargelegten Grundsätzen.* Fig. 14 zeigt den Durchgang axenparallel einfallender Centralstrahlen durch eine Doppellinse, zu welcher wieder die vorigen Brechungsquotienten, ferner $r_1 = 108$, $d_1 = 16$, $r_2 = -48$ angenommen sind. Demgemäss wird $d_2 = 75/7$ und $r_3 =$

* Diese sind natürlich für die Praxis nicht ohne Weiteres massgebend, da bei wirklich herzustellenden Combinationen die Aenderung der Dicke beider Gläser nach dem Rande hin oder der Einfluss der Kugelgestalt auf die chromatische Aberration berücksichtigt werden muss, daher die Flintglaslinse sich als dünner wie hier berechnet im Verhältniss zur Kronglaslinse herausstellt.

— 186,309. Dann coincidiren die gegenfarbigen zweiten Brennpunkte und Hauptpunkte $\bar{f}'$ mit $\breve{f}'$ und $\bar{h}'$ mit $\breve{h}'$, nicht aber $\bar{f}$ mit $\breve{f}$, auch nicht $\bar{h}$ mit $\breve{h}$. Es gelten also die Gleichungen

65) $$\Delta f' = 0,$$

66) $$\Delta F = 0,$$

67) $$\Delta f \gtrless 0,$$

und numerisch werden

$$\breve{f}o_1 = 233{,}223\ldots,\quad \bar{f}o_1 = 231{,}93\ldots,\quad o_1\breve{h} = 3{,}490\ldots,\quad o_1\bar{h} = 4{,}820\ldots,$$
$$o_1\breve{h}' = o_1\bar{h}' = 14{,}026\ldots,\quad o_1\bar{f}' = o_1\breve{f}' = 250{,}739\ldots,$$
$$\bar{F} = \breve{F} = 236{,}713\ldots,\quad \Delta f = \Delta h = 1{,}330\ldots.$$

Die Einheit des Horizontalmaassstabes der Zeichnung ist $1\frac{1}{4}$ mm, den oberen Theil derselben hat man sich um 252 mm erhöht zu denken, um die Lagen der Brennpunkte gemäss der Rechnung zu erhalten.

Bei einem achromatisirten Teleskop-Objectiv erscheint also der zweite Brennpunkt als zweiter isometrischer und zugleich als ein isotopischer Punkt. Denn man kann sich ja den Einfallsstrahl als von einem immerhin unendlich weit entfernten Punkte ausgegangen denken, der dann der gemeinsame Conjunct ist. Dies würde nach der Deduction des § 11 das Vorhandensein irgendwelcher anderer solcher Punkte ausschliessen, wenn nicht hier die dort aus § 4 übernommene Einschränkung aufträte, dass sowohl $\Delta h'$ als $\Delta f' = 0$ sind, also der Abstand des zweiten isometrischen Punktes von den zweiten Hauptpunkten nach den Gleichungen 21), 22)

$$\bar{\gamma}' = \frac{\bar{F}.\Delta h'}{\Delta F},\quad \breve{\gamma}' = \frac{\breve{F}.\Delta h'}{\Delta F}$$

in die Form 0/0 überginge. Dies führt mit den Orts- und Grössengleichungen des Systems zu dem Schlusse, dass jeder Punkt der Axe vermittelst der rückgehenden Strahlen zwei unter sich gleich grosse und um die Strecke $\Delta h'$ abstehende Bilder liefert. Also: Das vollständig achromatische Teleskop-Objectiv hat unendlich viele zweite isometrische Punkte.

Vierter Abschnitt.

Beziehungen der isotopischen Punkte dioptrischer Systeme zu deren Symptosen und Ersatzflächen.

14. Bestimmung der isotopischen Punkte eines Systems durch dessen Ersatzflächen. Ersatzlinse. Es ist unlängst auf analytischem Wege bewiesen worden*, dass man sämmtliche axialen Conjuncte einer Linse für

* Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. Bd. 16 S. 362 — 365.

eine Farbe in unveränderter Lage darstellen kann durch eine einzige Fläche, deren Scheitel- und Mittelpunkt die beiden Symptosen sind und deren Brechungsquotient gleich dem Verhältniss der Abstände der beiden Brennpunkte von einer Symptose ist. Es lässt sich aber von vornherein zeigen, dass dies für alle dioptrischen Systeme gilt und nur bei imaginärer Lage der Symptosen unverwerthbar wird.

Bei jedem dioptrischen System ist nämlich das Product aus den Abständen zweier conjugirten Punkte der Axe von ihren zugehörigen Brennpunkten constant. Da nun eine Symptose ihr eigener Conjunct ist, so genügen speciell die Orte der Brennpunkte und einer Symptose zur Bestimmung aller übrigen axialen Conjuncte desjenigen Systems, welchem sie angehören. Eine brechende Fläche aber, deren Scheitelpunkt oder deren Krümmungsmittelpunkt eine Symptose ist und deren Brennpunkte die jenes Systems sind, hat hierdurch mit demselben so viele Daten gemein, als zur Bestimmung aller übrigen axialen Conjuncte nöthig sind. Mithin müssen dann auch alle übrigen axialen Conjuncte der Fläche und des Systems übereinstimmen.

Es sei (Fig. 15) eine Linse mit den Flächen O_1, O_2, deren Scheitelpunkte o_1, o_2, Mittelpunkte c_1, c_2, und mit solchen Brechungsquotienten $\bar{n}$, $\breve{n}$ gegeben, dass die Brennpunkte nach $\bar{f}$, $\breve{f}$, $\bar{f}'$, $\breve{f}'$, die Symptosen nach $\bar{s}$, $\breve{s}$, $\bar{s}'$, $\breve{s}'$ fallen. Die Punkte $\bar{s}'$, $\breve{s}'$ sind in Fig. 15 nahe bei einander auf etwa $\frac{2}{3}$ der Strecke $c_1 o_2$ nachzutragen. Ein Paar isotopischer Punkte sei t_0 und t_2. Dann wird ein den Punkt t_0 auf dem Hinwege passirender Strahl, der in e_1 auf O_1 einfällt, dort in zwei gegenfarbige Strahlen zerlegt werden, die, nach $\bar{e}_2$ und $\breve{e}_2$ auf O_2 gelangt, dort weiter nach $\bar{e}_3$ und $\breve{e}_3$ so gebrochen werden, dass $\bar{e}_2\bar{e}_3$ und $\breve{e}_2\breve{e}_3$ nach t_2 convergiren. Stellt man nun eine Ersatzfläche, z. B. $\bar{S}$, deren Scheitelpunkt $\bar{s}$, Mittelpunkt $\bar{s}'$ und Brechungsquotient $\bar{\nu} = \bar{s}\bar{f}'/\bar{f}\bar{s}$ ist, so wird ein von e auf t_0 zu gerichteter, in $\bar{\varepsilon}$ auf $\bar{S}$ einfallender Strahl dort nach t_2 gebrochen werden. Stellt man dagegen die Ersatzfläche $\breve{S}$ mit dem Scheitel $\breve{s}$, Mittelpunkt $\breve{s}'$ und Brechungsquotient $\breve{\nu} = \breve{s}\breve{f}'/\breve{f}\breve{s}$, so muss ein auf dem vorigen Wege in $\breve{\varepsilon}$ auf $\breve{S}$ einfallender Strahl dort ebenfalls nach t_2 gebrochen werden.

Invertirt man aber den zuerst für $\bar{S}$ angenommenen Brechungsquotienten $\bar{\nu}$ in $\bar{\nu}' = \bar{f}\bar{s}/\bar{s}\bar{f}'$, während der von $\breve{S}$ ungeändert bleibt, und verbindet beide Flächen zu einem System, so wird ein auf der Geraden $\bar{e}\bar{\varepsilon}$ gegen t_2 gerichteter Strahl in $\bar{\varepsilon}$ nach $\breve{\varepsilon}$ auf $\breve{S}$, also gegen t_0, in $\breve{\varepsilon}$ aber wieder nach t_2 gebrochen werden. Der Punkt t_2 wird also dann zu einer Symptose eines aus den beiden Ersatzflächen $\bar{S}$ und $\breve{S}$ gebildeten Systems, das demgemäss „Ersatzlinse" genannt werden kann. Die beiderseits

diese Linse begrenzenden Mittel sind jedoch unter sich von ungleicher optischer Dichtigkeit.

Ebenso gut könnte man natürlich der Fläche $\bar{S}$ ihren ursprünglichen Brechungsquotienten belassen und den von $\breve{S}$ invertiren. Dann würde ein gegen t_0 gerichteter, von e nach $\bar{\varepsilon}$ gelangender Strahl hier nach $\breve{\varepsilon}'$ gegen t_2 und in $\breve{\varepsilon}'$ wieder nach t_0 gebrochen werden, und wäre t_0 die Symptose dieser zweiten Ersatzlinse. Für die erste Ersatzlinse kann man aber t_0 und für die zweite t_2 den „inneren Conjunct" der Symptose nennen. Also:

Ein Paar isotopischer Punkte eines Systems wird gebildet von einer Symptose und deren innerem Conjunct, beide gehörig zu einem System, das aus zwei gegenfarbigen Ersatzflächen des ursprünglichen Systems besteht mit der Abänderung, dass der Brechungsquotient einer der beiden Ersatzflächen invertirt wird.

Natürlich hat im Allgemeinen die sogenannte Ersatzlinse in jeder von beiden Versionen noch eine zweite Symptose, die auch nicht der innere Conjunct der ersten ist; also hat das ursprüngliche System dann auch noch ein zweites Paar isotopischer Punkte. Dieses, mit t'_0 und t'_2 zu bezeichnen, liegt bei den für Fig. 15 angenommenen Daten der ursprünglichen Linse, $r_1 = 2$, $r_2 = 1$, $d = 4$ (mm), $\bar{n} = 3/2$, $\breve{n} = 14/9$, so nahe an o_2 und noch näher unter sich zwischen s' und c_2, dass weder seine Lage, noch der bezügliche Strahlengang angedeutet werden konnte.

Wenn man nun die übrigen noch möglichen Combinationen von je zwei gegenfarbigen Ersatzflächen, deren jede in zwei Versionen bestehen kann, noch sechs andere, im Ganzen also acht Ersatzlinsen aufzustellen vermag, so liefert doch jedes derartige Flächenpaar, wie auch ohne besondern Beweis aus der Natur der Gleichungen 44), 45), (§ 9) einleuchten wird, immer wieder die nämlichen zwei Paare isotopischer Punkte, welche nur unter Umständen, wie sie der besondere Fall des § 12 mit sich bringt, zu einem Paare coincidirt, sonst aber auch eine imaginäre Lage erhalten kann.

15. Besondere Eigenschaften der Ersatzlinsen von mehr oder weniger vollkommen achromatischen Systemen. Die soeben als ausführbar gezeigte Methode, die isotopischen Punkte eines Systems zu finden, indem man die Symptosen desselben ermittelt, daraus eine Ersatzlinse bildet und die Symptosen der letzteren aufsucht, würde in der That graphisch nur ein unsicherer, arithmetisch ein weiter Umweg sein. Immerhin kann sie behufs theoretischer Vergleichung dioptrischer Systeme von verschiedenen Graden der Achromasie einigen Nutzen gewähren.

So erhält man darnach aus einem System mit zwei coincidirenden gegenfarbigen Brennpunkten, wie sie in § 7 behandelt wurden, bei vier

von acht möglichen Combinationen je eine Ersatzlinse, von welcher der zweite Brennpunkt der ersten Fläche mit dem ersten Brennpunkte der zweiten Fläche coincidirt, also ein teleskopisches System. Während in dem ursprünglichen System der gemeinschaftliche Brennpunkt und sein im Unendlichen liegender Conjunct zusammen ein Paar isotopischer Punkte ausmachen, also noch ein zweites vorhanden ist, besteht letzteres in den gedachten vier Fällen dann aus der einzigen im Endlichen liegenden Symptose der Ersatzlinse (teleskopisches System) und deren innerem Conjunct. Man bemerkt eben bei dieser Gelegenheit, dass, wie bisher wohl kaum beachtet worden ist — mit Ausnahme eines noch zu besprechenden Falles —, ein teleskopisches System stets eine im Endlichen liegende Symptose* hat, während die andere nebst sämmtlichen sonstigen Fundamentalpunkten — über deren relative Lage man jedoch aus der Natur des Systems Aufschluss erhalten kann — im Unendlichen liegen.

Sind nämlich (Fig. 16) ω_1 und ω_2 die Scheitelpunkte der Flächen einer Ersatzlinse, φ_1, φ'_1 und φ_2, φ'_2 deren Flächenbrennpunkte, so ist dieselbe bekanntlich teleskopisch, wenn, wie die Figur bei negativem Φ_2 darstellt,

$$68)\qquad \omega_1\omega_2 = \Phi'_1 + \Phi_2$$

ist, also φ'_1 und φ_2 coincidiren. Bezeichnet man den Abstand $\varphi_1\varphi'_2$ durch K, den Abstand einer Symptose σ hinter φ'_2 mit x, also hinter φ_1 mit $x+K$, den ihres inneren Conjuncts α vor φ_2, also auch vor φ'_1 mit y, so ist zufolge Ortsgleichung

$$69)\qquad (x+K)\,y = \Phi_1 . \Phi'_1,$$

$$70)\qquad xy = \Phi_2 . \Phi'_2,$$

woraus

$$71)\qquad x = \frac{\Phi_2 . \Phi'_2 . K}{\Phi_1 . \Phi'_1 - \Phi_2 . \Phi'_2}$$

resultirt. In der Figur ist numerisch $\varrho_1 = 21$, $\nu_1 = 3/2$, $\delta = 35$, $\nu_2 = 3/4$, $\varrho_2 = 7$ angenommen, demgemäss $x = 16$.

Die Gleichung 71) lehrt, dass, wenn $\Phi_1 . \Phi'_1 = \Phi_2 . \Phi'_2$ ist, $x = \infty$ wird. D. h.: Wenn bei dem ursprünglichen System, das wir uns aus Linsen mit Luft umgeben bestehend denken, nicht nur zwei gegenfarbige Brennpunkte coincidiren, sondern auch zwei gegenfarbige Brennweiten gleich werden, also $\bar{F} = \breve{F}$ und auch, weil $\bar{F}^2 = \Phi_1 . \Phi'_1$ und $\breve{F}^2 = \Phi_2 . \Phi'_2$, mithin $\Phi_1 . \Phi'_1 = \Phi_2 . \Phi'_2$, so liegen beide Symptosen der Ersatzlinse im Unendlichen. Diese ist also dann noch ein teleskopisches

* Die Ersatzfläche eines teleskopischen Systems ist eine durch die Symptose gelegte Ebene, deren Brechungsquotient gleich der Elongation des Systems.

System besonderer Art, nämlich ein solches, dessen **Elongation gleich Eins** ist — nicht auch dessen Vergrösserung. Denn die Elongation — kurz definirt: die relative Geschwindigkeit, mit welcher sich Object und Bildpunkt auf der Axe bewegen — ist nur speciell bei den Systemen mit gleichem Anfangs- und Endmittel gleich dem Quadrate der Vergrösserung, allgemeiner gleich dieser Grösse, multiplicirt mit dem Product aus den Brechungsquotienten sämmtlicher Flächen oder mit dem Quotienten aus den Dichtigkeiten des Anfangs- und Endmittels.

Schliesslich verdient noch die Eigenschaft der Ersatzlinse hervorgehoben zu werden, die dem achromatischen Mikroskop-Objectiv (§ 12) entspricht. Sie ist weder ein teleskopisches System, noch hat sie coincidirende Brennpunkte oder gleiche Brennweiten, wohl aber **zwei im Endlichen coincidirende Symptosen**. Wenn nämlich — um, wie in § 12, von einem dreiflächigen System auszugehen — a_0 ein Strahlpunkt und a_3 dessen Conjunct für zwei Farben ist, diese beiden aber zugleich die einzigen ihrer Art sind, so wird bei vier Ersatzlinsen des Systems a_0 Symptose und a_3 ihr innerer Conjunct, bei den vier übrigen a_3 Symptose und a_0 deren innerer Conjunct.

Da dies apagogisch sich leicht nachweisen lässt, so möge folgendes Beispiel zur Erläuterung genügen. Man denke sich ein dem Mikroskop-Objectiv analog gebildetes System, dessen Fundamentalpunkte (Fig. 17) so liegen, dass $\varDelta f = 4$, $\varDelta f' = 1$, $\breve{F} = 50$, $\bar{F} = 52$, $\breve{f}\breve{f}' = 125$, also die Bedingungsgleichung 64): $\varDelta f . \varDelta f' = (\varDelta F)^2$ erfüllt ist. Die Gleichungen 46)—51) liefern alsdann $x_1 = x_2$, $a\breve{f} = 100$, $y_1 = y_2 = \breve{f}'b = 25$. Der in § 14 beschriebene Weg dagegen giebt die Lage der Symptosen $\breve{f}\breve{s} = 25$, $\breve{f}\breve{s}' = 100$, $\bar{f}\bar{s} = 60 - 8\sqrt{14}$, $\bar{f}\bar{s}' = 60 + 8\sqrt{14}$. Nimmt man hiernach die Ersatzlinse mit den Scheitelpunkten $\breve{s}$, $\bar{s}$ und den Mittelpunkten $\breve{s}'$, $\bar{s}'$, demgemäss für $\breve{s}$ den Brechungsquotienten $\breve{\nu} = 100/25 = 4$ und für $\bar{s}$ den invertirten $\bar{\nu}' = (60 - 8\sqrt{14})/(60 + 8\sqrt{14})$, so werden, die Hauptpunkte der Ersatzlinse durch η bezeichnet, wie Fig. 18 in kleinerem Maassstabe zeigt, $\varphi'\breve{f} - 2700$, $\breve{f}\varphi = 2500$, also $\varphi'\varphi = 5200$, während $\varphi'\eta' = \varPhi' = 6000 - 800\sqrt{14}$, $\eta\varphi = \varPhi = 1500 + 200\sqrt{14}$, also $\varPhi . \varPhi' = 6760000 = 2600^2$, der Abstand der Symptosen der Ersatzlinse vom ersten Brennpunkte $\varphi\sigma = \varphi\sigma' = 2600$, also nur eine Symptose, und der Abstand des innern Conjunctes dieser Symptose vom zweiten Brennpunkte $\sigma_1\varphi' = 2400$, also coincidiren σ mit a und σ_1 mit b.

Es lassen sich also folgende Sätze aufstellen:

I. **Die halbe Anzahl der Ersatzlinsen eines Systems mit zwei coincidirenden gegenfarbigen Brennpunkten sind je ein teleskopisches System, dessen Elongation gleich ist der**

chromatischen Vergrösserung für den gemeinschaftlichen Brennpunkt des ursprünglichen Systems. Eine Symptose der Ersatzlinse liegt im Endlichen, die andere im Unendlichen.

II. Die halbe Anzahl der Ersatzlinsen eines vollkommen achromatischen Teleskop-Objectivs sind je ein teleskopisches System von der Elongation Eins. Beide Symptosen der Ersatzlinsen liegen (getrennt) im Unendlichen.

III. Sämmtliche Ersatzlinsen eines vollkommen achromatischen Mikroskop-Objectivs sind je ein System mit einer einzigen Symptose, d. h. die beiden Symptosen der Ersatzlinse coincidiren im Endlichen.

Wiesbaden, im Juni 1883.

II.

Ueber Länge und Vergrösserung, Helligkeit und Gesichtsfeld des Kepler-, Ramsden- und Campani-Fernrohrs.

Von

Dr. C. Bohn

in Aschaffenburg.

Hierzu Taf. III Fig. 1—3.

Welches Ocular ist am vortheilhaftesten für ein Fernrohr, das zu messenden Beobachtungen aus endlicher Entfernung dienen soll?

Was ich hierüber in den ausführlicher vom Fernrohr handelnden Lehr- und Handbüchern der Geodäsie gefunden habe, scheint mir nicht ganz zu genügen und namentlich halte ich die Zusammenstellung der Vorzüge und Nachtheile der verschiedenen Oculare einer Verbesserung fähig. Die genauere Prüfung der Frage nöthigt die Länge, Vergrösserung, Helligkeit und das Gesichtsfeld der Fernrohre mit gleichem Objectiv, aber verschiedenen Ocularen näher zu untersuchen, als in den Werken der allgemeinen Physik oder auch der Optik zu geschehen pflegt. Dort wird fast ausschliesslich der Fall unendlicher Entfernung des Gegenstandes und unendlicher Sehweite des Beobachters betrachtet. So weit mir bekannt, ist der Einfluss, den verschiedene Entfernung des angeblickten Gegenstandes, verschiedene Sehweite, verschiedener Abstand des Auges hinter dem Ocular äussern, am eingehendsten besprochen in meinen „Ergebnissen physikalischer Forschung" (Leipzig 1878). Immerhin empfiehlt sich eine weitere Annäherung in den Formeln für die Vergrösserung und eine Ausdehnung der Untersuchung.

Die Hauptgegenstände dieser Abhandlung sind in der Ueberschrift genannt. Die Vergleichung der verschiedenen Oculare hinsichtlich der mehr oder minder ausreichenden Unschädlichmachung der sphärischen und der chromatischen Aberration wird erst am Schlusse zur Sprache kommen; sie lässt sich nicht so allgemein und zahlengemäss durchführen, wie die Vergleichungen hinsichtlich Länge, Vergrösserung, Helligkeit und Gesichtsfeld.

Ausser den hier betrachteten zusammengesetzten Ocularen, dem Ramsden'schen und dem Campani'schen (oder Huyghens'schen)

kommen noch einige andere vor, namentlich das von Kellner erfundene „orthoskopische“ und Steinheil's „achromatisches Doppelocular“. Einerseits ist deren Einrichtung nicht ausreichend bekannt und höchst wahrscheinlich im Einzelnen von der Glassorte abhängig, andererntheils unterscheiden sie sich von den besprochenen nur in solchen Beziehungen, die wenigstens für den Hauptheil dieser Abhandlung nicht in Betracht kommen. Soviel ich erfahren konnte, gehört Steinheil's achromatisches Doppelocular in die Kategorie der positiven Oculare (wie das Ramsden). Das orthoskopische Ocular, wie es sein Erfinder Kellner ausführte, war ein positives, hingegen wurden von Kellner's Geschäftsgenossen und Nachfolger Hensoldt unter der Bezeichnung orthoskopisch auch solche Oculare angefertigt, die in die Classe der negativen (wie das Campani) gehören.

Die seiten der Praxis auf die oben gestellte Frage gegebene Antwort, wie ich sie durch statistische Erhebungen zu ermitteln bemüht war, stimmt nicht überein mit dem Schlusse, zu welchem die theoretische Betrachtung führt.

A. Länge und Vergrösserung.

Unter der (linearen) Vergrösserung eines Fernrohrs ist zu verstehen das Verhältniss der Winkel, unter welchen eine bestimmte Länge eines Gegenstandes durch das Fernrohr gesehen und bei Betrachtung mit unbewaffnetem Auge erscheint. Statt dieses Verhältnisses kann man, wie es nachfolgend geschieht, unbedenklich jenes der trigonometrischen Tangenten nehmen. Dadurch wird die Vergrösserung der Quotient zweier Verhältnisse, nämlich des Verhältnisses der Grösse β des virtuellen, in der deutlichen Sehweite d vor dem Auge entstehenden Bildes zu dieser Sehweite oder Accomodationsdistanz, also $\frac{\beta}{d}$, und des Verhältnisses der Länge γ des Gegenstandes zu dem Abstande desselben vom Auge, welcher besteht aus der Enfernung G des Gegenstandes vom Objectiv, der Länge l des Fernrohres und der Entfernung e, in welcher das Auge hinter dem Ocular gehalten wird, also $\frac{\gamma}{G+l+e}$. Demnach ist die Vergrösserung:

$$V = \frac{\beta}{d} : \frac{\gamma}{G+l+e} = \frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{G+l+e}{d}. \tag{1}$$

Die Berechnung des ersten Verhältnisses führt die Gegenstandsweite und die Brennweiten von Ocular und Objectiv ein, ferner treten diese Grössen auch in dem Ausdrucke für l ein; man erkennt daher:

Die Vergrösserung eines jeden Fernrohrs hängt ab von den Brennweiten der dasselbe zusammensetzenden Linsen, ferner von der Entfernung des angeblickten Gegenstandes, von der Weite, auf welche der Beobachter sein Auge accomodirt hat, und der Entfernung, in welcher er es hinter dem Ocular hält.

Kepler-Fernrohr.

Das Ocular besteht aus einer einfachen Linse von der Brennweite f. Statt des Verhältnisses $\frac{\beta}{\gamma}$ setze man $\frac{\beta}{\beta_1}\cdot\frac{\beta_1}{\gamma}$, wo β_1 die Grösse des reellen Bildes ist, das vom Objectiv (dessen Brennweite F sei) entworfen wird.

Nach der bekannten dioptrischen Hauptformel findet man

$$\frac{\beta}{\beta_1}=\frac{f+d-e}{f} \quad \text{und} \quad \frac{\beta_1}{\gamma}=\frac{F}{G-F}.$$

Diese Werthe in 1) eingesetzt, erhält man:

$$2) \qquad V_K=\frac{F}{f}\cdot\frac{G+l+e}{G-F}\cdot\frac{f+d-e}{d}.$$

Die in diesem Ausdruck noch enthaltene Fernrohrlänge l ist gleich dem Abstande des reellen Bildes vom Objectiv, $B=\frac{GF}{G-F}$, vermehrt um die Entfernung des Augenglases vom reellen Bilde, $\frac{f(d-e)}{f+d-e}$; somit die Fernrohrlänge:

$$3) \qquad l_K=\frac{GF}{G-F}+\frac{f(d-e)}{f+d-e}.$$

Für unendlich fernen Gegenstand wird:

$$l_K=F+\frac{f(d-e)}{f+d-e} \quad (G=\infty).$$

Für unendlich weitsichtiges Auge wird:

$$l_K=\frac{GF}{G-F}+f \quad (d=\infty).$$

Für unendliche Gegenstandsweite und Accomodation auf unendliche Entfernung wird:

$$l_K=F+f \quad (G=\infty \text{ und } d=\infty).$$

Setzt man den Werth von l_K aus Formel 3) in den Ausdruck 2) für die Vergrösserung, so erhält man den genauen Ausdruck:

$$4\alpha) \qquad V_K=\frac{F}{f}\cdot\left(\frac{G}{G-F}\right)^2\cdot\frac{f+d-e}{d}+\frac{F}{f}\cdot\frac{fd+e(d-e)}{d(G-F)}.$$

Das zweite Glied ist klein im Verhältniss zum ersten; man kann es, wenn man sich mit einer Annäherung begnügen will, fortlassen und erhält dann:

4β) $$V_K = \frac{F}{f} \cdot \left(\frac{G}{G-F}\right)^2 \cdot \frac{f+d-e}{d}.$$

Eine andere Annäherungsformel findet man durch die bequeme Annahme, die Entfernung des Gegenstandes vom Auge sei gleich jener vom Objectiv zu nehmen, also durch Vernachlässigung von $l+e$ gegen G. Diese Annahme liefert:

4γ) $$V_K = \frac{F}{f} \cdot \frac{G}{G-F} \cdot \frac{f+d-e}{d}.$$

Aus der genauen Formel 4α) erschliesst man die Sonderfälle:

für unendlich fernen Gegenstand:

$$V_K = \frac{F}{f} \cdot \frac{f+d-e}{d} \quad (G=\infty);$$

für unendliche Sehweite:

$$V_K = \frac{F}{f} \cdot \left(\frac{G}{G-F}\right)^2 + \frac{F}{f} \cdot \frac{f+e}{G-F} \quad (d=\infty);$$

für unendliche Gegenstandsweite und unendliche Sehweite:

$$V_K = \frac{F}{f} \quad (G=\infty \text{ und } d=\infty).$$

Der Einfluss, den die Gegenstandsweite auf die Vergrösserung ausübt, dann der Grad der Abweichung der Annäherungs- von der genaueren Formel wird leicht aus folgenden ausgerechneten Beispielen ersichtlich.

Zahlenbeispiele für Vergrösserung und Länge des Kepler-Fernrohrs.

I. $F = 30$ cm, $f = 2$ cm, $d = 20$ cm, $e = 1$ cm.

		α) 15,7599,	
$G = 1000$ m,	$V_K =$	β) 15,7595,	$l_K = 31{,}82$ cm;
		γ) 15,7547,	
		α) 15,8494,	
$G = 100$ m,	$V_K =$	β) 15,8449,	$l_K = 31{,}91$ cm;
		γ) 15,7974,	
		α) 16,2790,	
$G = 20$ m,	$V_K =$	β) 16,2334,	$l_K = 32{,}27$ cm;
		γ) 15,9899,	

$G = \infty$, $d = \infty$, $V_K = 15$, $l_K = 32$ cm.

II. $F = 40$ cm, $f = 1$ cm, $d = 20$ cm, $e = 0{,}5$ cm.

		α) 41,0334,	
$G = 1000$ m,	$V_K =$	β) 41,0328,	$l_K = 40{,}97$ cm;
		γ) 41,0164,	
		α) 41,3360,	
$G = 100$ m,	$V_K =$	β) 41,3300,	$l_K = 41{,}11$ cm;
		γ) 41,1647,	

$$G = 20\text{ m}, \quad V_K = \begin{matrix} \alpha)\ 42{,}7209, \\ \beta)\ 42{,}6905, \\ \gamma)\ 41{,}8367, \end{matrix} \quad l_K = 41{,}76\text{ cm};$$

$$G = \infty, \quad d = \infty, \quad V_K = 40, \quad l_K = 41\text{ cm}.$$

Ramsden-Fernrohr.

Die Brennweite des Augenglases sei f, dann ist die des Collectivglases $\frac{9}{5}f$ und der Abstand beider Linsen $\frac{4}{5}f$. Das reelle Bild entsteht vor dem Collectiv in einer Entfernung g_1 und das Collectiv entwirft davon ein virtuelles Bild in der Entfernung b_1 vor dem Collectiv. Dieses virtuelle Bild wird durch das Augenglas wie durch eine Lupe betrachtet, muss also nach der Theorie der Lupe vor derselben im Abstande $\frac{f(d-e)}{f+d-e}$ liegen. Mit Zuziehung von

$$\frac{1}{g_1} - \frac{1}{b_1} = \frac{5}{9f}$$

findet man

$$g_1 = \frac{9fb_1}{5b_1 + 9f}$$

und da

$$b_1 = \frac{f(d-e)}{f+d-e} - \frac{4}{5}f = \frac{f}{5} \cdot \frac{d-e-4f}{f+d-e},$$

so ergiebt sich:

$$g_1 = \frac{9}{25}f\frac{d-e-4f}{f+2(d-e)}.$$

Die Länge des Ramsden-Fernrohrs ist aber gleich dem Abstande des reellen Bildes vom Objectiv, vermehrt um dessen Entfernung vom Collectiv und den Abstand zwischen Collectiv und Augenglas. Die Werthe einsetzend, erhält man:

$$5) \qquad l_R = \frac{GF}{G-F} + \frac{f}{25}\,\frac{49(d-e) - 16f}{2(d-e)+f}.$$

Im Besondern:

für unendlich fernen Gegenstand:

$$l_R = F + \frac{f}{25}\,\frac{49(d-e) - 16f}{2(d-e)+f} \quad (G = \infty);$$

für unendliche Sehweite:

$$l_R = \frac{GF}{G-F} + \frac{49}{50}f \quad (d = \infty);$$

für unendliche Gegenstandsweite und Accomodation auf parallele Strahlen:

$$l_R = F + \frac{49}{50}f \quad (G = \infty \text{ und } d = \infty).$$

Um die Vergrösserung zu erhalten, ersetze man in Formel 1) das Verhältniss $\frac{\beta}{\gamma}$ durch $\frac{\beta}{\beta_2} \cdot \frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot \frac{\beta_1}{\gamma}$, wobei β wieder die Grösse des durch

das zusammengesetzte Ocular gesehenen virtuellen Bildes bedeutet, β_1 die Grösse des vom Objectiv entworfenen reellen Bildes und β_2 die Grösse des virtuellen Bildes, welches von diesem reellen das Collectiv allein entwirft. Beachtend, dass:

$$\frac{\beta}{\beta_2} = \frac{f+d-e}{f}, \quad \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{b_1}{g_1}, \quad \frac{\beta_1}{\gamma} = \frac{F}{G-F},$$

erhält man (die oben aufgestellten Werthe für b_1 und g_1 benützend):

$$6) \qquad V_R = \tfrac{5}{9} \cdot \frac{F}{f} \cdot \frac{G+l+e}{G-F} \cdot \frac{f+2(d-e)}{d}.$$

Und setzt man hierin den Werth für l, wie ihn Formel 5) angiebt, so erhält man nach einigen Zusammenziehungen die genaue Formel:

$$7\alpha) \quad V_R = \tfrac{5}{9} \cdot \frac{F}{f} \cdot \left(\frac{G}{G-F}\right)^2 \cdot \frac{f+2(d-e)}{.d} + \frac{F}{f} \cdot \frac{49fd+50e(d-e)-16f^2-24fe}{45d(G-F)}.$$

Durch Weglassung des verhältnissmässig kleinen zweiten Gliedes erhält man die erste Annäherung:

$$7\beta) \qquad V_R = \tfrac{5}{9} \cdot \frac{F}{f} \cdot \left(\frac{G}{G-F}\right)^2 \cdot \frac{f+2(d-e)}{d}.$$

Die bequeme Vernachlässigung von $l+e$ gegen G hingegen giebt in zweiter Annäherung:

$$7\gamma) \qquad V_R = \tfrac{5}{9} \cdot \frac{F}{f} \cdot \frac{G}{G-F} \cdot \frac{f+2(d-e)}{d}.$$

Aus dem genauen Ausdrucke 7α) folgen die Sonderfälle:

für unendlich fernen Gegenstand:

$$V_R = \tfrac{5}{9} \cdot \frac{F}{f} \cdot \frac{f+2(d-e)}{d} \quad (G=\infty);$$

für unendliche Sehweite:

$$V_R = \tfrac{10}{9} \cdot \frac{F}{f} \cdot \left(\frac{G}{G-F}\right)^2 + \frac{F}{f} \cdot \frac{49f+50e}{45(G-F)} \quad (d=\infty);$$

für unendlich fernen Gegenstand bei Accomodation auf parallele Strahlen:

$$V_R = \tfrac{10}{9} \cdot \frac{F}{f} \quad (G=\infty \text{ und } d=\infty).$$

Zahlenbeispiele für Vergrösserung und Länge des Ramsden-Fernrohrs.

I. $F=30$ cm, $f=2$ cm, $d=20$ cm, $e=1$ cm.

		α) 16,6771,	
$G=1000$ m,	$V_R=$	β) 16,6767,	$l_R=31{,}81$ cm;
		γ) 16,6717,	
		α) 16,7718,	
$G=100$ m,	$V_R=$	β) 16,7671,	$l_R=31{,}99$ cm;
		γ) 16,7168,	

$$G = 20\ \text{m}, \quad V_R = \begin{matrix} \alpha)\ 17{,}2018, \\ \beta)\ 17{,}1782, \\ \gamma)\ 16{,}9205, \end{matrix} \quad l_R = 32{,}43\ \text{cm};$$

$$G = \infty, \quad d = \infty, \quad V_R = 16{,}6667, \quad l_R = 31{,}96\ \text{cm}.$$

II. $F = 40$ cm, $f = 1$ cm, $d = 20$ cm, $e = 0{,}5$ cm.

$$G = 1000\ \text{m}, \quad V_R = \begin{matrix} \alpha)\ 44{,}4615, \\ \beta)\ 44{,}4609, \\ \gamma)\ 44{,}4475, \end{matrix} \quad l_R = 40{,}95\ \text{cm};$$

$$G = 100\ \text{m}, \quad V_R = \begin{matrix} \alpha)\ 44{,}7084, \\ \beta)\ 44{,}7020, \\ \gamma)\ 44{,}5680, \end{matrix} \quad l_R = 41{,}06\ \text{cm};$$

$$G = 20\ \text{m}, \quad V_R = \begin{matrix} \alpha)\ 45{,}8303, \\ \beta)\ 45{,}7979, \\ \gamma)\ 45{,}1109, \end{matrix} \quad l_R = 41{,}55\ \text{cm};$$

$$G = \infty, \quad d = \infty, \quad V_R = 44{,}4444, \quad l_R = 40{,}98\ \text{cm}.$$

Campani-Fernrohr.

Die Brennweite des Augenglases sei f, dann ist die des Collectivglases $3f$ und der Abstand beider Linsen $2f$. Das reelle Bild entsteht zwischen dem Collectiv und dem Augenglase, und da es nach der Lupentheorie um $\frac{f(d-e)}{f+d-e}$ vor dem Augenglase liegen muss (damit das virtuelle Bild in der Entfernung d vom Auge oder $d-e$ vor dem Augenglase entstehe), so liegt es um

$$2f - f\frac{d-e}{f+d-e} = f\frac{2f+d-e}{f+d-e} = b_1$$

hinter dem Collectiv und die aus dem Objectiv tretenden Strahlen convergiren also gemäss der Linsenformel

$$-\frac{1}{g_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{3f}$$

nach einer Ebene, die um g_1

$$g_1 = 3f \cdot \frac{2f+d-e}{f+2(d-e)}$$

hinter dem Collectiv liegt.

Die Länge des Campani-Fernrohres ist gleich der Entfernung, in welcher das reelle Bild hinter dem Objectiv entstehen würde, wenn die Strahlen nicht vorher auf das Collectiv fielen, vermindert um die Entfernung g_1, um welche das Collectiv weiter nach vorn steht, und vermehrt um den Abstand zwischen Collectiv und Augenglas, oder gleich

$$\frac{GF}{G-F} - g_1 + 2f,$$

woraus nach Einsetzung des bereits abgeleiteten Werthes von g_1 folgt:

8) $$l_C = \frac{GF}{G-F} + f\,\frac{d-e-4f}{2(d-e)+f}.$$

Im Besondern:

für unendlich fernen Gegenstand:

$$l_C = F + f\,\frac{d-e-4f}{2(d-e)+f} \quad (G=\infty);$$

für unendliche Sehweite:

$$l_C = \frac{GF}{G-F} + \tfrac{1}{2}f \quad (d=\infty);$$

für unendliche Gegenstandsweite und Accomodation auf parallele Strahlen:

$$l_C = F + \tfrac{1}{2}f \quad (G=\infty \text{ und } d=\infty).$$

Um die Vergrösserung durch das Campani-Fernrohr zu erhalten, ersetze man in der allgemeinen Formel 1) das Verhältniss $\frac{\beta}{\gamma}$ durch $\frac{\beta}{\beta_2}\cdot\frac{\beta_2}{\beta_1}\cdot\frac{\beta_1}{\gamma}$, wobei β wieder die Grösse des im Fernrohr gesehenen virtuellen Bildes bedeutet, β_2 die des von Objectiv und Collectiv zusammen entworfenen reellen Bildes und β_1 die Grösse, welche das reelle Bild haben würde, wenn es durch das Objectiv allein entworfen worden wäre. Beachtend, dass:

$$\frac{\beta}{\beta_2} = \frac{f+d-e}{f}, \quad \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{b_1}{g_1}, \quad \frac{\beta_1}{\gamma} = \frac{F}{G-F},$$

erhält man, die oben aufgestellten Werthe für g_1 und für b_1 benützend:

9) $$V_C = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{F}{f}\cdot\frac{G+l+e}{G-F}\cdot\frac{f+2(d-e)}{d}.$$

Und setzt man hierein den Werth für l, wie ihn Formel 8) angiebt, so erhält man nach einigen Zusammenziehungen die genaue Formel:

10 α) $$V_C = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{F}{f}\left(\frac{G}{G-F}\right)^2\cdot\frac{f+2(d-e)}{d} + \frac{F}{f}\,\frac{f(d-4f)-2e(d-e)}{3d(G-F)}.$$

Durch Weglassung des verhältnissmässig kleinen zweiten Gliedes erhält man in erster Annäherung:

10 β) $$V_C = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{F}{f}\left(\frac{G}{G-F}\right)^2\cdot\frac{f+2(d-e)}{d}.$$

Die bequeme Vernachlässigung von $l+e$ gegen G ergiebt die minder genaue Annäherungsformel:

10 γ) $$V_C = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{F}{f}\cdot\frac{G}{G-F}\cdot\frac{f+2(d-e)}{d}.$$

Aus dem genauen Ausdrucke 10 α) folgen die Sonderfälle:

für unendlich fernen Gegenstand:

$$V_C = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{F}{f}\cdot\frac{f+2(d-e)}{d} \quad (G=\infty);$$

für unendliche Sehweite:

$$V_C = \tfrac{2}{3}\cdot\frac{F}{f}\cdot\left(\frac{G}{G-F}\right)^2 + \frac{F}{f}\cdot\frac{f-2e}{3(G-F)} \quad (d=\infty);$$

für unendliche Gegenstandsweite und Accomodation auf parallele Strahlen:

$$V_C = \tfrac{2}{3}\cdot\frac{F}{f} \quad (G=\infty \text{ und } d=\infty).$$

Aus den folgenden Zahlenbeispielen erkennt man, dass, während bei Kepler- und bei Ramsden-Fernrohr beide Annäherungsformeln zu kleine Werthe für die Vergrösserung lieferten, bei Campani-Fernrohr die erste Annäherungsformel (β) einen sehr wenig zu grossen, die zweiten (γ) einen zu kleinen Werth der Vergrösserung finden lässt. Die Annäherung geht aber bei Campani-Fernrohr so weit, dass die fünfte Decimalstelle berechnet werden musste, um den Unterschied deutlich erkennen zu lassen.

Zahlenbeispiele für Vergrösserung und Länge des Campani-Fernrohrs.

I. $F=30$ cm, $f=2$ cm, $d=20$ cm, $e=1$ cm.

$G=1000$ m, $V_C=$ α) 10,00597, β) 10,00600, γ) 10,0030, $l_C=30,56$ cm;

$G=100$ m, $V_C=$ α) 10,05992, β) 10,06027, γ) 10,0309, $l_C=30,64$ cm;

$G=20$ m, $V_C=$ α) 10,30512, β) 10,30689, γ) 10,1523, $l_C=31,01$ cm;

$G=\infty$, $d=\infty$, $V_C=10,0000$, $l_C=31,00$ cm.

II. $F=40$ cm, $f=1$ cm, $d=20$ cm, $e=0,5$ cm.

$G=1000$ m, $V_C=$ α) 26,68261, β) 26,68263, γ) 26,6747, $l_C=40,40$ cm;

$G=100$ m, $V_C=$ α) 26,82715, β) 26,82738, γ) 26,7469, $l_C=40,51$ cm;

$G=20$ m, $V_C=$ α) 27,48386, β) 27,48504, γ) 27,0728, $l_C=41,00$ cm,

$G=\infty$, $d=\infty$, $V_C=26,667$, $l_C=40,50$ cm.

Fernrohre gleicher Vergrösserung.

Fragt man nach dem Verhältniss, welches den Brennweiten der Augengläser des Kepler-, Ramsden- und Campani-Oculars zu geben ist, damit bei gleichem Objectiv, gleicher Gegenstandsentfernung, gleicher Sehweite und gleichem Augenabstande die Fernrohre gleich stark vergrössern, so liefert die genaue Rechnung aus Gleichsetzung der Ausdrücke 4α), 7α), 10α) höchst unbequeme Werthe. Man gelangt zu quadratischen Gleichungen mit stets reellen Wurzeln, deren eine negativ ist, also eine andere Fernrohrart andeutet. Es ist zu bemerken, dass ausser der Sehweite d (richtiger $d-e$) sowohl die Gegenstandsweite G, als auch die Objectivbrennweite F in den Werthen der gesuchten Verhältnisse verbleiben. Wenn es also zwar möglich ist, für eine ganz bestimmte Sehweite $(d-e)$ Oculare verschiedener Art herzustellen, welche mit demselben Objectiv für eine bestimmte Gegenstandsweite gleiche Vergrösserung geben, so ist es nicht möglich, sie so einzurichten, dass sie für verschiedene (wenn auch für die verschiedenen Fernrohre jeweils gleiche) Gegenstandsweiten gleich stark vergrössern. So bleibt es auch, wenn man die Sehweite etwa unendlich macht oder annimmt. Noch weniger möglich ist es, die Oculare so einzurichten, dass für verschiedene Sehweiten gleiche Vergrösserungen erzielt würden.

Begnügt man sich aber mit den Annäherungsformeln 4β), 7β), 10β) oder 4γ), 7γ), 10γ), so findet man die fraglichen Brennweiteverhältnisse unabhängig von der Gegenstandsweite und der Objectivbrennweite, aber noch abhängig von der Sehweite, genauer von $d-e$. Die Näherungsformeln β) und γ) liefern dasselbe Ergebniss.

Bezeichne f_K die Brennweite des Kepler-Oculars, f_R und f_C die Brennweiten der Augengläser des Ramsden- beziehungsweise des Campani-Oculars, so erhält man mit der Annäherung der Formeln β) oder γ) gleiche Vergrösserungen, bei beliebigem, aber gleichem Objectiv, bei beliebiger, aber gleicher Gegenstandsentfernung, bei bestimmter, deutlicher Sehweite d und Augenabstand e, wenn die Verhältnisse bestehen:

$$\left.\begin{aligned}
&11)\quad f_R=\frac{10 f_K (d-e)}{9(d-e)+4 f_K}, \qquad f_K=\frac{9 f_R (d-e)}{10(d-e)-4 f_R}\\
&12)\quad f_C=\frac{2 f_K (d-e)}{3(d-e)+2 f_K}, \qquad f_K=\tfrac{3}{2}\cdot\frac{f_C (d-e)}{(d-e)-f_C}\\
&13)\quad f_R=\frac{5 f_C (d-e)}{3(d-e)-f_C}, \qquad f_C=\frac{3 f_R (d-e)}{5(d-e)+f_R}
\end{aligned}\right\}\ \begin{array}{l}\text{für } G=\infty\\ \text{ganz genau,}\\ \text{für } G<\infty\\ \text{angenähert.}\end{array}$$

Werden die Fernrohre zur Betrachtung unendlich ferner Gegenstände verwendet, so sind die in 11), 12), 13) angegebenen Verhältnisse der Augenglasbrennweiten ganz genau

Es bleibt also, selbst wenn man nur unendlich weite Gegenstände betrachtet oder bei endlich fernen Gegenständen sich mit einer Näherung, wie die der Formeln β) oder γ) begnügt, unmöglich, die Oculare so einzurichten, dass sie für jede Sehweite d und für jeden Augenabstand e gleich stark vergrössern.

Wird die Sehweite unendlich gross angenommen oder durch passende Zerstreuungsbrille so gemacht, so lassen sich constante Brennweiteverhältnisse der Augengläser der verschiedenen Oculare derart wählen, dass bei Betrachtung unendlich ferner Gegenstände ganz genau und bei Betrachtung gleich weiter, zwar beliebig, aber gleich entfernter (und nicht zu naher) Gegenstände sehr angenähert dieselbe Vergrösserung erhalten wird. Diese Verhältnisse sind:

14) $$f_R = \frac{10}{9} f_K, \qquad f_K = \frac{9}{10} f_R,$$

15) $$f_C = \frac{2}{3} f_K, \qquad f_K = \frac{3}{2} f_C,$$

16) $$f_R = \frac{5}{3} f_C, \qquad f_C = \frac{3}{5} f_R.$$

Die gefundenen Werthe sind die äquivalenten Brennweiten, d. h. wenn die zusammengesetzten Oculare eine dem einfachen (Kepler-schen) äquivalente Brennweite haben, so erhält man mit jedem Ocular gleich starke Vergrösserung, vorausgesetzt, dass die Sehweite unendlich gross ist; ganz genau ist das allerdings nur für unendlich grosse, aber annähernd auch für je gleich weite, beliebige, nur nicht zu kleine Entfernung des Gegenstandes.

Um bequem übersehen zu können, welcher Unterschied in der Vergrösserung verbleibt, wenn die Oculare nach Anleitung der Formeln 11) und 12), die nur für unendliche Entfernung genau sind, berechnet werden, sind nachstehende Zahlenbeispiele aufgeführt worden (Strich oben am Index soll bedeuten „gleich stark vergrössernd").

I. $F = 30$ cm, $d = 20$ cm, $e = 1$ cm;

Augenglasbrennweiten $f_K = 2$ cm, $f_R = 2{,}1229$ cm, $f_C = 1{,}2459$ cm;

$$G = \infty, \quad V_{K'} = V_{R'} = V_{C'} = 15{,}75;$$

$$G = 1000\,\text{m}, \quad \begin{cases} V_{K'} = 15{,}7599, \\ V_{R'} = 15{,}75991, \\ V_{C'} = 15{,}75935; \end{cases}$$

$$G = 100\,\text{m}, \quad \begin{cases} V_{K'} = 10{,}8494, \\ V_{R'} = 15{,}84956, \\ V_{C'} = 15{,}84394; \end{cases}$$

$$G = 20\,\text{m}, \quad \begin{cases} V_{K'} = 16{,}2796, \\ V_{R'} = 16{,}25683, \\ V_{C'} = 16{,}22841. \end{cases}$$

II. $F = 40$ cm, $d = 20$ cm, $e = 0{,}5$ cm;

Augenglasbrennweiten $f_K = 1$ cm, $f_R = 1{,}08638$ cm, $f_C = 0{,}644628$ cm;

$G = \infty, \quad V_{K'} = V_{R'} = V_{C'} = 41{,}00;$

$G = 1000\ \text{m}, \quad \begin{cases} V_{K'} = 41{,}0334, \\ V_{R'} = 41{,}03239, \\ V_{C'} = 41{,}03277; \end{cases}$

$G = 100\ \text{m}, \quad \begin{cases} V_{K'} = 41{,}3360, \\ V_{R'} = 41{,}33515, \\ V_{C'} = 41{,}32945; \end{cases}$

$G = 20\ \text{m}, \quad \begin{cases} V_{K'} = 42{,}7209, \\ V_{R'} = 42{,}72116, \\ V_{C'} = 42{,}68772. \end{cases}$

Also selbst bei der sehr kleinen Gegenstandsweite von 20 m sind die Unterschiede in den Vergrösserungen noch so gering, dass man sie praktisch unbeachtet lassen kann. Um so mehr bei grösseren Entfernungen.

Hingegen fallen die Vergrösserungen sehr verschieden aus, wenn mit anderer Sehweite, als jener, die der Rechnung zu Grunde lag, beobachtet wird. Einige Beispiele werden genügen, hiervon eine Vorstellung zu geben. Es sei $F = 30$ cm und die Brennweiten wie oben für $d = 20$ cm gerechnet. Man findet:

für $G = \infty$ $\begin{cases} d = 20\,\text{cm}, & V_{K'} = 15{,}75, & V_{R'} = 15{,}75, & V_{C'} = 15{,}75, \\ d = 10\ „ & = 16{,}5000, & = 15{,}7983, & = 15{,}4474; \end{cases}$

für $G = 20\,\text{m}$ $\begin{cases} d = 20\,\text{cm}, & V_{K'} = 16{,}2796, & V_{R'} = 16{,}2568, & V_{C'} = 16{,}2284, \\ d = 10\ „ & = 19{,}2145, & = 18{,}4659, & = 15{,}3251. \end{cases}$

Ferner, es seien die Brennweiten für unendliche Sehweiten berechnet, um gleiche Vergrösserung zu erhalten, und die Gegenstandsweite sei unendlich gross. Man erhält:

I. $F = 30$ cm, $e = 1$ cm, $G = \infty$;

	$V_{K'}$:	$V_{R'}$:	$V_{C'}$:
$d = \infty$:	15,0000	15,0000	15,0000
$d = 100$ cm:	15,1500	15,1167	14,9500
$d = 30$ „	15,5000	15,0555	14,8333
$d = 20$ „	15,7500	15,0833	14,7500
$d = 15$ „	16,0000	15,1111	14,6667
$d = 10$ „	16,5000	15,1667	14,5000.

II. $F = 40$ cm, $e = 0{,}5$ cm, $G = \infty$;

	$V_{K'}$:	$V_{R'}$:	$V_{C'}$
$d = \infty$:	40,0000	40,0000	40,0000
$d = 100$ cm:	40,4000	40,0222	39,9333
$d = 30$ „	40,6667	40,0740	39,7778
$d = 20$ „	41,0000	40,1111	39,6667
$d = 15$ „	41,3333	40,1481	39,5556
$d = 10$ „	42,0000	40,2222	39,3333.

Wie man sieht, fällt der Unterschied am grössten für Kepler- und am kleinsten für Ramsden-Fernrohr aus.

Die Fernrohre mit gleichem Objectiv, deren Oculare so berechnet sind, dass sie für eine bestimmte Sehweite d und bestimmten Augenabstand e gleiche Vergrösserung geben (genau bei unendlichen, sehr annähernd bei gleichen endlichen Gegenstandsweiten) sind nicht gleich lang. Ihre Längen berechnen sich, wenn f die Brennweite des Kepler-Oculars bedeutet, folgendermassen:

$$17)\qquad l_{K'} = B + \frac{f(d-e)}{f+d-e},$$

$$18)\qquad l_{R'} = B + \frac{f(d-e)}{f+d-e}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{49(d-e)+4f}{9(d-e)+4f},$$

$$19)\qquad l_{C'} = B + \frac{f(d-e)}{f+d-e}\cdot\frac{(d-e)-2f}{3(d-e)+2f}.$$

Hieraus schliesst man, dass das gleich stark vergrössernde Ramsden-Fernrohr länger ist als das Kepler-Fernrohr, das Campani-Fernrohr aber am kürzesten ist. Und zwar findet man:

$$20)\qquad l_{K'} - l_{R'} = \frac{4}{5}\cdot\frac{f(d-e)}{f+d-e}\cdot\frac{4f-(d-e)}{4f+9(d-e)}$$

(also das Ramsden länger, weil $4f < d-e$ ist),

$$21)\qquad l_{K'} - l_{C'} = \frac{f(d-e)}{f+d-e}\cdot\frac{4f+2(d-e)}{2f+3(d-e)},$$

$$22)\qquad l_{R'} - l_{C} = \frac{6}{5}\cdot\frac{f(d-e)}{f+d-e}\cdot\frac{17(d-e)^2+30f(d-e)+8f^2}{27(d-e)^2+30f(d-e)+8f^2}.$$

Für unendliche Sehweite berechnen sich:

$$\left.\begin{aligned} l_{K'} &= B+f \\ l_{R'} &= B+\tfrac{49}{45}f \\ l_{C'} &= B+\tfrac{1}{3}f \end{aligned}\right\}(d=\infty) \quad\text{und}\quad \left.\begin{aligned} l_{K'}-l_{R'} &= -\tfrac{4}{45}f \\ l_{K'}-l_{C'} &= +\tfrac{2}{3}f \\ l_{R'}-l_{C'} &= +\tfrac{34}{45}f \end{aligned}\right\}(d=\infty).$$

B. Helligkeit der Wahrnehmung durch Fernrohre.

Um den Zusammenhang in der nachfolgenden Vergleichung der Helligkeit der verschiedenen Fernrohre* zu wahren, muss Einiges hier angeführt werden, was mit mehr oder minder Ausführlichkeit und Deutlichkeit an verschiedenen Orten bereits dargestellt ist.

Nicht alles von einem strahlenden Punkte ausgehende Licht wird zu dem Bilde verwendet, das ein Beobachter schliesslich sieht, sondern nur ein Bruchtheil, gleich dem Quotienten der Ausdehnung der aufnehmenden Fläche (Pupillaröffnung, Objectivfläche, Spiegelfläche u. s. w.) und der Ausdehnung jener Kugelfläche um den leuchtenden Punkt als Cen-

* Der Kürze halber mag dieser nicht ganz richtige Ausdruck gestattet sein.

trum, von welcher die auffangende Fläche ein Theil ist. Sie wird allerdings im Allgemeinen nur annähernd als ein Theil der Kugelwellenfläche, etwas genauer als eine diese berührende Fläche angesehen werden dürfen; allein da die Kugelhalbmesser immer relativ sehr gross sind, wird die Annäherung eine sehr weitgehende sein. Ist p der Durchmesser der Pupillenöffnung, S der Durchmesser der Objectivöffnung, so verhält sich die „Lichtmenge", welche beim Sehen mit blossem Auge zur Verwendung kommt, zu jener, die in das Fernrohr eindringt, wie

$$\left(\frac{p}{G+l+e}\right)^2 : \left(\frac{S}{G}\right)^2,$$

wenn G die Entfernung des strahlenden Punktes vom Objectiv, l die Fernrohrlänge, e der Abstand des Auges hinter dem Ocular, also $G+l+e$ die Entfernung des strahlenden Punktes vom Auge ist.

Gelangt alles durch das Objectiv in das Fernrohr gedrungene, von dem Punkte herkommende Licht schliesslich in das Auge, so verhalten sich die Helligkeiten der Wahrnehmungen des Punktes durch das Fernrohr und mit unbewaffnetem Auge, wie

$$23) \qquad \mu \cdot \left(\frac{S}{G}\right)^2 : \left(\frac{p}{G+l+e}\right)^2,$$

wo μ einen echten Bruch bedeutet, da ein gewisser Verlust an Helligkeit durch Absorption des Lichts in den Linsen und Reflexion an ihren Flächen stattfindet.

Vorstehend ist die Helligkeit der Wahrnehmung eines Punktes durch das Fernrohr, die Punkthelligkeit oder sogenannte absolute Helligkeit des Fernrohrs angegeben.

Man kann freilich noch bedenken, dass die von einem Punkte hergekommenen Strahlen niemals mathematisch genau in einem Punkte der empfindenden Netzhaut wieder vereinigt werden, sondern dass sie, wegen der Aberrationen im Fernrohr und im Auge selbst, ferner wegen stattfindender Beugung des Lichts, über einen kleinen Zerstreuungskreis ausgebreitet werden. Die Berücksichtigung dieses Umstandes verwickelt die Untersuchung erheblich und macht, dass sie wohl nicht mehr allgemein durchführbar bleibt. Wenn und wo es sich aber um Vergleichung der Helligkeit der Wahrnehmung durch verschiedene Fernrohre und durch das unbewaffnete Auge handelt, darf von der Zerstreuung abgesehen werden, denn man darf annehmen, dass sie in allen Fällen nahezu dieselbe bleibt, demnach alle Helligkeiten mit nahezu demselben Bruche zu multipliciren wären.

Fragt man nach der Helligkeit nicht mehr eines Punktes, sondern eines ausgedehnten Bildes, so müssen jene absoluten Helligkeiten noch durch die Flächenausdehnung der Bilder getheilt werden. Die Flächenhelligkeit oder relative Helligkeit H eines Fernrohrs

ist also die Punkt- (oder absolute) Helligkeit desselben, getheilt durch das Quadrat der Linearvergrösserung:

$$H = \mu \cdot \left(\frac{S}{p}\right)^2 \cdot \left(\frac{G+l+e}{G}\right)^2 \cdot \frac{1}{V^2}. \tag{24}$$

Die Frage, ob und wann die im Drucke hervorgehobene Bedingung dieser Formel erfüllt sei, nämlich dass das ganze durch das Objectiv in das Fernrohr gedrungene Strahlenbündel in das Auge durch die Pupille gelange und zur Bildung des Netzhautbildes verfügbar sei, soll nun sofort an den besonderen Fernrohren geprüft werden. Dem Lichtverluste durch Absorption und Reflexion ist durch den Coefficienten μ bereits Rechnung getragen.

Die scheinbare Helligkeit eines Fernrohrs ist nicht über das ganze Gesichtsfeld hin die gleiche. Es soll die vereinfachende und zugleich für die Praxis der Fernrohrbeobachtungen wichtigste Annahme gemacht werden, es handle sich nur um einen sehr kleinen Theil in der Mitte des Gesichtsfeldes, d. h. auf der optischen Axe des Fernrohrs.

Kepler-Fernrohr.

Damit der ganze auf das Objectiv fallende, nach der Brechung im Objectiv nach dem (auf der Axe gelegenen) Bildpunkte convergirende Strahlenkegel zur Nutzung, d. h. in das Auge gelange, muss, wie aus Fig. 1 leicht ersichtlich ist, sein:

$$s \geqq \frac{S}{B} \cdot \frac{f(d-e)}{f+d-e} \quad \text{aus} \quad S:s = B:\frac{f(d-e)}{f+d-e}, \tag{25}$$

$$p \geqq s \cdot \frac{d}{d-e} \qquad \text{aus} \quad s:p = d-e:d. \tag{26}$$

s bedeutet den Durchmesser der nicht abgeblendeten Oeffnung des Oculars, alle anderen Zeichen dasselbe wie früher. Nur e bedeutet nicht wie bei der Untersuchung über Vergrösserung (und später wieder bei jener über das Gesichtsfeld) den Abstand des optischen Mittelpunktes des Auges, sondern jenen der Pupille vom Augenglase. Es wird hier, wie später immer, vorausgesetzt, die im Rohre des Teleskops angebrachten Blendungen seien weit genug, um alle nützlichen Strahlen durchzulassen.

Die Bedingung 26) lehrt, dass die für die Helligkeit nutzbare Ocularöffnung ein wenig kleiner ist als die Pupillenöffnung, nämlich $\frac{d-e}{d}$-mal so gross, in den früher angeführten Beispielen $\frac{19}{20}$- und $\frac{39}{40}$-mal so gross.

Man pflegt anzugeben, der Oeffnungsdurchmesser einer Linse dürfe bis zu 0,6 der Brennweite steigen, ohne die Aberration störend zu machen. Die Objective der Beobachtungsfernrohre haben aber immer

eine viel kleinere Oeffnung, durchschnittlich etwa $\frac{1}{10}$ der Brennweite also weniger als 0,1 der Bildweite B, die in den Formeln vorkommt. Es soll aber übertrieben $\frac{S}{B} = \frac{1}{8}$ angenommen werden.

Die Erfüllung der Bedingung 25) verlangt dann, dass

1. wenn $f = 2$ cm, $d = 20$ cm, $e = 1$ cm, sein soll $s = 0{,}226$ cm, $= 0{,}113 f$;
2. wenn $f = 1$ cm, $d = 20$ cm, $e = 0{,}5$ cm, sein soll $s = 0{,}119$ cm, $= 0{,}119 f$.

Es bleibt somit die Nutzöffnung für die Helligkeit weit unter der wegen der Kugelabweichung zulässigen Grenze.

Die Bedingung 26) für die Pupillenweite liefert

im ersten Falle $p \geqq 0{,}238$ cm,
im zweiten Falle $p \geqq 0{,}12$ cm.

Die Pupillenweite ändert bekanntlich mit der Intensität des anlangenden Lichtes; zieht sich die Pupille unter die mittlere Oeffnung zusammen, so ist die Helligkeit schon belästigend; man dürfte also für die Rechnung sogar etwas mehr als den mittleren Oeffnungsdurchmesser der Pupille ansetzen. Dieser kann zu 0,5 cm angenommen werden.

Für Kepler-Fernrohre mit Objectivöffnung von $\frac{1}{8}$ der Brennweite (und sogar noch für weitere Objective) sind die Bedingungen [25) und 26)] für die Erzielung der grösstmöglichen Helligkeit [24)] sicher erfüllt, wenn auch die Ocularbrennweite — was wohl selten vorkommt — beträchtlich grösser als 2 cm sein sollte.

Durch Einsetzung des Werthes von V_K [nach 2)] in die Formel 24) erhält man die relative Helligkeit des Kepler-Fernrohrs genau zu:

$$27)\qquad H_K = \mu \cdot \left(\frac{S}{p}\right)^2 \cdot \left(\frac{f}{F}\right)^2 \cdot \left(\frac{G-F}{G}\right)^2 \cdot \left(\frac{d}{f+d-e}\right)^2.$$

Zahlenbeispiele für die Helligkeit des Kepler-Fernrohrs.

I. $F = 30$ cm, $S = \frac{30}{8}$ cm, $f = 2$ cm, $d = 20$ cm, $e = 1$ cm, $p = 0{,}5$ cm;

$G = \infty$:	1000 m:	100 m:	20 m:
$H_K = 0{,}22675 . \mu$	$0{,}2266 . \mu$	$0{,}2254 . \mu$	$0{,}2200 . \mu$.

II. $F = 40$ cm, $S = \frac{40}{8}$ cm, $f = 1$ cm, $d = 20$ cm, $e = 0{,}5$ cm, $p = 0{,}5$ cm,

$G = \infty$:	1000 m:	100 m:	20 m:
$H_K = 0{,}0595 . \mu$	$0{,}0593 . \mu$	$0{,}0585 . \mu$	$0{,}0571 . \mu$.

Ramsden-Fernrohr.

Damit der ganze durch das Objectiv gedrungene, von einem Punkte der optischen Axe des Fernrohrs ausgegangene Strahlenbündel aus dem Augenglase treten und auch ganz in das Auge gelangen könne, müssen, wie aus Fig. 2 leicht zu entnehmen ist, die Verhältnisse bestehen:

$$S : s_1 = B : g_1 \quad (s_1 \text{ ist der Oeffnungsdurchmesser des Collectivs}),$$
$$s_1 : s = b_1 : b_1 + \tfrac{4}{5} f,$$
$$s : p = d - e : d,$$

woraus unter Beachtung, dass (siehe S. 29)

$$g_1 = \tfrac{9}{25} f \cdot \frac{d - c - 4f}{f + 2(d - e)}, \quad b_1 = \frac{f}{5} \cdot \frac{d - e - 4f}{f + d - e} \quad \text{und} \quad b_1 + \tfrac{4}{5} f = \frac{f(d - e)}{f + d - e}$$

ist, die Bedingungen sich ergeben:

$$28) \qquad s_1 \geqq \tfrac{9}{25} f \cdot \frac{S}{B} \cdot \frac{d - e - 4f}{2(d - e) + f},$$

$$29) \qquad s \geqq \tfrac{9}{5} f \cdot \frac{S}{B} \cdot \frac{d - e}{2(d - e) + f},$$

$$30) \qquad p \geqq \tfrac{9}{5} f \cdot \frac{S}{B} \cdot \frac{d}{2(d - e) + f}.$$

Nimmt man wieder $\frac{S}{B} = \frac{1}{8}$ an, so verlangt die Erfüllung der Bedingungen 28), 29) und 30), dass:

1. wenn $f = 2$ cm, $d = 20$ cm, $e = 1$ cm, sein soll
   - $s_1 \geqq 0{,}02475 \text{ cm} \geqq 0{,}012375 f$
   - oder $s_1 \geqq 0{,}0069$ Collectivbrennweite,
   - ferner $s \geqq 0{,}21375 \text{ cm} \geqq 0{,}1069 f$
   - und $p \geqq 0{,}225$ cm;
2. wenn $f = 1$ cm, $d = 20$ cm, $e = 0{,}5$ cm, sein soll
   - $s_1 \geqq 0{,}0174 \text{ cm} \geqq 0{,}0174 f$
   - oder $s_1 \geqq 0{,}0097$ Collectivbrennweite,
   - ferner $s \geqq 0{,}197 \text{ cm} \geqq 0{,}197 f$
   - und $p \geqq 0{,}1125$ cm.

Die Bedingungen für die grösste Helligkeit [24)] sind also bei einem Ramsden-Fernrohr leicht erfüllbar, selbst wenn dessen Objectivöffnung merklich grösser als $\frac{1}{8}$ Brennweite und wenn die Augenglasbrennweite noch grösser als 2 cm wäre.

Durch Einsetzung des Werthes von V_R [nach 6)] in die Formel 24) erhält man die relative Helligkeit des Ramsden-Fernrohrs zu

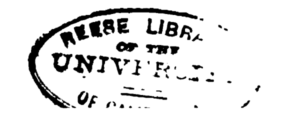
$$31) \qquad H_R = \tfrac{81}{25} \cdot \mu \cdot \left(\frac{S}{p}\right)^2 \cdot \left(\frac{f}{F}\right)^2 \cdot \left(\frac{G - F}{G}\right)^2 \cdot \left(\frac{d}{f + 2(d - e)}\right)^2.$$

Vergleicht man die relativen Helligkeiten eines Ramsden- und eines Kepler-Fernrohrs mit gleicher Brennweite f der Augengläser, ferner demselben Objectiv, gleicher Entfernung u. s. w., so findet man:

$$32) \qquad \frac{H_R}{H_K} = \tfrac{81}{25} \cdot \left(\frac{f + d - e}{f + 2(d - e)}\right)^2,$$

im Besondern, bei unendlicher Weitsichtigkeit:

$$H_R = 0{,}81\, H_K \quad (d = \infty).$$



In Wirklichkeit wird das Helligkeitsverhältniss noch etwas kleiner sein, als hier berechnet, da der Coefficient μ (der hier für beide Fernrohre gleich genommen wurde) für das Ramsden-Fernrohr, das eine Licht absorbirende und reflectirende Linse mehr als das Kepler-Fernrohr hat, etwas kleiner sein muss.

Die geringere Helligkeit (Flächenhelligkeit) des Ramsden-Fernrohrs, wie sie aus 32) sich ergiebt, rührt nur von der stärkeren Vergrösserung her. Denn fragt man nach dem Helligkeitsverhältniss gleich stark vergrössernder Ramsden- und Kepler-Fernrohre (bei gleichem Objectiv, Gegenstandsweite u. s. w.), so ist in der Formel 31) statt f [nach 11)] zu setzen $\frac{10f(d-e)}{9(d-e)+4f}$ und nach dieser Einsetzung gelangt man zu:

$$33) \qquad \frac{H_{R'}}{H_{K'}} = 1,$$

d. h.: Lässt man den geringen Verlust an Licht durch Absorption in und Reflexion an der Collectivlinse ausser Acht, so ist die Helligkeit eines Ramsden-Fernrohrs *gerade so gross,* als die eines gleich stark vergrössernden Kepler-Fernrohrs.

Campani-Fernrohr.

Damit der ganze durch das Objectiv gedrungene, von einem Punkte auf der optischen Axe herrührende Strahlenbündel aus dem Fernrohr treten und ganz in das Auge gelangen könne, müssen, wie aus Fig. 3 leicht zu entnehmen ist, folgende Verhältnisse bestehen:

$S : s_1 = B : g_1$ (s_1 ist der Oeffnungsdurchmesser des Collectivs),
$s_1 : s = b_1 : 2f - b_1$,
$s : p = d - e : d$,

woraus unter Beachtung, dass (siehe S. 31)

$$g_1 = 3f\frac{2f+d-e}{f+2(d-e)}, \quad b_1 = f\frac{2f+d-e}{f+d-e} \text{ und } 2f - b_1 = f\frac{d-e}{f+d-e}$$

ist, die Bedingungen sich ergeben:

$$34) \qquad s_1 \geqq 3\frac{S}{B}\cdot f\cdot\frac{2f+d-e}{f+2(d-e)},$$

$$35) \qquad s \geqq 3\frac{S}{B}\cdot f\cdot\frac{d-e}{f+2(d-e)},$$

$$36) \qquad p \geqq 3\frac{S}{B}\cdot f\cdot\frac{d}{f+2(d-e)}.$$

Nimmt man wieder $\frac{S}{B} = \frac{1}{6}$ an, so verlangt die Erfüllung der Bedingungen 34), 35), 36), dass:

1. wenn $f = 2$ cm, $d = 20$ cm, $e = 1$ cm, sein soll
$s_1 \geqq 0{,}4312 \text{ cm} \geqq 0{,}2156 f$
oder $s_1 \geqq 0{,}072$ Collectivbrennweite,
ferner $s \geqq 0{,}3562 \text{ cm} \geqq 0{,}178 f$
und $p \geqq 0{,}375$ cm;

2. wenn $f = 1$ cm, $d = 20$ cm, $e = 0{,}5$ cm, sein soll
$s_1 \geqq 0{,}2016 \text{ cm} \geqq 0{,}2016 f$
oder $s_1 \geqq 0{,}067$ Collectivbrennweite,
ferner $s \geqq 0{,}1828 \text{ cm} \geqq 0{,}1828 f$
und $p \geqq 0{,}1875$ cm.

Die Bedingungen für die grösste Helligkeit [24)] sind also bei einem Campani-Fernrohr leicht erfüllbar, selbst wenn dessen Objectivöffnung etwas grösser als $\frac{1}{8}$ Brennweite und wenn die Augenglasbrennweite noch grösser als 2 cm wäre.

Durch Einsetzen des Werthes von V_C [nach 9)] in die Formel 24) erhält man die relative Helligkeit des Campani-Fernrohrs zu

$$37)\qquad H_C = 9 \cdot \mu \cdot \left(\frac{S}{p}\right)^2 \cdot \left(\frac{f}{F}\right)^2 \cdot \left(\frac{G-F}{G}\right)^2 \cdot \left(\frac{d}{f+2(d-e)}\right)^2.$$

Vergleicht man die relativen Helligkeiten eines Campani- und eines Kepler-, dann eines Ramsden-Fernrohrs mit gleichem Objectiv u. s. w. und namentlich gleicher Brennweite f des Augenglases, so findet man:

$$38)\qquad \frac{H_C}{H_K} = 9\left(\frac{f+d-e}{f+2(d-e)}\right)^2,$$

woraus im besondern Falle unendlich grosser Sehweite folgt:

$$H_C = \tfrac{9}{4} H_K \quad (d = \infty);$$

dann

$$39)\qquad \frac{H_C}{H_R} = \tfrac{25}{9}.$$

Es ist hier bei Aufstellung dieser Verhältnisse wieder der Coefficient μ der Formeln überall gleich genommen, was für Ramsden- und Campani-Fernrohr, die aus gleichviel Linsen bestehen, wohl ganz unbedenklich ist, hingegen die Helligkeit des Kepler-Fernrohrs ein wenig geringer erscheinen lässt, als sie wirklich ist.

Jedenfalls folgt aus 38) und 39), dass das Campani-Ocular bedeutend hellere Bilder liefert, als ein Kepler- oder gar als ein Ramsden-Ocular mit gleicher Brennweite f des Augenglases. Die grössere Helligkeit (Flächenhelligkeit) des Campani-Oculars rührt aber nur von der geringeren Vergrösserung her. Denn fragt man nach dem Helligkeitsverhältniss gleich stark vergrössernder Campani- und Kepler-Fernrohr (bei gleichem Objective u. s. w.), so ist in Formel 37) statt f [nach 12)] zu setzen:

$$\frac{2f(d-e)}{3(d-e)+2f},$$

und man erhält:

40) $$\frac{H_{C'}}{H_{K'}}=1$$

und mit Rücksicht auf 33)

41) $$\frac{H_{C'}}{H_{R'}}=1.$$

Die durch die Formeln 33), 40) und 41) ausgedrückten Sätze können viel einfacher gewonnen werden: Bei gleicher Beschaffenheit der Objective, gleicher Gegenstandsweite u. s. w. gelangt gleichviel Licht in die Fernrohre; da, wie nachgewiesen, die Bedingungen zur Nutzbarmachung sämmtlichen Lichtes leicht erfüllbar sind, so wird, wenn diese Bedingungen erfüllt sind, die absolute (oder Punkt-) Helligkeit der drei Fernrohre gleich, und ist ihre Vergrösserung auch die gleiche, dann auch ihre Flächenhelligkeit. Die umständlichere Herleitung aus den allgemeinen Formeln kann also wie eine Probe auf deren Richtigkeit und wie eine Versicherung gegen Rechenfehler angesehen werden.

Sind die Oculare nach Formeln 14) und 15) so berechnet, dass die Fernrohre bei unendlicher Sehweite (die man durch passende Brille immer künstlich erzeugen kann) gleiche Vergrösserung geben, wird durch die Fernrohre aber mit Augen von der Accomodationsweite d gesehen, so findet man die Helligkeitsverhältnisse nicht mehr gleich 1, sondern*:

42) $$\frac{H_{R''}}{H_{K''}}=\left(\frac{9f+9(d-e)}{5f+9(d-e)}\right)^2,$$

43) $$\frac{H_{C''}}{H_{K''}}=\left(\frac{3f+3(d-e)}{f+3(d-e)}\right)^2,$$

44) $$\frac{H_{C''}}{H_{R''}}=\left(\frac{5f+9(d-e)}{3f+9(d-e)}\right)^2.$$

Die Helligkeiten sind desto weniger verschieden, je kleiner f im Verhältniss zu $d-e$ ist. Bemerkenswerth ist, dass nun die Helligkeit der Fernrohre mit zusammengesetzten Ocularen sogar etwas grösser wird als die des Kepler-Fernrohrs.

* Die Doppelstriche am Index sollen andeuten nicht genau, sondern nur annähernd gleiche Vergrösserung.

(Schluss folgt.)

III.

Ueber die Partialbruchzerlegung der Functionen, mit besonderer Anwendung auf die Bernoulli'schen.

Von

J. Worpitzky.

---

1. Im 42. Bande des Crelle'schen Journals hat Raabe die Bernoulli'schen Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen dargestellt (S. 348. Zurückführung einiger Summen und bestimmten Integrale auf die Jacob Bernoulli'sche Function). Er gelangt zu seinen Resultaten durch Induction, indem er von der bekannten Relation zwischen x und den Sinus der Vielfachen von x ausgeht, welche u. A. durch die Entwickelung von $l(1+e^{i(\pi-x)})$ nach Potenzen von $e^{i(\pi-x)}$ gewonnen wird. Später hat Schlömilch (im 1. Bande seiner Zeitschrift für Mathematik und Physik) dieselben Ausdrücke aus seiner Formel

$$1)\qquad \mathfrak{B}(x,n)=n.\underset{z=0}{D^{n-1}}\frac{e^{xz}-1}{e^z-1}$$

für die Bernoulli'schen Functionen abgeleitet: in der Weise, dass er diese Formel bei der Auswerthung der Coefficienten der Fourier'schen Reihe verwendet, durch welche $\mathfrak{B}(x,n)$ dargestellt werden soll.

Ich möchte hier zeigen, dass die fraglichen Formeln aus 1) durch die blosse Zerlegung der rechten Seite in Partialbrüche hervorgehen.

2. Die Ableitung des uns hier interessirenden Satzes über die Partialbruchzerlegung erfordert kaum mehr Raum, als seine blosse Anführung. Er entsteht so:

Es sei $f(z)$ eine nebst ihrer Derivirten $f'(z)$ in dem Theil T der z-Fläche überall eindeutige Function von z mit nur einfachen Polen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$ innerhalb dieses Flächentheils. Dann ist nach einem bekannten Cauchy'schen Satze

$$\int^{T}\frac{f(u)\,du}{u-z}=\int^{z}\frac{f(u)\,du}{u-z}+\sum_{r=1}^{r=m}\int^{\alpha_r}\frac{f(u)\,du}{u-z},$$

wo die linke Seite das Grenzintegral um die ganze Fläche T herum, die einzelnen Summanden der rechten Seite aber die Grenzintegrale um die

einzelnen Pole der Function $f(u):(u-z)$ innerhalb T herum bedeuten. Liegt daher z innerhalb T, so folgt

$$\int^{z} \frac{f(u)\,du}{u-z} = i.2\pi.f(z);$$

und ferner folgt

$$\int^{\alpha_r} \frac{f(u)\,du}{u-z} = i.2\pi \cdot \frac{a_r}{\alpha_r - z},$$

wo

2) $$a_r = \lim_{z=\alpha_r}.(z-\alpha_r)f(z)$$

bedeutet.

Bezeichnet man noch

3) $$R = \frac{1}{i.2\pi} \cdot \int^{T} \frac{f(u)\,du}{u-z},$$

so folgt aus dem Obigen die Relation

4) $$f(z) = R + \sum_{r=1}^{r=m} \frac{a_r}{z-\alpha_r}.$$

Dies ist die Grundformel für die Partialbruchzerlegung.

Dehnt man die Fläche T allmälig über den ganzen Theil der z-Fläche aus, in welchem die Pole von $f(z)$ liegen, so kann es vorkommen, dass R hierbei sich einem Grenzwerthe $\lim.R = \mathfrak{R}$ nähert, welcher dann eine in T überall endliche Function von z sein wird oder auch eine nur von den Parametern der Function $f(z)$ abhängende Constante, wie dies bekanntlich geschieht bei den unecht gebrochenen rationalen algebraischen Functionen mit einfachen Polen. Es braucht aber auch kein endlicher Grenzwerth von R zu existiren.

Diejenige Function, mit welcher wir uns hier vornehmlich beschäftigen wollen, ist geeignet, die sämmtlichen Fälle zu illustriren, welche hierbei auftreten können.

3. Die Function

$$f(z) = \frac{e^{xz}-1}{e^z-1}$$

besitzt nur einfache Pole, und zwar bei $z = i.2k\pi$, wo k jede beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet, mit Ausnahme von Null. Da nämlich $f(z)$ überall stetig sein soll, wo es nicht unendlich wächst, so muss für $f(0)$ der Werth $\lim_{z=0}.f(z) = x$ genommen werden.

Die einzelnen Partialbrüche in 4) haben daher die Form:

$$\frac{1}{z-i.2k\pi} \cdot \lim_{z=i.2k\pi} \cdot \frac{(z-i.2k\pi).(e^{xz}-1)}{e^z-1} = \frac{e^{i.2k\pi x}-1}{z-i.2k\pi}.$$

Zum Zweck der Auswerthung des Restes R wählen wir als Begrenzung von T einen Kreis $u = v.e^{i\varphi}$, dessen Radius v der Bedingung

$$mod.z < 2\pi.m < v < 2\pi.(m+1)$$

gemäss angenommen ist, wobei m eine hinreichend grosse absolute ganze Zahl bedeuten soll, und bewirken dadurch, dass der Kreis ausser dem Punkte z die $2m$ Pole von $f(z)$ umschliesst, in denen k die Werthe $-m$, $-(m-1)$, ..., -2, -1, $+1$, $+2$, ..., $+(m-1)$, $+m$ annimmt, sowie dass er durch keinen Pol hindurchgeht.

Da nun $\frac{du}{u} = i.d\varphi$ ist, so folgt aus 3), wenn noch der Kürze wegen $v\cos\varphi = w$, $v\sin\varphi = t$ gesetzt wird:

$$2\pi.R = \int_0^{2\pi} \frac{e^{xw+i.xt}-1}{e^{w+it}-1} \cdot \frac{d\varphi}{1-\frac{z}{u}}.$$

Dies lässt sich auch so schreiben:

$$2\pi.R = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-(1-x).w+i.xt}-e^{-w}}{e^{i.t}-e^{-w}} \cdot \frac{d\varphi}{1-\frac{z}{u}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{e^{xw+i.xt}-1}{e^{w+i.t}-1} \cdot \frac{d\varphi}{1-\frac{z}{u}}.$$

Die Integrationswege der beiden zuletzt geschriebenen Integrale haben eine endliche Länge π. Sehen wir vorläufig von den Endpunkten derselben ab, so entsprechen in allen übrigen Punkten einem unendlich grossen v beim ersten Integral positiv unendlich grosse Werthe von w, beim zweiten negativ unendlich grosse Werthe von w; in den einzelnen Endpunkten selbst ist dagegen $w = 0$.

Daher nähert sich, wenn $0 < x < 1$ angenommen wird, der Integrand des ersten Integrals generell dem Grenzwerthe 0 (denn e^{it} wird nicht $=0$), derjenige des zweiten aber generell dem Grenzwerthe $+1$, während beide in den Endpunkten zu der unbestimmt endlichen Grösse

$$\frac{e^{\pm i.xv}-1}{e^{\pm i.v}-1} = e^{\mp\frac{1-x}{2}v} \cdot \frac{\sin\frac{xv}{2}}{\sin\frac{v}{2}},$$

springen. Mithin ist in diesem Falle (da die Integrationswege, wie gesagt, eine endliche Länge haben) $\mathfrak{R} = lim.R = +\frac{1}{2}$.

Ist $x = 0$, so ergiebt der vorletzte Ausdruck von $2\pi.R$ sofort den Werth $\mathfrak{R} = 0$, und ist $x = 1$, so ergiebt er ebenso leicht:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = +1.$$

Das bisher gewonnene Resultat ist also dieses:

Für $0 \overline{\lessgtr} x \leqq 1$ gilt die Entwickelung

$$5)\quad \frac{e^{xz}-1}{e^z-1} = \mathfrak{R} + \lim_{m=\infty} . \sum_{k=-m}^{k=+m} \frac{e^{i.2k\pi x}-1}{z-i.2k\pi}$$

$$= \mathfrak{R} - \sum_{k=+1}^{k=+\infty} \frac{2z.(1-\cos 2k\pi x) + 4k\pi . \sin 2k\pi x}{z^2 + 4k^2\pi^2};$$

es ist $\mathfrak{R} = 0$ für $x = 0$, $\mathfrak{R} = +\frac{1}{2}$ für $0 < x < +1$, $\mathfrak{R} = +1$ für $x = +1$, und im ersten Ausdruck fehlt dasjenige Glied der Summe, in welchem $k = 0$ zu setzen wäre.

4. Untersuchen wir jetzt den Erfolg der Partialbruchzerfällung bei der Function des vorigen Abschnittes, wenn x nicht in dem reellen Intervall $(0, 1)$ enthalten ist, so leuchtet es zunächst ohne Rechnung ein, dass es einen Grenzwerth $\mathfrak{R} = \lim . R$ gar nicht geben kann, wenn x eine complexe Zahl ist; denn dann divergirt die Partialbruchreihe auf der rechten Seite von 5) zweifellos, weil die Zähler bei wachsendem k schneller wachsen als die Nenner.

Es bleiben also zur Untersuchung nur noch diejenigen reellen Werthe von x übrig, welche ausserhalb des Intervalls $(0, 1)$ liegen.

Bezeichnen wir wieder, wie schon früher, mit m eine absolute ganze Zahl und setzen $x \pm m = x'$, indem wir unter x eine Zahl des Intervalls $(0, 1)$ verstehen, so bleibt die Partialbruchreihe in 5) offenbar von gleichem Werthe, ob man in ihr x oder x' schreibt. Die Differenz zwischen $f(z, x')$ und $f(z, x)$ liegt also einzig und allein in der Differenz der Reste $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$, und zwar so, dass

$$\mathfrak{R}' - \mathfrak{R} = f(z, x') - f(z, x)$$

ist. Man braucht daher zur Emittelung von $\mathfrak{R}'$ nicht auf den Ausdruck 3) für den Rest zurückzugreifen, sondern kann die soeben niedergeschriebene Relation benutzen.

Es folgt:

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} + \frac{e^{x'z} - e^{xz}}{e^z - 1} = \mathfrak{R} + e^{xz} . \frac{e^{\pm mz} - 1}{e^z - 1}.$$

Für $x' = x + m$ kann man dies auch so schreiben:

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} + [e^{xz} + e^{(x+1)z} + \ldots + e^{(x+m-1)z}]$$

und für $x' = x - m$ so:

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} - [e^{(x-1)z} + e^{(x-2)z} + \ldots + e^{(x-m)z}].$$

Hinsichtlich der Partialbruchzerlegung verhält sich also die Function $\frac{e^{sx}-1}{e^{x}-1}$ bei reellen Werthen von x ganz ähnlich, wie eine gebrochene rationale algebraische Function.

5. Wir wollen jetzt die Anwendung auf die Bernoulli'schen Functionen machen, indem wir dabei selbstverständlich für x reelle Werthe voraussetzen.

Für $n=1$ ergiebt sich aus 1) und 5):

$$\mathfrak{B}(x,1)=x=R-\frac{1}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\sin 2k\pi x}{k},$$

wobei $\mathfrak{R}=+\frac{1}{2}$ für $0<x<1$, $\mathfrak{R}=0$ für $x=0$, $\mathfrak{R}=+1$ für $x=+1$ ist, während im Uebrigen zu $\mathfrak{R}$ dieselbe positive oder negative ganze Zahl addirt werden muss, um welche das x die hier hervorgehobenen Werthe übersteigt, — wie es aus dem vorigen Abschnitt hervorgeht.*

Wird in 1) die Zahl $n>1$ angenommen, so folgt aus der ersten Form der Gleichung 5), da man die letztere gliedweise differentiiren darf:

$$6)\qquad \mathfrak{B}(x,n)=\frac{(-1)^{n-1}.\,i^{n}.\,n!}{2^{n}.\,\pi^{n}}\cdot\lim_{m=\infty}\cdot\sum_{k=-m}^{k=+m}\frac{e^{i.2k\pi x}-1}{k^{n}}$$

für $0\leqq x\leqq+1$, in welcher Summe aber das Glied mit $k=0$ ausfällt. Soll x andere reelle Werthe $x'=x\pm m$ haben, so kommt nach dem vorigen Abschnitt hinzu:

$$n.[\,x^{n-1}+(x+1)^{n-1}+\ldots+(x+m-1)^{n-1}]\ \text{für}\ x'=x+m,$$
$$-n.[(x-1)^{n-1}+(x-2)^{n-1}+\ldots+(x-m)^{n-1}\,]\ \text{für}\ x'=x-m.$$

Im Besondern ergiebt dies für $0\leqq x\leqq+1$:

$$7)\qquad \mathfrak{B}(x,2n+1)=(-1)^{n+1}\cdot\frac{(2n+1)!}{2^{2n}.\,\pi^{2n+1}}\cdot\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\sin 2k\pi x}{k^{2n+1}},$$

$$8)\qquad \mathfrak{B}(x,2n)=(-1)^{n}\cdot\frac{(2n!)}{2^{2n-1}.\,\pi^{2n}}\cdot\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1-\cos 2k\pi x}{k^{2n}}$$
$$=(-1)^{n}\cdot\frac{(2n)!}{2^{2n-2}.\,\pi^{2n}}\cdot\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\sin^{2}k\pi x}{k^{2n}}.$$

Während der Ausdruck 7) mit dem entsprechenden Raabe'schen identisch ist, bedarf der Ausdruck 8) der Identificirung wegen noch einer Transformation.

Es geht nämlich aus 7) durch die Differentiation nach x hervor:

$$\mathfrak{B}'(x,2n+1)=(-1)^{n+1}\cdot\frac{(2n+1)!}{2^{2n-1}.\,\pi^{2n}}\cdot\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\cos 2k\pi x}{k^{2n}};$$

---

* Raabe schränkt die Giltigkeit dieser Entwickelung auf das Intervall $0<x<1$ ein, weil er von vornherein $\mathfrak{R}=\frac{1}{2}$ auswählt.

und hieraus ergiebt sich, weil die n^{te} Bernoulli'sche Zahl bekanntlich durch die Relation

$$\mathfrak{B}'(0, 2n+1) = (-1)^{n+1}.(2n+1).B_n$$

definirt werden kann:

$$9) \qquad B_n = \frac{(2n)!}{2^{2n-1}.\pi^{2n}} \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{2n}}.$$

Wendet man diesen Ausdruck auf die erste Form von 8) an, so geht die letztere in die Raabe'sche Gleichung über:

$$10) \quad B(x, 2n) = (-1)^n . B_n + (-1)^{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n-1}.\pi^{2n}} \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos 2k\pi x}{k^{2n}}.$$

6. Unter denjenigen Autoren, welche den vielseitigsten Gebrauch von der Partialbruchzerlegung gemacht haben, nehmen Briot und Bouquet („Théorie des fonctions doublement périodiques. 1859" und die zweite Auflage von diesem Werke: „Théorie des fonctions elliptiques*. 1873") wohl die erste Stelle ein. Sie benutzen dieselbe nicht nur zur Zerlegung einer Function $f(z)$ in eine Summe, sondern auch in ein Product nach Cauchy's Vorgang, indem zunächst $lf(z)$ in eine Summe verwandelt wird. Bei der Beurtheilung der Reste legen sie Gewicht darauf, dass der Ausdruck 3) auch in der Form

$$R = \frac{1}{i.2\pi} \cdot \left\{ \int^{T} \frac{f(u)}{u} \cdot du + z \cdot \int^{T} \frac{f(u)}{u^2} \cdot du + z^2 \cdot \int^{T} \frac{f(u)}{u^3} \cdot du + \ldots \right\}$$

dargestellt werden kann, sobald $mod.u > mod.z$ auf der ganzen Begrenzung von T ist, und leiten daraus ab, dass von der ganzen Klammer bei unendlich wachsendem u nur der erste Summand zur Bestimmung von $\mathfrak{R} = lim.R$ übrig bleibt, wenn der Werth von $f(u)$ nirgends unendlich wächst. Damit schieben sie von vornherein diejenigen Functionen bei Seite, welche $\mathfrak{R}$ als eine Function von z ergeben; und da sie sich mit anderen Functionen nicht beschäftigen, als bei welchen $\mathfrak{R} = 0$ wird, so ist dies für ihre Zwecke meistens auch praktisch. Desgleichen ist es bei den doppeltperiodischen Functionen praktisch, dass sie zur Begrenzung von T ein Parallelogramm wählen, welches wegen der eigenthümlichen Vertheilung der Pole dieser Functionen über die z-Fläche die geeignetste Gestalt ist, um die in T eintretenden Pole vollständig aufzuzählen. Trotz dieser Vorsicht sind sie dem Irrthum verfallen in § 206 der Auflage von 1873, wo nach dem mir privatim mitgetheilten Befunde des Prof. Schu-

---

* In § 94 der neuen Auflage haben die Verfasser nach brieflicher Besprechung zwischen uns ihr früher umständliches Verfahren bei der Beurtheilung der Convergenz der Taylor'schen Reihe verlassen, um sich meines Verfahrens zu bedienen: die Kriterien aus dem Restintegral abzuleiten, nur dass sie nicht die äussersten Consequenzen daraus ziehen. Ich merke dies an, weil ich schon von einigen Seiten darauf aufmerksam gemacht bin, dass ich ebenso verführe, wie Briot und Bouquet.

mann die Formel für $\nu(z)$ nur dann richtig ist, wenn man $lim \cdot \frac{n'}{m'} = 0$ annimmt, während die Verfasser hervorheben: „*Quelle que soit la manière dont fasse augmenter* m′ *et* n′ *à l'infini, le quotient tend vers la même limite* ν(z)." Denn der Grenzwerth des dort aufgestellten Doppelproducts ist nach Schumann:

$$\nu(z) . e^{\frac{z}{\omega'} . l \frac{m'\omega + n'\omega'}{m'\omega - n'\omega'}} = \nu(z) \cdot \left[\frac{m'\omega + n'\omega'}{m'\omega - n'\omega'}\right]^{\frac{z}{\omega'}}.$$

Uebrigens bedarf es der obigen Reihenentwickelung nicht, um zu jenem angestrebten Resultat zu gelangen. Denn man kann, wenn $u = v . e^{i\varphi}$ gesetzt wird, den Restausdruck 3) auch so schreiben:

$$R = \frac{1}{i . 2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{f(u)}{1 - \frac{z}{u}} \left(\frac{dv}{v\, d\varphi} + i\right) \cdot d\varphi;$$

und da hier der Integrationsweg auch bei unendlich wachsendem v endlich ist, so darf man im Integranden, wenn $f(u)$ und $\frac{dv}{d\varphi}$ endlich bleiben, bei der Bestimmung von $lim . R$ auch $1 - \frac{z}{u}$ durch seinen Grenzwerth 1 ersetzen. Besitzt aber die Begrenzung von T nur keine Curventheile, welche Tangenten des zugehörigen Vectors v sind, so bleibt $\frac{dv}{d\varphi}$ überall endlich, und es ist deshalb

$$\mathfrak{R} = \lim_{v = \infty} \cdot \frac{1}{i . 2\pi} \cdot \int^T f(u) \cdot \frac{du}{u}$$

in allen Fällen, in denen $f(u)$ endlich bleibt.

Wählt man zur Begrenzung von T einen Kreis $u = v e^{i\varphi}$, der durch keinen Pol hindurchgeht, so lautet der volle Restausdruck 3):

$$R = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{f(u)}{1 - \frac{z}{u}} \cdot d\varphi. \tag{11}$$

Derselbe bietet bei den einfach periodischen Functionen und deren Verwandten ohne irgendwelche Umgestaltung mindestens dieselben Vortheile, wie der abgeänderte von Briot und Bouquet, und eignet sich ausserdem besser zur übersichtlichen Controle des Werthes von $\mathfrak{R}$ in allen den Fällen, in denen $\mathfrak{R}$ nicht verschwindet. Wir wollen dies noch an einem Beispiel erläutern, zu welchem die oben behandelte Function den Anlass giebt.

7. Die bisher behandelte Function $f(z)$ und sämmtliche Kreisfunctionen lassen sich durch die Function

$$f(z)=\frac{e^{xz}}{e^z-1}$$

ausdrücken. Man erhält ihre sämmtlichen Pole α_r, wenn man für k in dem Ausdruck $i.2k\pi$ die ganzen positiven und negativen Zahlen mit Einschluss der Null setzt.

Die Partialbrüche haben daher die Form:

$$\frac{1}{z-i.2k\pi}\cdot\lim_{z=i.2k\pi}\cdot\frac{(z-i.2k\pi)e^{xz}}{e^z-1}=\frac{e^{i.2k\pi x}}{z-i.2k\pi}.$$

Für den Rest ergiebt sich nach 11):

$$2\pi.R=\int_0^{2\pi}\frac{e^{xu}}{e^u-1}\cdot\frac{d\varphi}{1-\frac{z}{u}}=\int_0^{2\pi}\frac{e^{xw+i.xt}}{e^{w+i.t}-1}\cdot\frac{d\varphi}{1-\frac{z}{u}}$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-(1-x).w+i.xt}}{e^{i.t}-e^{-w}}\cdot\frac{d\varphi}{1-\frac{z}{u}}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{e^{xw+i.xt}}{e^{w+i.t}-1}\cdot\frac{d\varphi}{1-\frac{z}{u}}.$$

Geht man zum Grenzwerth für $v=\infty$ über, so werden für $1-x>0$ nebst $x>0$ beide Integrale $=0$, mithin $\mathfrak{R}=0$; für $x=0$ wird das erste Integral $=0$, das zweite $=-\pi$, mithin $\mathfrak{R}=-\frac{1}{2}$; für $x=1$ wird das erste Integral $=+\pi$ und das zweite $=0$, mithin $\mathfrak{R}=+\frac{1}{2}$. — Zur Erläuterung braucht hier nichts hinzugefügt zu werden, da die nöthigen Ergänzungen bereits im dritten Abschnitt vorgetragen sind.

Es ist daher bei $0\overline{\overline{<}}x\leq 1$:

$$12)\qquad \frac{e^{xz}}{e^z-1}=\mathfrak{R}+\lim_{m=\infty}\cdot\sum_{k=-m}^{k=+m}\frac{e^{i.2k\pi x}}{z-i.2k\pi}$$

$$=\mathfrak{R}+\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2z.\cos 2k\pi x-4k\pi.\sin 2k\pi x}{z^2+4k^2\pi^2}$$

mit der Bedeutung $\mathfrak{R}=-\frac{1}{2}$ für $x=0$, $\mathfrak{R}=0$ für $0<x<1$ und $\mathfrak{R}=+\frac{1}{2}$ für $x=+1$.

Die Gründe, weshalb die Convergenz aufhört, wenn x einen complexen Werth hat, brauchen hier nicht wiederholt zu werden.

Desgleichen treten offenbar auch hier dieselben Veränderungen von $\mathfrak{R}$ auf, welche im vierten Abschnitt für den Fall gefunden sind, dass x sich um eine ganze Zahl ändert.

8. Die Herleitung der Gleichung 5) aus 12) bedarf keines Commentars. Es dürften aber noch die folgenden Betrachtungen einiges Interesse bieten.

Substituirt man in 12) $1-x$ für x, so geht sie über in:

$$\frac{e^{(1-x)z}}{e^z-1}=\Re+\lim_{m=\infty}.\sum_{k=-m}^{k=+m}\frac{e^{-i.2k\pi x}}{z-i.2k\pi},$$

so dass nach Abschnitt 4 bei $0<x<1$ gewonnen wird:

$$\frac{e^{-xz}}{e^z-1}=-e^{-xz}+\lim_{m=\infty}.\sum_{k=-m}^{k=+m}\frac{e^{-i.2k\pi x}}{z-i.2k\pi},$$

$$\frac{e^{xz}+e^{-xz}}{e^z-1}=-e^{-xz}+\frac{2}{z}+4z.\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\cos 2k\pi x}{z^2+4k^2\pi^2},$$

$$\frac{e^{xz}-e^{-xz}}{e^z-1}=+e^{-xz}-8\pi.\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\sin 2k\pi x}{z^2+4k^2\pi^2}.$$

Die Abänderungen, welche diese Formeln erfahren, wenn x der obigen Scala nicht mehr genügt, sind aus Abschn. 4 zu ersehen.

Wichtigere Formeln erhält man, wenn man zunächst $\frac{1+x}{2}$ für x und $2z$ für z setzt. Dann geht 12) über in:

$$13)\quad \frac{e^{xz}}{e^z-e^{-z}}=\Re+\lim_{m=\infty}.\tfrac{1}{2}.\sum_{k=-m}^{k=+m}(-1)^k.\frac{e^{i.k\pi x}}{z-i.k\pi}$$

$$=\Re+\frac{1}{2z}+\sum_{k=1}^{k=\infty}(-1)^k.\frac{z.\cos k\pi x-k\pi.\sin k\pi x}{z^2+k^2\pi^2}.$$

Hier wird $\Re=\pm\frac{1}{2}$ für $x=\pm 1$ und $\Re=0$ für $-1<x<+1$.

Setzt man hier, indem unter x ein Werth des Intervalls $(0,+1)$, unter $\Re$ der zugehörige Werth des Restes und unter m eine ganze absolute Zahl verstanden wird, $x_1=\pm(x+2m)$, so muss man für $\Re$ den Werth

$$\Re_1=\pm\Re\pm e^{\pm(x+m)z}.\frac{e^{mz}-e^{-mz}}{e^z-e^{-z}}$$

$$=\pm\Re\pm e^{\pm(x+m)z}.\{e^{(m-1)z}+e^{(m-3)z}+\ldots+e^{-(m-1)z}\}$$

setzen, wie man aus Abschn. 4 leicht findet.

U. a. folgt aus 13):

$$14)\quad \frac{e^{(x+2m)z}+e^{-(x+2m)z}}{e^z-e^{-z}}=\frac{[e^{(x+m)z}-e^{-(x+m)z}].[e^{mz}-e^{-mz}]}{e^z-e^{-z}}+\frac{1}{z}$$

$$+2z.\sum_{k=1}^{k=\infty}(-1)^k.\frac{\cos k\pi x}{z^2+k^2\pi^2},$$

$$15)\quad \frac{e^{(x+2m)z}-e^{-(x+2m)z}}{e^z-e^{-z}}=2\Re+\frac{[e^{(x+m)z}+e^{-(x+m)z}].[e^{mz}-e^{-mz}]}{e^z-e^{-z}}$$

$$-2\pi.\sum_{k=1}^{k=\infty}(-1)^k.\frac{k\sin k\pi x}{z^2+k^2\pi^2}.$$

Schreibt man in 13), 14) und 15) $i\pi z$ für z, so erhält man zunächst für $-1 \overline{\overline{<}} x \leqq +1$:

$$16) \qquad \pi \cdot \frac{\cos \pi x z}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + 2z . \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^k \cdot \frac{\cos k \pi x}{z^2 - k^2},$$

$$17) \qquad \pi \cdot \frac{\sin \pi x z}{\sin \pi z} = 2\pi . \Re + 2 . \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^k \cdot \frac{k . \sin k \pi x}{z^2 - k^2}.$$

Setzt man aber auf den linken Seiten von 16) und 17) $x + 2m$ für x, so kommen auf den rechten Seiten beziehungsweise noch die Summanden hinzu:

$$-2\pi . \sin \pi (x+m) z \cdot \frac{\sin \pi m z}{\sin \pi z} \quad \text{und} \quad +2\pi . \cos \pi (x+m) z \cdot \frac{\sin \pi m z}{\sin \pi z}.$$

Kleinere Mittheilungen.

I. Eine Ableitung des Additionstheorems für elliptische Integrale aus der Theorie eines Kegelschnittbüschels.

Für ein Kegelschnittbüschel, welches durch die Schnittpunkte zweier beliebiger Kegelschnitte bestimmt ist, hat Poncelet den interessanten Satz bewiesen: „Wenn einem Gliede eines solchen Büschels ein n-Eck eingezeichnet ist, welches mit $(n-1)$ Seiten $(n-1)$ andere Glieder des Büschels berührt, so muss, wenn es diesen Bedingungen entsprechend seine Form ändert, auch die n^{te} Seite des Polygons ein Büschelglied umhüllen." Dieses Theorem steht, wie Jacobi es zuerst für ein Kreisbüschel darlegte, in engster Verbindung mit der elliptischen Differentialgleichung. Durch sie lässt sich die Schaar jener Kegelschnitte darstellen und jener Poncelet'sche Satz unmittelbar begründen; es lässt sich aber auch aus der Natur solcher Kegelschnittschaar leicht der algebraische Zusammenhang zwischen den Grössen ableiten, welche durch die elliptische Differentialgleichung verknüpft sind.

Um diesen Gedanken durchzuführen, ist es nöthig, in Kürze ein Kegelschnittbüschel durch vier Grundpunkte in Form der elliptischen Differentialgleichung zur Darstellung zu bringen, wie ich solches in der Abhandlung: „Die Steiner'schen Kreisreihen in ihrer Beziehung zum Poncelet-schen Schliessungstheorem" (Wissenschaftl. Beilage zum Programm des Ascanischen Gymnasiums in Berlin, Ostern 1883) gethan habe, und es scheint mir darauf noch einmal einzugehen um so mehr geboten, als der Ort der Publication wenig Gewähr bietet, dass die Abhandlung Denen zugänglich werde, welche an diesen Fragen Interesse nehmen.

Lässt man von einem Punkte eines Kegelschnittes drei Gerade auslaufen A, B, C, so wird eine vierte Gerade X, welche durch jenen Punkt geht, in ihrer Lage durch das Doppelverhältniss x beschrieben werden können, welches sie mit den drei anderen bildet, also durch

$$x=\frac{\sin(XA)}{\sin(XB)}:\frac{\sin(CA)}{\sin(CB)}.$$

Die Gerade X bestimmt eindeutig auf dem Kegelschnitte den Punkt (x) und jeder Punkt (x), welcher auf dem Kegelschnitt gelegen ist, die Gerade X. Ein zweiter Punkt möge durch den Werth y gegeben sein, beide bestimmen eine Gerade, und für sie können die Zahlen x und y

als Coordinaten gelten. Alle Geraden, welche durch einen beliebigen Punkt der Ebene gehen, setzen x und y in eine wechselweis eindeutige Beziehung, und da jedes Werthepaar x, y vertauschbar ist, so muss dieselbe durch eine in x und y symmetrische Gleichung ausdrückbar sein, welche in Bezug auf jede einzelne Coordinate den ersten Grad nicht übersteigt, also in der Form

$$xy + a(x+y) + b = 0.$$

Diese Gleichung kann als die Gleichung eines Punktes in Liniencoordinaten angesehen werden. Durch zwei Gerade, also durch zwei Werthepaare x, y sind die beiden Constanten a und b bestimmbar, und der Punkt, in welchem sich die gegebenen Geraden schneiden, ist in analytischer Form durch eine Gleichung in Liniencoordinaten ausgedrückt.

Wird ein beliebiger Kegelschnitt als Enveloppe seiner Tangenten aufgefasst, so wird die Lage jeder Tangente durch ein Werthepaar x, y beschrieben. Jedem Werthe x entsprechen zwei Werthe y, und umgekehrt jedem Werthe y zwei Werthe x; jedes zusammengehörige Werthepaar ist aber vertauschbar. Es muss deshalb die Gleichung des Kegelschnittes durch eine in x und y quadratische Gleichung zum Ausdruck kommen, welche ausserdem in x und y symmetrisch gebildet ist. Der Kegelschnitt stellt sich also dar in

$$x^2y^2 + axy(x+y) + b(x+y)^2 + cxy + d(x+y) + e = 0.$$

Durch fünf beliebige Gerade, also durch fünf Werthepaare x, y sind die fünf Constanten des Kegelschnittes bestimmbar, und der durch sie definirte Kegelschnitt ist alsdann in der gegebenen Form durch seine Gleichung analytisch dargestellt.

Differenzirt man diese Gleichung und führt in den Coefficienten von dx für x den Werth y ein, welcher sich durch Auflösung der Gleichung nach x ergiebt, so wird der Coefficient von dx rein durch die Grösse y ausgedrückt, und zwar durch eine Quadratwurzel einer Function vierten Grades in y. Diese Function wird für vier Werthe zu Null, das sind die Werthe α, β, γ, δ, für welche obige Gleichung gleiche Werthe x ergiebt; sie ist also in der Form $\varkappa(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)$ darstellbar, wo $\varkappa$ irgend eine Constante bedeutet. Da aber auch die Differentialgleichung sich symmetrisch in x und y bilden muss, so muss sie, wenn man $\sqrt{\varkappa}$ heraushebt, die Form gewinnen:

$$dx\sqrt{(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)} \pm dy\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)} = 0$$

oder

$$\frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}} \pm \frac{dy}{\sqrt{(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}} = 0.$$

Die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bestimmen diejenigen Punkte (α), (β), (γ), (δ) auf dem Grundkegelschnitt, in denen zu einem x gleiche y gehören; dies

tritt aber für die Punkte ein, in welchen derselbe von dem dargestellten Kegelschnitt getroffen wird, also sind (α), (β), (γ), (δ) die Grundpunkte beider Kegelschnitte. Die Differentialgleichung stellt mithin irgend einen Kegelschnitt dar, welcher durch diese vier Punkte hindurchgeht; sie ist der allgemeine analytische Ausdruck für ein Kegelschnittbüschel durch vier Punkte.

Aus dieser Darstellungsform geht unmittelbar das Poncelet'sche Theorem in seiner allgemeinsten Fassung hervor. Denn wenn man irgend einen Kegelschnitt des Büschels als Grundkegelschnitt auffasst und von einem Punkte x desselben eine Tangente an ein Glied des Büschels legt, welche den Grundkegelschnitt in x_1 schneidet, von diesem Punkte aus aber an ein zweites Glied des Büschels eine berührende Gerade zieht, welche den Grundkegelschnitt in x_2 trifft, und in dieser Form die Construction bis zu einem Punkte x_n fortsetzt, so hängen die Zahlen x, x_1, $x_2, \ldots x_n$ durch das Gleichungssystem zusammen:

$$\frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}} = \pm \frac{dx_1}{\sqrt{(x_1-\alpha)(x_1-\beta)(x_1-\gamma)(x_1-\delta)}}$$
$$= \pm \frac{dx_2}{\sqrt{(x_2-\alpha)(x_2-\beta)(x_2-\gamma)(x_2-\delta)}} = \ldots \pm \frac{dx_n}{\sqrt{(x_n-\alpha)(x_n-\beta)(x_n-\gamma)(x_n-\delta)}},$$

und man schliesst, dass der erste Punkt (x) mit dem letzten Punkte (x_n) durch eine Differentialgleichung verknüpft ist, welche das geometrische Gesetz ausspricht, dass die Verbindungslinie beider Punkte sich als Tangente auf einem Kegelschnitte des Büschels wälzt, wenn der erste Punkt den Grundkegelschnitt durchläuft.

Will man die elliptische Differentialgleichung in die Normalform überführen, so ist dies leicht durch eine geeignete Bestimmung der Coordinatenelemente, über die noch nicht verfügt worden ist, zu bewirken.

In der That, mögen die vier Grundpunkte reell oder imaginär sein, es giebt stets eine reelle Tripelgerade, welche den Grundkegelschnitt reell schneidet. Diese Gerade möge als die Gerade A gewählt werden, die Tangente in einem ihrer Schnittpunkte mit dem Grundkegelschnitt als die Gerade B, die Gerade C aber möge vom Schnittpunkte jener beiden nach einem der Grundpunkte laufen, etwa nach (α). Alsdann sind die Grundpunkte gegeben durch die Zahlen ± 1 und $\pm \frac{1}{\varkappa}$, wo $\frac{1}{\varkappa}$ irgend einen Zahlenwerth hat, und zwar mögen, um bestimmte Vorstellungen festzuhalten, die Punkte (α) und (β) durch ± 1, und die Punkte (γ) und (δ) durch $\pm \frac{1}{\varkappa}$ in ihrer Lage beschrieben werden. Unter diesen Annahmen muss also das Kegelschnittbüschel durch die elliptische Differentialgleichung in der Normalform zum Ausdruck kommen, nämlich durch

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\varkappa^2 y^2)}} = 0.$$

Nach dem Dualitätsprincip ist in derselben Form ein Kegelschnittbüschel ausdrückbar, welches durch die vier gemeinsamen Tangenten zweier beliebigen Kegelschnitte bestimmt ist. Denn nimmt man auf einer beliebigen Tangente eines Gliedes dieser Schaar drei Punkte A, B, C an, so kann jeder Punkt X dieser Tangente durch das Doppelverhältniss x beschrieben werden, welches X mit A, B, C bildet, also durch

$$x = \frac{XA}{XB} : \frac{CA}{CB}.$$

Jedem Werthe x entspricht ein Punkt und diesem eine Tangente (x) an den Grundkegelschnitt, und umgekehrt bestimmt jede Tangente dieses Kegelschnittes eine Zahl x. Zwei derartige Zahlen x und y bestimmen zwei Tangenten, diese ergeben einen Durchschnittspunkt, und für ihn können x und y als Coordinaten gelten. In diesen Coordinaten würde

$$xy + a(x+y) + b = 0$$

eine Gerade und

$$x^2y^2 + axy(x+y) + b(x+y)^2 + cxy + d(x+y) + e = 0$$

einen Kegelschnitt darstellen. In diesen Formen ist demnach der Ausdruck für ein Kegelschnittbüschel, welches durch vier Tangenten bestimmt ist, in der Differentialgleichung gegeben

$$\frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}} + \frac{dy}{\sqrt{(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}} = 0.$$

Ganz analog den früheren Schlussformen tritt demnach der Satz in Evidenz:

„Ist einem Gliede eines Kegelschnittbüschels, welches durch vier Tangenten bestimmt ist, ein n-Eck umgeschrieben, von welchem $(n-1)$ Ecken auf $(n-1)$ Gliedern des Büschels gelegen sind, so bewegt sich, wenn dies n-Eck jenen Bedingungen entsprechend seine Form ändert, auch der n^{te} Punkt auf einem Gliede des Büschels."

Confocale Kegelschnitte bilden ein Büschel solcher Art; die vier Tangenten sind die imaginären Geraden, welche von den gemeinsamen Brennpunkten nach den imaginären Kreispunkten laufen. Für sie gilt also das Gesetz:

„Ist einem Kegelschnitte ein n-Eck umgeschrieben, von welchem $(n-1)$ Ecken auf $(n-1)$ confocalen Kegelschnitten gelegen sind, so muss, wenn das n-Eck jenen Bedingungen gemäss variirt, auch die n^{te} Ecke einen confocalen Kegelschnitt durchschreiten."

Dieser Satz findet sich in Salmon's Geometrie der Kegelschnitte, bearbeitet von W. Fiedler, S. 293. Hier folgt er aus den einfachsten analytischen Grundlagen, und deshalb scheint mir seine Deduction der Beachtung werth.

Es ist aber eine andere Gedankenreihe, auf die ich die Aufmerksamkeit lenken möchte, das ist die Herleitung des Additionstheorems für elliptische Integrale erster Gattung aus der Theorie eines solchen Kegelschnittbüschels. Zu Grunde gelegt mag ein Kegelschnittbüschel durch vier Punkte werden.

Nach den vorangehenden Betrachtungen stellt jede elliptische Differentialgleichung von der Form

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\varkappa^2 y^2)}} = 0$$

ein Kegelschnittbüschel dar, und jedes Glied desselben ist eine partikulare Lösung. Als Coordinatenelemente sind hierbei zu Grunde gelegt die gemeinsame reelle Polare des Büschels, welche den Grundkegelschnitt in P und Q schneiden mag, ferner die Tangente in P und die Gerade, welche von P nach einem Grundpunkte des Büschels läuft. Die Tangente in Q schneidet die Tangente in P in einem Punkte R; dieser ist der zur Polare PQ gehörige gemeinsame Pol des Büschels. Zieht man von P an ein Glied des Büschels die beiden Tangenten, so wird deren Berührungssehne durch den Pol R laufen, und zwar wird sie durch R und seine Polare PQ harmonisch getheilt. Es bilden also diese beiden Tangenten mit den Geraden PQ und PR harmonische Strahlen. Jede dieser Tangenten bestimmt auf dem Grundkegelschnitt einen Schnittpunkt, M und N. Legt man durch einen derselben, z. B. M, von dem Pol R eine Gerade, so muss diese auch durch den Punkt N hindurchgehen; denn auf dieser Geraden bestimmt sowohl der Grundkegelschnitt, als auch die beiden Geraden PM und PN ein Punktepaar, welches dem Pol und dem Durchschnitt mit der Polare harmonisch zugeordnet ist. Beschreibt man also die Lage des Punktes M durch $+a$ gegen das gewählte Coordinatensystem, so wird N durch $-a$ beschrieben. Da das Entsprechende auch für die Tangenten gilt, welche von Q aus an das betrachtete Büschelglied gezogen werden, so werden auch deren Schnittpunkte mit dem Grundkegelschnitt von P aus unter zwei Gesichtsstrahlen erscheinen, welche mit PR und PQ harmonisch sind. Bestimmt man demnach den einen durch $+z$, so wird der andere durch die Zahl $-z$ beschrieben.

Das betrachtete Glied, welches in der generellen Form

$$x^2y^2A + Bxy(x+y) + C(x+y)^2 + Dxy + E(x+y) + 1 = 0$$

seinen Ausdruck findet, muss demnach bei der besondern Annahme der Coordinatenelemente für $x=0$ $y=\pm z$ und für $x=\infty$ $y=\pm a$ ergeben. Das Eine erfordert, dass

$$y^2C + yE + 1 = 0$$

die Wurzeln $\pm z$, das Andere, dass die Gleichung

$$y^2A + yB + C = 0$$

die Wurzeln $\pm a$ habe. Es ist demnach $E=0$, $C=-\frac{1}{z^2}$, $B=0$, $A=\frac{1}{z^2a^2}$. Demnach hat die Gleichung dieses Büschelgliedes die Form

$$x^2y^2-a^2(x+y)^2+D^2a^2z^2xy+a^2z^2=0.$$

Die Discriminante dieser Gleichung ist

$$x^4-x^2\left\{a^2+z^2-a^2\left(1-\frac{D}{2}z^2\right)^2\right\}+a^2z^2=0.$$

Zu den Wurzeln dieser Gleichung gehören gleiche Werthe y, es sind also die Wurzeln die Grundpunkte des Büschels ± 1 und $\pm\frac{1}{\varkappa}$. Es muss daher

$$a^2z^2=\frac{1}{\varkappa^2} \text{ und } a^2+z^2-a^2\left(1-\frac{D}{2}z^2\right)^2=1+\frac{1}{\varkappa^2}$$

sein. Zur Bestimmung von D erhält man demnach

$$\left(1-\frac{D}{2}z^2\right)^2=(1-z^2)(1-\varkappa^2z^2).$$

Bezeichnet man, wie gebräuchlich, $\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2z^2)}$ durch Δz, so ist

$$D=(1\pm\Delta z)\frac{2}{z^2}.$$

Es giebt also, da D zweideutig ist, zwei Büschelglieder, welche die Bedingung erfüllen, dass für $x=0$ $y=\pm z$ wird. Sie finden ihren Ausdruck in der Gleichung

$$x^2y^2-(x+y)^2\frac{1}{\varkappa^2z^2}+2xy\frac{1\pm\Delta z}{\varkappa^2z^2}+\frac{1}{\varkappa^2}=0.$$

Will man sie beide unterscheiden, so kann dies dadurch geschehen, dass man den Werth von $\frac{dy}{dx}$ für $x=0$ festsetzt. Dieser ist, wie die Rechnung ergiebt, $\pm\Delta z$, so dass, je nach der Wahl der Zeichen, das eine oder das andere Büschelglied gemeint ist. Hat man sich für den Werth $+\Delta z$ entschieden, so ergiebt die obige Gleichung zu einem x zwei Wurzeln y, nämlich

$$y=\frac{x\Delta z\pm z\Delta x}{1-\varkappa^2x^2z^2}.$$

Will man dieses Büschelglied aus der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\Delta x}\pm\frac{dy}{\Delta y}=0$$

bestimmen, so hat man die Forderung festzustellen, dass für $x=0$ $y=\pm z$ werde und $\frac{dy}{dx}$ für $x=0$ den Werth Δz erhalte.

Die zweite Forderung führt zu der Gleichung

$$\frac{dx}{\Delta x}-\frac{dy}{\Delta y}=0$$

und die erste zu

$$\int_0^x \frac{dx}{\Delta x} - \int_0^y \frac{dy}{\Delta y} = \mp \int_0^z \frac{dz}{\Delta z}.$$

Es findet demnach die transcendente Gleichung

$$\int_0^x \frac{dx}{\Delta x} \pm \int_0^z \frac{dz}{\Delta z} = \int_0^y \frac{dy}{\Delta y}$$

in der algebraischen Form

$$y = \frac{x \Delta z \pm z \Delta x}{1 - \varkappa^2 z^2}$$

ihre Lösung.

Ad. Schumann.

II. Einfache Darstellung der Trägheitsmomente von Körpern.

Schon im 10. Bande dieser Zeitschrift (1865) hat Herr Reye bewiesen, dass ein räumliches Massensystem hinsichtlich seiner Trägheitsmomente auf unzählige Arten durch vier materielle Punkte, ein ebenes Massensystem dagegen durch drei solcher ersetzt werden kann. Nachdem die praktische Anwendung dieser Sätze lange Zeit, wie es scheint, von Niemand versucht worden war, hat Herr Reye selbst in einer sehr lesenswerthen Abhandlung („Einfache Darstellung der Trägheitsmomente ebener Figuren", Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrgang 1875, S. 401—408) die Zurückführung auf einzelne Massenpunkte an einer Anzahl ebener Figuren — am Dreieck, Parallelogramm, Trapez, Parabelsegment, ferner an der Ellipse und der durch concentrische Kreise oder durch ähnliche Parallelogramme begrenzten Ringfläche — wirklich durchgeführt. Bei räumlichen Massensystemen ist die Reye'sche Darstellung der Trägheitsmomente meines Wissens immer noch nicht ausgeführt worden. Es möge deshalb gestattet sein, auf diesen Gegenstand einzugehen.

Herr Reye geht in der zuletzt erwähnten Abhandlung von dem Satze aus, dass zwei Massensysteme, welche beide dieselbe Gesammtmasse haben, dann und blos dann äquivalent sind (d. h. in Bezug auf jede beliebige Axe oder Ebene des Raumes dasselbe Trägheitsmoment liefern), wenn ihre Centralellipsoide zusammenfallen. Hierauf gründet er den folgenden:

„Concentrirt man in jedem Eckpunkte eines Parallelogramms, dessen Seiten die Centralellipse eines ebenen Massensystems berühren und zu zwei conjugirten Durchmessern derselben parallel laufen, ein Viertel der Gesammtmasse des Systems, so erhält man ein System von vier gleichen Punkt-

massen, dessen Trägheitsmoment bezüglich jeder beliebigen Axe demjenigen des gegebenen Massensystems gleich ist.“

Auf diesem Satze, der selbst bei beliebig begrenzten ebenen Figuren leicht angewendet werden kann, beruht ein grosser Theil der von Herrn Reye mitgetheilten Resultate. — Welches ist nun der entsprechende Satz für räumliche Massensysteme?

Nennen wir bei einem Parallelepiped zwei Ecken benachbart, wenn sie Endpunkte einer Kante sind, so zerfallen die acht Ecken in zwei Gruppen von je vier nicht benachbarten. Die Ecken einer solchen Gruppe bilden ein Tetraeder, dessen Kanten für das Parallelepiped Diagonalen der Seitenflächen sind. Es gilt nun folgender Satz:

Umschreibt man dem Centralellipsoid eines Massensystems ein Parallelepiped, dessen Seitenflächen paarweise drei zu einander conjugirten Diametralebenen jenes Ellipsoids parallel sind, und denkt man sich in vier nicht benachbarten Ecken desselben je ein Viertel der Gesammtmasse angebracht, so erhält man ein System von vier gleichen Punktmassen, das dem gegebenen äquivalent ist.*

Denn das vierpunktige und das ursprünglich gegebene Massensystem haben, wie man leicht einsieht, bei gleicher Gesammtmasse das Centralellipsoid gemeinschaftlich.

Merkwürdigerweise gestaltet sich also die Zurückführung eines Massensystems auf eine möglichst kleine Zahl von Punktmassen im Raume fast einfacher, als in der Ebene. Denn während durch den oben angeführten Reye'schen Satz ein ebenes Massensystem erst auf vier, also noch nicht auf die kleinstmögliche Anzahl von materiellen Punkten zurückgeführt wird, ist Letzteres bei einem räumlichen Massensystem bereits der Fall, wenn man das oben aufgestellte Analogon jenes Reye'schen Satzes anwendet. Wenn es auch nach dem Obigen verhältnissmässig leicht ist, ein räumliches Massensystem auf vier materielle Punkte zu reduciren, so ist es doch in manchen Fällen bequemer und nicht weniger praktisch, das System durch fünf, sechs oder mehr materielle Punkte zu ersetzen. In der folgenden Zusammenstellung etlicher, auf die einfachsten Körper sich beziehenden Resultate soll in erster Linie auf derartige, nicht aus dem oben mitgetheilten Satze folgende Darstellungen Rücksicht genommen werden; dieselbe macht natürlich keinen Anspruch auf Vollständigkeit, vielmehr sind darin nur die einfachsten der sich in Menge dar-

* Das aus jenen vier Punkten gebildete Tetraeder kann auch so beschrieben werden: Es wird in den Mittelpunkten seiner Kanten vom Centralellipsoid berührt und die drei Verbindungsstrecken gegenüberliegender Kantenmittelpunkte bilden drei conjugirte Durchmesser des Ellipsoids. Die Ecken aller derartigen Tetraeder liegen offenbar auf einem zweiten Ellipsoid, welches dem ersten ähnlich und ähnlich zu ihm gelegen ist und $\sqrt{3}$ mal so grosse Dimensionen hat.

bietenden Resultate mitgetheilt. Würde man auch negative Massen benützen, wogegen ja theoretisch nichts einzuwenden ist, so würden sich noch weit mehr und theilweise interessantere Sätze ergeben. Noch werde bemerkt, dass im Folgenden überall Massen von constanter Dichtigkeit vorausgesetzt sind.

1. Tetraeder.

Dasselbe kann ersetzt werden:

a) (Reduction auf 7 Punkte) durch die sechs Kantenmittelpunkte je mit $\frac{1}{10}$, sowie den Schwerpunkt mit $\frac{2}{5}$ der Masse des Tetraeders;

b) (5 Punkte) durch die vier Ecken je mit $\frac{1}{20}$ und den Schwerpunkt mit $\frac{4}{5}$ der Tetraedermasse;

c) (4 Punkte) durch die vier Punkte, welche die Strecken vom Schwerpunkte nach den Ecken im Verhältniss $1:(\sqrt{5}-1)$ theilen, je mit $\frac{1}{4}$ der Gesammtmasse.

2. Dreiseitiges Prisma (mit parallelen Endflächen).

Es können angebracht werden:

a) (9 P.) je $\frac{1}{24}$ der gesammten Masse in den Ecken des Prisma und den Schwerpunkten seiner Endflächen, sowie $\frac{2}{3}$ der Masse im Schwerpunkt des ganzen Körpers;

b) (8 P.) je $\frac{1}{24}$ der Masse in den Ecken des Prisma, je $\frac{3}{8}$ in den beiden Punkten, welche die Verbindungsstrecke der Endflächenschwerpunkte in drei gleiche Theile zerlegen;

c) (6 P.) je $\frac{1}{12}$ der Gesammtmasse in den Mittelpunkten der drei parallelen Kanten, je $\frac{1}{6}$ in den Schwerpunkten der beiden Endflächen, sowie $\frac{5}{12}$ im Schwerpunkt des Prisma;

d) (5 P.) je $\frac{1}{12}$ der Masse in den Mittelpunkten der drei parallelen Kanten, $\frac{3}{8}$ in jedem der beiden Punkte, welche die Verbindungsstrecke der Endflächenschwerpunkte im Verhältniss $1:5$ resp. $5:1$ theilen;

e) (4 P., unsymmetrisch) je $\frac{1}{3}$ der Masse in den Schwerpunkten zweier Seitenflächen, je $\frac{1}{6}$ der Masse in den Halbirungspunkten derjenigen beiden Kanten der dritten Seitenfläche, welche zugleich den Endflächen angehören.

3. Parallelepiped.

Man concentrire von der Gesammtmasse entweder

a) (6 P.) je $\frac{1}{6}$ in den Mittelpunkten der Seitenflächen, oder

b) (5 P.) je $\frac{1}{12}$ in vier nicht benachbarten Ecken, $\frac{2}{3}$ im Schwerpunkt des Körpers, oder

c) (4 P.) je $\frac{1}{4}$ in den vier Punkten, welche die Strecken vom Schwerpunkte nach vier nicht benachbarten Ecken im Verhältniss $1:(\sqrt{3}-1)$ theilen.

4. Schiefer elliptischer Cylinder (mit parallelen Endflächen).

Derselbe ist u. A. äquivalent dem Schwerpunkt des Cylinders und den Mittelpunkten der beiden Endflächen, je mit $\frac{1}{6}$ der Cylindermasse, zusammen mit den vier Endpunkten von irgend zwei conjugirten Durchmessern derjenigen Ellipse, in welcher eine durch den Schwerpunkt parallel zu den Endflächen gelegte Ebene den Cylinder schneidet, je mit $\frac{1}{8}$ der ganzen Masse.

5. Schiefer Kegel mit elliptischer Basis.

Man versehe die vier Endpunkte von irgend zwei conjugirten Durchmessern der Basis und den Mittelpunkt der letzteren je mit $\frac{3}{40}$ der Masse des Kegels, ferner mit $\frac{5}{8}$ der gesammten Masse denjenigen Punkt, welcher die Strecke vom Basismittelpunkte nach der Kegelspitze im Verhältniss 3:2 theilt, so erhält man ein sechspunktiges Massensystem, welches dem homogenen materiellen Kegel äquivalent ist.

6. Ellipsoid.

Man erhält eine Reduction auf sieben Massenpunkte, wenn man je $\frac{1}{10}$ der Gesammtmasse in den sechs Endpunkten von irgend drei zu einander conjugirten Durchmessern, sowie $\frac{2}{5}$ der Masse im Centrum des Ellipsoids anbringt.

Zum Schluss möge noch ein recht merkwürdiger Satz über die homogene materielle

7. Kugeloberfläche

mitgetheilt werden. Nämlich:

Beschreibt man derselben irgend einen der fünf regelmässigen Körper ein und vertheilt die Masse der Kugeloberfläche gleichmässig auf die Ecken des regelmässigen Körpers, so erhält man ein System von Punktmassen, welches der materiellen Kugeloberfläche äquivalent ist.

Der entsprechende Satz in der Ebene heisst: Eine homogene materielle Kreislinie ist äquivalent den (sich gleichmässig in die Gesammtmasse theilenden) Ecken irgend eines einbeschriebenen regelmässigen Vielecks.

Was den Beweis der mitgetheilten und namentlich die Aufsuchung ähnlicher Resultate betrifft, so scheint dazu die Methode der Cartesischen Coordinaten sich am wenigsten zu eignen. Ganz wie für diesen Zweck geschaffen erweist sich dagegen die Möbius-Grassmann'sche Punktrechnung. Wie dieselbe auf diesem Gebiet zu verwenden sei, habe ich in einer kurzen Mittheilung zu zeigen versucht, welche demnächst in den „Mathematischen Annalen“ erscheinen wird.

Stuttgart. Dr. R. Mehmke,
Repetent am Polytechnikum.

IV.

Beiträge zur graphischen Dioptrik.

Von

F. Kessler.

Hierzu Taf. IV Fig. 1—17.

Wenn ein homocentrisches Lichtstrahlenbüschel gespiegelt oder gebrochen wird, so entwickelt sich aus den abgelenkten Strahlen im Allgemeinen die sogenannte Brennfläche. In besonderen Fällen wird diese zu einem Brennpunkte; beispielsweise bei der Brechung an einer Hohlkugel vom Radius r und Brechungsverhältniss n, wenn der Strahlpunkt a (Fig. 1) um eine centrale Strecke $(n+1)r$ von der Oberfläche o absteht und die gebrochenen Strahlen sich dann in einem Punkte b auf derselben Centralen im Abstande $(n+1)r/n$ vor o schneiden. Betrachtet man aber ein unendlich dünnes homocentrisches Lichtstrahlenbüschel nach seiner Brechung an der Ebene oder der Kugel, so ergiebt sich unter Voraussetzung endlicher Einfallswinkel, dass im Allgemeinen die Brennfläche auf zwei räumlich gesonderte, unendlich kurze gerade Linien eingeschränkt wird. Eine derselben, welche man das primäre Bild genannt hat, liegt normal zur Einfallsebene, in der Brennfläche, die andere, das secundäre Bild, in der Axe der Brennfläche, also in der Einfallsebene, normal zum brechenden Flächenelement.

Diese den Mathematikern seit geraumer Zeit bekannte, auch von Physikern, z. B. E. Reusch,* H. v. Helmholtz,** V. v. Lang,*** behandelte Thatsache findet in den elementaren Lehrbüchern der Physik selten Beachtung. Meistens wird daselbst beim Beginn der Dioptrik die Brechung aus Wasser nach Luft wie Fig. 2 gezeichnet, nämlich zu dem Strahle aeo ein dem Auge o erscheinendes Bild des Gegenstandes a angegeben, zwar nur eines, entweder auf der kaustischen Fläche in k (das

* Reflexion und Brechung des Lichts an sphärischen Flächen unter Voraussetzung endlicher Einfallswinkel. Poggendorff's Annalen 130, S. 497—517 (1867).

** Physiologische Optik (1867).

*** Einleitung in die theoretische Physik (1873), § 182.

primäre) oder auf der Axe derselben in *c* (das secundäre), oft aber auch jenseits *c* in *u*, wo sich wirklich weder das eine, noch das andere befindet. Letzte Darstellungsweise ist also völlig falsch, jede der beiden ersten höchstens halb richtig. Denn mit einem Auge kann man trotz des Accommodationsvermögens nicht beurtheilen, wo sich ein Bild befindet. Eher geschieht dies mit zwei Augen, wenn man folgendermassen verfährt. Man füllt ein möglichst grosses und tiefes durchsichtiges Gefäss, etwa ein Aquarium, ganz mit Wasser, legt auf den Boden ein weisses Steinchen *a*, darüber auf einen durch die Wände des Gefässes gestützten Glasstreifen ein zweites *b*. Blickt man dann bei aufrechter Stellung des Kopfes, wie Fig. 3 in Cavalieri-Perspective darstellt, mit beiden Augen *r*, *l* schräg auf die Wasseroberfläche, so sieht man *a* nach *b* zu gehoben und stets senkrecht darunter, in *c*. Neigt man sich aber, besonders den Kopf, so weit zur Seite, dass, wie Fig. 4 im Durchschnitt zeigt, beide Augen *r*, *l* mit dem Object in derselben Verticalebene liegen, so erblickt man *a* höher gehoben und vor *b* in *k*, so dass die Brücke mit *b* eine Strecke nach dem Beobachter zu, bis *b'* geschoben werden muss, wenn *a* wieder unter *b* erscheinen soll. Der Punkt *c* ist der Ort des secundären Bildes von *a*, wogegen *k* nahezu der seines primären.

Zeigt dieser Versuch schon in etwa, dass, wie Reusch a. a. O. sagt, „noch Manches Eigenthum der elementaren Optik werden kann", so dürfte es sich auch lohnen, die dort behandelten Probleme durch Ueberführen auf das rein graphische Gebiet ohne goniometrische Functionen oder numerische Rechnungen zu lösen und sie damit der elementaren Behandlung, um nicht zu sagen leichter, doch von einer andern Seite zugänglich zu machen. Hierfür eignet sich besonders die schon früher von mir zur Lösung dioptrischer Probleme benutzte Methode,* den gebrochenen Lichtstrahl mittels zweier, der brechenden Kugel concentrischen Kreise zu zeichnen, wobei man nach einer für jede brechende Fläche einmal gemachten Vorzeichnung nur gerade Linien zu ziehen hat. Indem ferner für centrale Strahlen jene Kugeln in Ebenen, Kreise in Gerade übergehen, lassen sich gleicherweise die Bildgrössen, die Lage der Fundamentalpunkte und alle auf die Brechung der Lichtstrahlen in centrirten Linsensystemen bezüglichen Gesetze leicht auffinden.

---

1. Bestimmung der Lage des primären Bildes an der Kugel. Stellt (Fig. 5) der Kreis *K* um *c* den Durchschnitt der Einfallsebene mit einer Kugeloberfläche dar und ist *n* das Brechungsverhältniss, so beschreibt man, um sofort beliebige Strahlengänge zeichnen zu können, aus *c* noch

* Annalen der Physik und Chemie, Neue Folge 15, S. 330—334 (1882).

zwei Kreise: K_n mit n mal grösserem und $K_{1/n}$ mit n-mal kleinerem Halbmesser als K. Trifft dann ein in der Richtung sa kommender Strahl den Kreis K in a, und schneidet derselbe den Kreis K_n auf der a entgegengesetzten Seite in b, so zieht man bc bis d auf $K_{1/n}$ und erhält ad als Austrittsstrahl. Denn weil $bc/ac = ac/cd$, so ist $\triangle abc \sim dac$, mithin der Austrittswinkel $cad = abc$; und wird dieser mit β, der Einfallswinkel bac mit α bezeichnet, so ist $\sin\alpha/\sin\beta = bc/ac = n$.

Um nun das primäre Bild eines bestimmten auf der Geraden sa befindlichen und in dieser Richtung strahlenden Punktes p zu zeichnen, denke man sich zwei von p ausgehende, mit pa unendlich wenig divergirende, in derselben Einfallsebene liegende Strahlen pa_1, pa_2 analog behandelt, also b_1, b_2 auf K_n, d_1, d_2 auf $K_{1/n}$, schliesslich die Austrittsstrahlen a_1d_1, a_2d_2 construirt, welche ad in q, dem primären Bildpunkte von p, schneiden werden. Beschreibt man über ac, bc, cd Halbkreise, deren erster und zweiter ab in o, erster und dritter ad in e schneiden, zieht co, ferner oe bis l auf bc, so ist $\angle coe = cae = cbo$, folglich ol normal bc, $\angle aco = dce$, also

$$1)\qquad \triangle elc \sim dec \sim aoc \text{ und } \triangle clo \sim cea \sim cob.$$

Denkt man sich die Geraden $o(a_1, a_2, b_1, b_2)$, $e(a_1, a_2, d_1, d_2)$, $c(a_1, a_2)$ gezogen und setzt $\angle a_1pa_2 = \delta$, $\angle a_1ca_2 = \varepsilon$, $\angle b_1cb_2 = \eta$, $\angle a_1qa_2 = \zeta$, so wird mit Rücksicht auf die über ac, bc, cd beschriebenen Halbkreise $\angle a_1oa_2 = a_1ea_2 = a_1ca_2 = \varepsilon$, $\angle b_1ob_2 = b_1cb_2 = d_1ed_2 = \eta$, und wegen unendlicher Kleinheit dieser Winkel

$$\varepsilon/\zeta = aq/ae,\quad \zeta/\eta = de/dq,\quad \text{also}\quad \varepsilon/\eta = aq.de/ae.dq,$$

ferner

$$\varepsilon/\delta = ap/ao,\quad \delta/\eta = bo/bp,\quad \text{also}\quad \varepsilon/\eta = ap.bo/ao.bp,$$

also

$$2)\qquad \frac{aq.de}{ae.dq} = \frac{ap.bo}{ao.bp}.$$

Da wegen der Aehnlichkeiten 1) $bo/ao = ae/de$ ist, so folgt aus 2)

$$3)\qquad \frac{bo^2}{ao^2} = \frac{bp.aq}{ap.dq} = \frac{ae^2}{de^2}.$$

Nimmt man anstatt p einen unendlich weit entfernten Strahlpunkt ∞ auf as an und ist dessen Conjunct g, so folgt aus 3), indem $b\infty = a\infty$ gesetzt werden kann, $ag/dg = bo^2/ao^2$. Liegt dagegen ein Punkt f auf sa so, dass sein Conjunct unendlich weit fällt, so folgt analog $bf/af = ae^2/ad^2$, und Gleichung 3) erweitert sich zu

$$4)\qquad \overset{\text{I)}}{\frac{bo^2}{ao^2}} = \overset{\text{II)}}{\frac{bf}{af}} = \overset{\text{III)}}{\frac{bp.aq}{ap.dq}} = \overset{\text{IV)}}{\frac{ag}{dg}} = \overset{\text{V)}}{\frac{ae^2}{de^2}}.$$

Die Gleichung II)—IV) dieser Kette lehrt, dass die aus den Aehnlichkeiten 1) erhellende Proportionalität der einzelnen Stücke der Dreiecke cba und dac sich auch auf die Verlängerungen af und dg erstreckt.

Dieses wie ferner zu Schliessendes wird besonders klar, wenn man den zweiten Schnittpunkt des Kreises K auf dem Einfallstrahl durch h bezeichnet, desgleichen den von $K_{1/n}$ auf dem Austrittsstrahl durch i, womit $ho = oa$, $ie = ed$ wird, dann $\triangle cba$ nebst af aus Fig. 5 umgekehrt in Fig. 6 mit $\triangle cad$ nebst dg in den gleichen Winkeln c zusammenlegt, auch noch $\triangle clo$ ebenso hinzufügt. Man ersieht dann leicht, welcher Weg von der Gleichung 4) I)—II) auf (Fig. 5)

$$5) \qquad bh/ho = oa/af = bo/of,$$

sowie von Gleichung 4), IV)—V) auf

$$6) \qquad ai/ie = ed/dg = ae/eg$$

führt, und warum schliesslich

$$7) \qquad oa/af = oe/el, \text{ sowie } ae/eg = oe/el,$$

mithin ag parallel fl, auch af parallel gl ist.

Setzt man $fp = x$, $gq = y$, $dg = z$, $ag = m.z$ und beachtet, dass $bc = n.ac$, folglich (vergl. Fig. 6) $af = n.z$, $bf = n.m.z$ ist, so geht Gleichung 4) III)—IV) über in

$$\frac{(m.n.z + x)(m.z + y)}{(n.z + x)(z + y)} = \frac{m.z}{z},$$

woraus folgt

$$n.m.z^2 = x.y$$

oder restituirt

$$8) \qquad af.ag = fp.gq.$$

Gleichung 8), nebst dem aus Gleichung 7) unmittelbar Gefolgerten, dass $aflg$ ein Parallelogramm ist, lehrt, dass jegliche Gerade, welche zwei auf dem gebrochenen Strahle sad gelegene, wie p und q conjugirte Punkte verbindet, durch den Punkt l gehen muss, oder: dass der Punkt l ein Fixpunkt* für derartige Verbindungsgeraden ist.

---

* Die Lage dieses Fixpunktes l ist bereits von Reusch a. a. O., aber mehr arithmetisch als graphisch bestimmt worden. In seiner Fig. 6, welche die Abbildung an der Kugel allgemein erläutern soll, befindet sich derselbe mit J bezeichnet an einer Stelle, die er in keinem der aus den Alternativen $n \gtrless 1$, $r \gtrless 0$ sich ergebenden vier möglichen Fälle wirklich erhalten kann, nämlich bei $\odot (J)$ unserer Fig. 5, ausserhalb des von den secundären Brennstrecken gebildeten Parallelogramms $asct$. Daher schneidet bei Reusch die Verbindung des primären und des secundären Fixpunktes (letzterer ist der Mittelpunkt der Kugel) den Einfallsstrahl in einem Punkte λ, der identisch mit unserem Punkte b sein sollte und doch scheinbar auf der entgegengesetzten Seite von a liegt. Diese Figur (6, Reusch) ist also graphisch unrichtig und hat nur eine analytische, keine darstellende Bedeutung. Dagegen haben in Reusch Fig. 10 (Abbildung durch eine Linse) die Fixpunkte J, J_1 richtige Lagen. Die von Reusch gegebenen Coordinaten des Fixpunktes l, bezüglich des Einfalls- und Austrittsstrahles als Axen, finden sich auch aus unserer Figur leicht, z. B.:

Hiernach bestimmt sich die Lage von q als des primär mit p über den Einfallspunkt a conjugirten Punktes folgendermassen.

Man zeichnet, wie eingangs beschrieben, den Austrittsstrahl ad, zieht co normal zu ab, ol normal zu bc, endlich pl bis q auf ad.

Für einen zwischen f und a gelegenen Strahlpunkt p' (Fig. 5) würde der Conjunct q' auf die Verlängerung von ad über a hinaus fallen.

2. Bestimmung der Lage des primären Bildes an der Ebene durch Ableitung aus voriger Construction. Denkt man sich (Fig. 5) den Radius der Kugel veränderlich, den Einfallswinkel aber constant, so bleibt bis auf p, q und die davon abhängigen Strahlen die Figur sich selbst ähnlich, insbesondere die Richtung al dieselbe. Wird also der Radius der Kugel unendlich, mithin das Flächenelement $a_1 a_2$ eben, so liegt daher der Fixpunkt l im Unendlichen. Die Lage von q bestimmt sich alsdann dadurch, dass man zu der Geraden al der Figur durch p eine Parallele bis q auf ad zieht. Oder ist (Fig. 7) p das Homocentrum eines auf die Ebene $M_1 M_2$ fallenden unendlich dünnen Strahlenfächers, ah das Einfallsloth, n das Brechungsverhältniss, und soll das primäre Bild des Punktes p construirt werden, so nimmt man auf ah oder auf dessen Verlängerung über a beliebig einen Punkt c an, aus welchem man mit den Radien $n.ac$, ac/n die Kreise K_n, $K_{1/n}$ beschreibt, findet, wie bei Fig. 5, die Punkte b, d, o, l und zieht zu al durch p eine Parallele, die ad in dem gesuchten Punkte q schneidet.

Man kann auch, nachdem mit d die Richtung des Austrittsstrahles gefunden ist, zu $M_1 M_2$ durch p eine Normale ziehen, die auf ad in q' die Lage des secundären Bildes bestimmt, bc verlängert in s schneidet. Zieht man dann st normal zu bp, tu normal zu bs, so schneiden sich up und ad in dem primären Bildpunkte q.

3. Directe Construction der Lage des primären Bildes an der Ebene. Will man den speciellen Fall der Brechung und Abbildung an der Ebene unabhängig von dem allgemeinen bezüglich der Kugel behandeln, so ist auch erst graphisch das Aenderungsgesetz conjugirter Brechungswinkel an der Ebene zu ermitteln.

Liegt (Fig. 8) das Homocentrum c eines unendlich dünnen Strahlenfächers in der brechenden Ebene, ist ch das Einfallsloth, n das Brechungsverhältniss, so beschreibt man aus c zwei Kreise K, K_n, deren Radien sich wie 1 zu n verhalten. Schneidet K den Strahlenfächer in a_1, a, a_2, so legt man zum Einfallsloth durch a_1, a, a_2 Parallelen bis b_1, b, b_2 auf K_n und zieht den Strahlenfächer $c(b_1, b, b_2)$. Dann sind ach, bch oder

---

$$af = lg = \frac{ab.ld}{bd} = \frac{\sin\alpha\left(\frac{r}{n} - r\sin\alpha\sin\beta\right)}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{r\sin\alpha\cos^2\alpha}{n\sin(\alpha-\beta)} = \frac{r\cos^2\alpha}{n\cos\beta - \cos\alpha}.$$

cao, *cbo* die conjugirten Brechungswinkel, $a_1ca_2 = \Delta\alpha$, $b_1cb_2 = \Delta\beta$ deren relative Aenderungen. Zieht man die Geraden $o(a_1, a_2, b_1, b_2)$, so sind, wie die über *ac*, *bc* beschriebenen Halbkreise, beide durch *o* gehend, zeigen, $\angle a_1oa_2 = \Delta\alpha$, $b_1ob_2 = \Delta\beta$, also $\Delta\alpha/\Delta\beta = bo/ao$.

Bilden also zwei conjugirte Brechungswinkel ein Dreieck, so verhalten sich deren Aenderungen indirect wie die ihnen anliegenden Abschnitte, in welche ihre gemeinschaftliche Seite durch das aus der dritten Ecke gefällte Loth getheilt wird.

Goniometrisch heisst derselbe Satz: $\Delta\alpha/\Delta\beta = tg\alpha/tg\beta$ und wird als Ableitung aus dem Brechungsgesetz gewöhnlich in der Form $\Delta\alpha/\Delta\beta = n.\cos\beta/\cos\alpha$ gegeben.

Das Ganze ist in Fig. 9 besonders dargestellt. Sind α, β conjugirte Brechungswinkel, so verhalten sich die ihnen gegenüberliegenden Seiten *bc*, *ac* wie die Geschwindigkeiten des Lichts in den zugehörigen Mitteln. Ist *co* normal zu *ab*, und natürlich $\angle bca = \gamma$ der Ablenkungswinkel, so ist $\Delta\alpha/bo = \Delta\beta/ao = \Delta\gamma/ab$.

Da nun bei Strahlen an einer Ebene die Einfallswinkel durch irgendwelche Parallelverschiebung nicht geändert werden, so kann man unbeschadet der Anwendung des eben Bewiesenen das Homocentrum auch nach *a* ausserhalb der brechenden Ebene verlegen und dafür (Fig. 10) gesonderte Einfallspunkte c_1, c, c_2 annehmen. Um dann möglichst einfach zu allen durch *a* gehenden Strahlen die conjugirten Austrittsstrahlen zu erhalten, trägt man auf dem Lothe *oa* die Strecke $od = n.oa$ ab, zieht zur brechenden Ebene durch *d* eine Parallele, die den Strahlenfächer in e_1, e, e_2 schneidet, beschreibt aus c_1, c, c_2 mit c_1e_1, ce, c_2e_2 Kreise bis b_1, b, b_2 auf *oa* und zieht alle *cb*, die sich in *f*, dem Conjuncte von *a*, schneiden müssen.

Die Lage des Punktes *f* lässt sich, wie früher die von *q*, analytisch bestimmen. Denkt man sich durch *f* einen Kreis gelegt, der die Ebene in *c* berührt, so müssen, da auch c_1, c_2 als in dessen Peripherie liegend angesehen werden dürfen, alle auf c_1c_2 stehenden und auf jener Peripherie scheitelnden Winkel gleich $c_1fc_2 = \Delta\beta$ sein. Schneidet derselbe Kreis den Einfallsstrahl in *g*, und denkt man sich $g(c_1, c_2)$ gezogen, so wird also auch $\angle c_1gc_2 = \Delta\beta$ sein. Da aber $\Delta\alpha = c_1ac_2$, nach dem vorigen Satze $\Delta\alpha/\Delta\beta = bo/ao$ und $\angle c_1ac_2/\angle c_1gc_2 = gc/ac$ wegen unendlicher Kleinheit dieser Winkel ist, so muss $bo/ao = gc/ac$, d. h. *bg* parallel *co* werden. Schneidet endlich gedachter Kreis das mittlere Einfallsloth in *h*, so sind $\angle cgh$ und $\angle cfh$ Rechte und man kann also die Lage des Punktes *f* folgendermassen finden.

Man zeichnet, wie eben erklärt, die Richtung des Austrittsstrahles *bc*, legt zu *co* durch *b* eine Parallele bis *g* auf *ca*, zieht zu *cg* durch *g* eine Normale bis *h* auf dem Einfallsloth, endlich *hf* normal auf *bc*.

Bei der Ausführung von Fig. 10 war $n = 4/3$ angenommen. Fig. 11 zeigt dieselbe Construction nebst Beweishilfslinien unter gleicher Bezeichnung für den reciproken Werth $n' = 3/4$.

Nimmt die Zeichnung ein zu grosses Feld in Anspruch, so zieht man (Fig. 10) von einem beliebigen Punkte u des Einfallslothes die Lothe uw auf ac, uv auf bc, endlich zu wv durch g eine Parallele bis f auf bc. Oder, da $\angle fhg = \angle fcg = \gamma$, $\angle fgh = fch = \beta$, also $\angle cfg = \Re - \alpha = cgb$, daher $\triangle cgf \sim cbg$, so ist $cb/cg = cg/cf$, und man kann, nachdem b und g erhalten sind, f auch folgendermassen bestimmen. Man beschreibt aus c mit cg einen Kreis bis i auf cb, zieht zu ei durch g eine Parallele bis f auf bc. Reusch zieht, nachdem b erhalten ist (Fig. 12), zu oc Parallelen durch a bis s, durch b bis t auf dem Einfallsloth, su normal auf ac, tv normal auf bc, endlich zu uv durch a eine Parallele bis f auf bc. Aehnlich ist Fig. 10: ax normal auf ao bis auf brechende Ebene, xb bis h und dann wie oben.

4. Zeichnung centraler Strahlengänge. Wenn auf eine brechende Kugelfläche Strahlen unter unendlich kleinen Winkeln einfallen, so ergeben sich die Austrittsstrahlen nach unserer Methode dadurch, dass man die erforderliche Vorzeichnung in einem normal zur Axe unendlich vergrösserten Maassstabe entwirft, d. h. an Stelle der Kreise die Ordinaten ihrer Scheitelpunkte treten lässt. Die unendlich kleinen Brechungswinkel erscheinen dann in endlicher Grösse. Dieser Uebergang ist von Fig. 13 nach Fig. 14 dargestellt. In Fig. 13 sind oberhalb der Axe die Wege zweier von p ausgegangener, unter endlichen Winkeln auf die Fläche K, deren Radius $oc = r$ ist, eingefallenen Strahlen mittels der Hilfskreise K_n, $K_{1/n}$, deren Radien $cs = n.r$, $ct = r/n$, construirt, woraus der nach den Grössen des Einfallswinkels μ, ν veränderlich gelegene secundäre Conjunct u_μ, u_ν hervorgeht. Unterhalb der Axe (Fig. 13) gilt ein reciprokes Brechungsverhältniss $n' = 1/n$: daher dieselben Hilfskreise in umgekehrter Bedeutung und Benutzung. In einem Falle ist hier der Conjunct u'. Für unendlich kleine Einfallswinkel geht diese Figur in Fig. 14 mit analoger Bezeichnung über. An Stelle der Kreise K, K_n, $K_{1/n}$ treten die nach den Scheitelpunkten benannten Normalen O, S, T. Der alsdann zu p conjugirt sich ergebende Punkt u_0 wird offenbar unabhängig von der Elevation des Strahles pa_0, coincidirt also auch mit dem diesfälligen primären Conjunct.

Die Beziehung, in welcher unsere Constructionsmethode zu anderen bereits bekannten dieser Art steht, mag aus Fig. 15 ersehen werden.

I. Für die Methode Reusch* lassen sich S und T benutzen, weil ja $(r + nr)/(r + r/n) = n/1$ ist. Der Einfallsstrahl schneidet T in g. Man zieht

* Constructionen zur Lehre von den Haupt- und Brennpunkten eines Linsensystems. 1870, § 2 S. 3.

zu ac durch g eine Parallele bis h auf S und erhält ah als Austrittsstrahl.

II. Für die Methode Gavarret* dienen die Ordinaten F, F' der Brennpunkte f, f'. Wird F vom Einfallsstrahl in i geschnitten, so zieht man zu ci durch a eine Parallele, welche der Austrittsstrahl ist. Oder man zieht zum Einfallsstrahl durch c eine Parallele bis j auf F', wonach aj der Austrittsstrahl ist.

III. Für die von Ferraris** benutzte Methode macht man, wenn der Einfallsstrahl die Mittelpunktsordinate C in k schneidet, auf letzterer $cl = ck/n$, alsdann ist al der Austrittsstrahl.

Es leuchtet ein, dass ah, aj, al mit dem nach unserer Methode gezeichneten Wege ad coincidiren.

Als Beispiel allgemeiner Anwendbarkeit dieser Methode folge die Bestimmung der Fundamentalpunkte einer Linse, sowie die eines Bildortes und Bildgrössenverhältnisses bei derselben. Sind (Fig. 16) o_1, o_2 die Scheitelpunkte, c_1, c_2 die Mittelpunkte der Flächen einer Linse, sind auch die Ordinaten O_1, O_2, dann nach dem Brechungsverhältniss, wie bei Fig. 14, S_1, T_1 für die erste, S_2, T_2 für die zweite Fläche construirt, und schneidet ein axenparallel zuerst auf O_1 in a'_1 einfallender Strahl die S_1 in b'_1, so zieht man $c_1 b'_1$ bis d'_1 auf T_1, $a'_1 d'_1$ bis a'_2 auf O_2 und bis b'_2 auf S_2, $c_2 b'_2$ bis d'_2 auf T_2, $d'_2 a'_2$ bis f' auf der Axe und bis g' auf dem Einfallsstrahl, zur Axe normal durch g' bis h' auf der Axe. Alsdann ist f' der zweite Brennpunkt, h' der zweite Hauptpunkt der Linse. Geht man von einem axenparallel in entgegengesetzter Richtung zuerst auf O_2 einfallenden Strahle aus, so ergiebt sich analog f als erster Brennpunkt, h als erster Hauptpunkt.

Um den Ort des Bildes eines Objects, das in einer zur Axe senkrechten Ebene liegt, sowie das Grössenverhältniss beider unabhängig von der Kenntniss der Fundamentalpunkte zu finden, nimmt man, wenn die Objectebene von der Axe in p geschnitten wird, einen beliebigen von p aus in (a_1) auf O_1 einfallenden Strahl und erhält nach obigem Verfahren die Punkte (b_1), (d_1), (a_2), (b_2), (d_2), q, wonach q das Bild von p ist. [Behufs grösserer Deutlichkeit durch Ersparniss von Linien in Fig. 16 ist der Einfallsstrahl so geführt, dass (b_1) mit b'_1, (d_1) mit d'_1 coincidirt.] Schneidet sodann der zur Construction des zweiten Brennpunktes benutzte Einfallsstrahl $a'_1 b'_1$ (anstatt welches auch ein beliebiger anderer, nur nicht ein durch p gehender Strahl genommen werden dürfte) die Objectebene in p', der zu $a'_1 b'_1$ conjugirte (hier durch f' gehende) Aus-

---

* Constructionen etc. § 6 S. 8.

** Die Fundamentaleigenschaften der dioptrischen Instrumente. Uebersetzt von F. Lippich. 1879, Art. 4 S. 5.

trittsstrahl $d'_2 a'_2$ die Bildebene in q', so ist q' das Bild von p', mithin qq'/pp' das verlangte Bildgrössenverhältniss.

Um lediglich die Hauptpunkte einer Linse zu bestimmen, ist als Beispiel in Fig. 17 eine convex-concave dicke Linse mit analoger Bezeichnung gewählt. Man zieht durch c_1 eine beliebige Gerade bis b_1 auf S_1 und bis d_1 auf T_1, parallel hierzu durch c_2 bis b_2 auf S_2 und bis d_2 auf T_2, ferner $d_1 b_2$ bis a_1 auf O_1 und bis a_2 auf O_2, $a_1 b_1$ bis h_1 auf der Axe, desgleichen $a_2 d_2$ bis h_2. Alsdann sind, wie leicht zu beweisen, h_1, h_2 die Hauptpunkte der Linse. Die Geraden $b_1 d_2$, $b_2 d_1$ schneiden sich übrigens in dem optischen Mittelpunkte m der Linse.

Wiesbaden, September 1883.

Berichtigungen.

Seite 2 Zeile 13: $u_1 a_1$ statt $u_1 a_2$.

„ 4 „ 1: im Nenner der Gleichung 9) $(\breve{n}\bar{n} - 1)d$ statt $(\breve{n}\bar{n} - d)$.

„ 8 „ 24: im Nenner der Gleichung 30) $\bar{a}_2$, $\breve{a}_2$ statt $\bar{a}$, $\breve{a}$.

„ 9 „ 21: $\Delta h' = 9\frac{5}{7}$ statt $\Delta h = 9\frac{5}{7}$.

„ 9 „ 22: $\Delta b'_1 = 30\frac{8}{15}$ statt $\Delta b' = 30\frac{8}{15}$.

„ 10 „ 26: $o_2 \breve{e}_2 / \breve{n}.\ c_2 \breve{u}_2$ statt $o_2 \breve{e}_2 / \bar{n}.\ c_2 \breve{u}_2$.

„ 17 „ 6: § 11 statt § 10.

„ 17 „ 26: $\bar{f}h$ statt fh und $\bar{h}'\bar{f}'$ statt $\bar{h}f'$.

„ 20 „ 28: $\bar{s}'$ statt s'.

V.

Ueber Länge und Vergrösserung, Helligkeit und Gesichtsfeld des Kepler-, Ramsden- und Campani-Fernrohrs.

Von

Dr. C. Bohn

in Aschaffenburg.

(Schluss.)

C. Gesichtsfeld.

Die nach Euler's Vorgang allgemein übliche Beschränkung des Gesichtsfeldes auf solche Punkte, von denen noch der Hauptstrahl, d. h. der durch den optischen Mittelpunkt des Objectivs gegangene Strahl ins Auge gelangt, werde auch hier beibehalten.

Für die mit Sammellinsen-Ocular versehenen Fernrohre lässt sich bekanntlich ein Punkt, der sogenannte Augenpunkt, auf der optischen Axe angeben, durch welchen alle vom optischen Mittelpunkte des Objectivs gekommene und aus dem Augenglase tretende Strahlen hindurchgehen. Es ist das der Punkt, in welchem das reelle Bild des optischen Mittelpunktes des Objectivs durch das Ocular (einfaches oder zusammengesetztes) entworfen wird. Dieser Augenpunkt liegt um etwas mehr als die äquivalente Brennweite des Oculars hinter dem optischen Mittelpunkte der an ihre richtige Stelle gedachten, dem Ocularlinsensystem äquivalenten Linse. Die genaue Berechnung des Abstands des Augenpunktes vom Augenglase ist umständlich, derselbe tritt als Wurzel einer quadratischen Gleichung auf, — die zweite Wurzel ist negativ und hat keine physikalische Bedeutung. Für den besondern Fall unendlicher Gegenstands- und unendlicher Sehweite berechnet sich einfach der Abstand des Augenpunktes vom Ocular gleich

$$f+\frac{f^2}{F} \quad (G=\infty \text{ und } d=\infty).$$

Es ist nicht nöthig, das Auge so weit hinter das Augenglas zu entfernen, um das ganze Gesichtsfeld auf einmal zu übersehen. Denn die Pupille hat eine gewisse Oeffnung (mittlerer Durchmesser 5 mm) und man kann, ohne Einbusse am Gesichtsfelde zu erleiden, das Auge daher so

weit vorrücken, bis die Pupillenöffnung gleich ist dem Querschnitte des aus dem Augenglase des Oculars tretenden, vom optischen Mittelpunkte des Objectivs herkommenden und nach dem „Augenpunkte" convergirenden Strahlenbündels. Hierauf beschränkt sich bei Fernrohren mit Sammellinsen-Ocular der Einfluss der Pupillenweite auf das Gesichtsfeld, während bei Galilei'schem Fernrohre (mit zerstreuendem Ocular) die Grösse des Gesichtsfeldes wesentlich von der Oeffnung der Pupille bedingt wird.*

Kepler-Fernrohr.

Das Gesichtsfeld des Kepler-Fernrohrs ist ein Kegel, dessen Spitze der optische Mittelpunkt des Objectivs, dessen Grundfläche der nicht abgeblendete Theil des Augenglases ist. Bezeichnet φ den halben Oeffnungswinkel dieses Kegels oder Gesichtsfeldes, so findet man für das Kepler-Fernrohr:

$$tg\,\varphi_K = \frac{s}{2l}, \tag{45}$$

wenn wieder s den Oeffnungsdurchmesser des Augenglases und l die Fernrohrlänge bedeuten. Setzt man den Werth von l_K nach Formel 3) ein, schreibt aber der Kürze halber B für $\frac{GF}{G-F}$, so erhält man:

$$tg\,\varphi_K = \frac{s}{2}\cdot\frac{f+d-e}{Bf+(d-e)(B+f)}, \tag{46}$$

woraus die Sonderfälle:

für unendlich fernen Gegenstand:

$$tg\,\varphi_K = \frac{s}{2}\cdot\frac{f+d-e}{F+(d-e)(F+f)} \quad (G=\infty),$$

für unendlich grosse Sehweite:

$$tg\,\varphi_K = \frac{s}{2}\cdot\frac{1}{B+f} \quad (d=\infty),$$

für unendlich fernen Gegenstand und Accomodation auf parallele Strahlen:**

---

* Siehe Bohn: Ueber das Gesichtsfeld des Galilei'schen Fernrohres. Carl's Repertorium IX, 97 (1873).

** Nimmt man an, es sei die Ocularöffnung allezeit derselbe Bruchtheil der Brennweite, so lässt sich die Tangente des halben Gesichtsfeldes für den besondern Fall $G=\infty$ und $d=\infty$ in die Form bringen:

$$tg\,\varphi_K = \frac{const}{\frac{F}{f}+1} = \frac{const}{V+1} \quad (G=\infty \text{ und } d=\infty).$$

Der häufig in den Lehrbüchern vorkommende Satz, das Gesichtsfeld des Kepler-Fernrohrs sei verkehrt proportional der Vergrösserung, ist also selbst bei Annahme der besonderen Bedingungen, die oben ausgesprochen sind, — nur eine mässige Annäherung.

$$tg\,\varphi_K = \frac{s}{2} \cdot \frac{1}{F+f} \quad (G = \infty \text{ und } d = \infty).$$

Es ist also allgemein das Gesichtsfeld (genauer die Tangente des halben Oeffnungswinkels desselben) des Kepler-Fernrohrs

1. proportional dem Oeffnungsdurchmesser des Oculars,
2. verkehrt proportional der Länge des Fernrohrs.

Das heisst, es wird

3. mit zunehmender Brennweite F des Objectivs kleiner,
4. mit zunehmender Gegenstandsentfernung G grösser,
5. mit zunehmender Ocularbrennweite f kleiner,
6. mit zunehmender Sehweite d kleiner.

Bemerkung. Der Augenabstand e ist nicht mehr willkürlich, wenn das grösstmögliche Gesichtsfeld überblickt werden soll, sondern muss die oben angegebene Grenze einhalten.

Zahlenbeispiele für das Gesichtsfeld des Kepler-Fernrohrs.

I. $F = 30$ cm, $f = 2$ cm, $e = 1$ cm, $s = 0{,}4f = 0{,}8$ cm.,
$d = \infty$, $G = \infty$, $\varphi_K = 42'\,00''$;

$$d = 20 \text{ cm} \begin{cases} G = 1000\text{ m} \quad 100\text{ m} \quad 20\text{ m} \\ \varphi_K = 43'\,13'' \quad 43'\,06'' \quad 42'\,29''. \end{cases}$$

II. $F = 40$ cm, $f = 1$ cm, $e = 0{,}5$ cm, $s = 0{,}4f = 0{,}4$ cm,
$d = \infty$, $G = \infty$, $\varphi_K = 16'\,46''$;

$$d = 20 \text{ cm} \begin{cases} G = 1000\text{ m} \quad 100\text{ m} \quad 20\text{ m} \\ \varphi_K = 16'\,47'' \quad 16'\,43'' \quad 16'\,32''. \end{cases}$$

Ramsden-Fernrohr.

Das Gesichtsfeld der Fernrohre mit Collectivglas ist ein Kegel, dessen Spitze der optische Mittelpunkt des Objectivs ist und dessen Grundfläche der wirksame Theil des Collectivs ist, d. h. jener Theil, durch dessen Verengerung der Strahlenkegel, welcher (ursprünglich vom optischen Mittelpunkte des Objectivs herkommend) schliesslich aus dem Augenglase tritt und nach dem „Augenpunkte“ convergirt, verengt würde.

Die für das Gesichtsfeld nützlichen Oeffnungen von Collectiv und Augenglas bedingen einander derart, dass das ganze aus dem Collectiv tretende Strahlenbündel, welches vom optischen Mittelpunkte des Objectivs ausging und nun nach einem Punkte auf der Axe in der Entfernung x hinter dem Collectiv convergirt, dass dieses ganze Strahlenbündel auch Durchgang im Augenglase finde. Ist s der Oeffnungsdurchmesser des Augenglases und s_2 jener des für das Gesichtsfeld nützlichen Theils des Collectivs, so muss sein bei Ramsden-Ocular:

$$s : s_2 = x - \tfrac{2}{3}f : x.$$

Die Grösse x ist aber bestimmt durch:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{l-\frac{4}{5}f}=\frac{1}{\frac{8}{5}f},$$

woraus:

$$x=\tfrac{8}{5}f\cdot\frac{5l-4f}{5l-13f} \quad\text{und}\quad x-\tfrac{4}{5}f=\tfrac{1}{5}f\cdot\frac{25l+16f}{5l-13f}.$$

Dies benutzend, erhält man:

$$s_2=s.9\,\frac{5l-4f}{25l+16f}$$

und die Verhältnisse der Oeffnungsdurchmesser zu den Brennweiten der Linse verhalten sich:

$$\frac{s_2}{\frac{8}{5}f}:\frac{s}{f}=\frac{25l-20f}{25l+16f}.$$

Das heisst: die für das Gesichtsfeld nützliche Oeffnung des Collectivs ist ein kleinerer Bruchtheil der Brennweite, als das beim Augenglase statthat. Für gegebenes Augenglas dem Collectiv die für das maximale Gesichtsfeld erforderliche Oeffnung zu geben, ist also hinsichtlich der Aberration unbedenklich.

Ist nun die Collectivöffnung von der genügenden Grösse f_2 (oder darüber), so berechnet sich die Tangente des halben Oeffnungswinkels des Gesichtsfeldes im Ramsden-Fernrohr:

$$47)\qquad tg\,\varphi_R=\frac{s_2}{2}\cdot\frac{1}{l-\frac{4}{5}f},$$

und nach Einsetzung des Werthes von l_R [nach Formel 5)], Ausdrücken von s_2 durch s und einigen Zusammenziehungen kommt:

$$48)\qquad tg\,\varphi_R=\frac{s}{2}\cdot\frac{45\,[f+2(d-e)]}{25\,Bf+(d-e)(50\,B+81\,f)},$$

woraus die Sonderfälle:

für unendliche Gegenstandsweite:

$$tg\,\varphi_R=\frac{s}{2}\cdot\frac{45[f+2(d-e)]}{25Ff+(d-e)(50\,F+81f)]}\quad (G=\infty);$$

für unendliche Sehweite:

$$tg\,\varphi_R=\frac{s}{2}\cdot\frac{90}{50\,B+81f}\quad (d=\infty);$$

für unendliche Gegenstandsweite und Accomodation auf parallele Strahlen:

$$tg\,\varphi_R=\frac{s}{2}\cdot\frac{90}{50\,F+81f}\quad (G=\infty \text{ und } d=\infty).$$

Allgemein lassen sich für das Gesichtsfeld des Ramsden-Fernrohrs dieselben Schlüsse ziehen, die unter 1), dann 3) bis 6) für das Gesichtsfeld des Kepler-Fernrohrs bereits aufgestellt worden.

Zahlenbeispiele für das Gesichtsfeld des Ramsden-Fernrohrs.

I. $F = 30$ cm, $f = 2$ cm, $e = 1$ cm, $s = 0{,}4f = 0{,}8$ cm,
$d = \infty$, $G = \infty$; $\varphi_R = 1^0\,14'\,27''$;

$$d = 20 \text{ cm} \begin{cases} G = & 1000 \text{ m} & 100 \text{ m} & 20 \text{ m} \\ \varphi_R = & 1^0\,14'\,47'' & 1^0\,14'\,36'' & 1^0\,13'\,48''. \end{cases}$$

II. $F = 40$ cm, $f = 1$ cm, $e = 0{,}5$ cm, $s = 0{,}4f = 0{,}4$ cm,
$d = \infty$, $G = \infty$; $\varphi_R = 29'\,47''$;

$$d = 20 \text{ cm} \begin{cases} G = & 1000 \text{ m} & 100 \text{ m} & 20 \text{ m} \\ \varphi_R = & 29'\,46'' & 29'\,40'' & 29'\,19''. \end{cases}$$

Für Ausrechnung dieser Beispiele war, da schon früher die Fernrohrlängen berechnet waren (S. 30), eine andere Formel bequem, die auch selbstständig Interesse genug bietet, um hier mitgetheilt zu werden. Nämlich:

$$49)\qquad tg\,\varphi_R = \frac{s}{2} \cdot \frac{45}{25l + 16f}.$$

Die Vergleichung der Zahlen in den Beispielen für Ramsden-Fernrohre und für Kepler-Fernrohre mit gleichem Objectiv, Gegenstands- und Sehweite und gleichen Brennweiten des Augenglases lehrt schon, dass das Gesichtsfeld des Ramsden- fast doppelt so gross ist, als jenes des Kepler-Fernrohrs. Die allgemeine Vergleichung liefert:

$$50)\qquad \frac{tg\,\varphi_R}{tg\,\varphi_K} = 45 \cdot \frac{f + 2(d-e)}{f + (d-e)} \cdot \frac{Bf + (d-e)(B+f)}{25\,Bf + (d-e)(50\,B + 81f)};$$

im Besondern für unendliche Gegenstandsweite und Accomodation auf parallele Strahlen:

$$\frac{tg\,\varphi_R}{tg\,\varphi_K} = 90 \cdot \frac{F+f}{50\,F + 81f} \quad (G = \infty \text{ und } d = \infty).$$

Will man das Gesichtsfeld gleich stark vergrössernder Ramsden- und Kepler-Fernrohre bei gleichem Objectiv u. s. w. vergleichen, so muss man die Brennweite des Augenglases am Ramsden-Ocular grösser machen, nämlich nach 11) gleich $\frac{10f(d-e)}{9(d-e)+4f}$. Dadurch wird das Gesichtsfeld des Ramsden-Fernrohrs ein wenig kleiner, nämlich:

$$51)\qquad tg\,\varphi_{R'} = \frac{s}{2} \cdot 9 \frac{f + d - e}{5\,Bf + (d-e)(5\,B + 9f)},$$

ein Ausdruck, der etwas einfacher ist, als der früher [48)] gegebene, in welchem die Brennweite des Augenglases durch ein einfaches Zeichen (f) dargestellt ist.

Für unendliche Gegenstands- und Sehweite folgt:

$$tg\,\varphi_{R'} = \frac{s}{2} \cdot \frac{9}{5\,F + 9f} \quad (G = \infty \text{ und } d = \infty),$$

wie man leichter durch unmittelbare Benutzung der Formeln 14) und des betreffenden Sonderfalls von 48) finden kann.

Schliesslich ergiebt sich:

$$52)\qquad \frac{tg\,\varphi_{R'}}{tg\,\varphi_{K'}} = 9\,\frac{Bf+(d-e)(B+f)}{5\,Bf+(d-e)(5B+9f)}$$

und im Besondern:

$$\frac{tg\,\varphi_{R'}}{tg\,\varphi_{K'}} = 9\,\frac{F+f}{5F+9f}\quad (G=\infty \text{ und } d=\infty).$$

Das gleich stark vergrössernde Ramsden-Fernrohr hat also bei gleichem Absolutwerthe der Augenglasöffnung (s) ein annähernd $\frac{9}{5}$ mal so grosses Gesichtsfeld, als das Kepler-Fernrohr, gleiches Objectiv u. s. w. vorausgesetzt. Da das Augenglas des gleich stark vergrössernden Ramsden-Oculars eine grössere Brennweite als das Kepler-Augenglas hat, so wird, wenn man beiden Augengläsern gleiche relative Oeffnungen (im Verhältniss zu ihren Brennweiten) giebt, das Gesichtsfeld des Ramsden-Fernrohrs noch etwas grösser. Und zwar wird annähernd (genau bei $G=\infty$ und $d=\infty$) bei gleicher relativer Oeffnung der Werth des Augenglases am Ramsden-Ocular $\frac{10}{9}$ mal jenem des Kepler-Oculars, demnach bei gleicher relativer Oeffnung der Augengläser, das Gesichtsfeld des gleich stark vergrössernden Ramsden-Fernrohrs nicht annähernd $\frac{9}{5}$, sondern annähernd zweimal so gross, als jenes des Kepler-Fernrohrs. Genau:

$$\frac{tg\,\varphi_{R_1}}{tg\,\varphi_{K_1}} = \frac{10F+10f}{5F+9f}\quad (G=\infty \text{ und } d=\infty)$$

(der untere Strich am Index soll andeuten gleiche Vergrösserung der Fernrohre und gleiche relative Oeffnung der Augengläser).

Campani-Fernrohr.

Die einleitenden Worte zur Untersuchung des Gesichtsfeldes des Ramsden-Oculars wären hier zu wiederholen.

Damit die ganze Oeffnung (s) des Augenglases für das Gesichtsfeld des Campani-Fernrohrs nutzbar werde, muss der Durchmesser s_2 der Collectivöffnung der Bedingung genügen:

$$s_2 : s = x : x-2f,$$

wenn x bedeutet die Entfernung des Punktes (auf der optischen Axe), nach welchem die ursprünglich vom optischen Mittelpunkte des Objectivs herkommenden Strahlen nach der Brechung im Collectiv (Brennweite $3f$) convergiren. Zur Bestimmung von x dient:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{l-2f}=\frac{1}{3f},$$

woraus:

$$x = 3f\frac{l-2f}{l-5f} \quad \text{und} \quad x - 2f = f\cdot\frac{l+4f}{l-5f}.$$

Dies benutzend, erhält man:

$$s_2 = 3s\frac{l-2f}{l+4f}$$

und die Verhältnisse der Oeffnungsdurchmesser zu den Brennweiten der Linsen verhalten sich:

$$\frac{s_2}{3f}:\frac{s}{f} = \frac{l-2f}{l+4f},$$

das heisst: das Collectiv braucht nur eine relativ geringere Oeffnung zu haben, als das Augenglas des Campani-Oculars, um das Gesichtsfeld des Campani-Fernrohrs zu dem von der Augenglasöffnung abhängenden Maximum anwachsen zu lassen. Die Vorbedingung für dieses ist also leicht erfüllbar.

Ist nun die Collectivöffnung von der genügenden Grösse s_2 (oder darüber), so berechnet sich die Tangente des halben Oeffnungswinkels des Gesichtsfeldes im Campani-Fernrohr:

$$53) \qquad tg\,\varphi c = \frac{s_2}{2}\cdot\frac{1}{l-2f},$$

und nach Einsetzung des Werthes von l_C (nach Formel 8), Ausdrücken von s_2 durch s und einigen Zusammenziehungen kommt

$$54) \qquad tg\,\varphi c = \frac{s}{2}\cdot\frac{3[f+2(d-e)]}{Bf+(d-e)(2B+9f)},$$

woraus die Sonderfälle:

für unendlich ferne Gegenstandsweite:

$$tg\,\varphi c = \frac{s}{2}\cdot\frac{3[f+2(d-e)]}{Ff+(d-e)(2F+9f)} \quad (G=\infty),$$

für unendliche Sehweite:

$$tg\,\varphi c = \frac{s}{2}\cdot\frac{6}{2B+9f} \quad (d=\infty),$$

für unendliche Gegenstandsweite und Accomodation auf parallele Strahlen:

$$tg\,\varphi c = \frac{s}{2}\cdot\frac{6}{2F+9f} \quad (G=\infty \text{ und } d=\infty).$$

Allgemein lassen sich für das Gesichtsfeld des Campani-Fernrohrs dieselben Schlüsse ziehen, die unter 1), dann 3) bis 6) für das Gesichtsfeld des Kepler-Fernrohrs (S. 76) und für jenes des Ramsden-Fernrohrs (S. 77) bereits aufgestellt wurden.

Zahlenbeispiele für das Gesichtsfeld des Campani-Fernrohrs.

I. $F = 30$ cm, $f = 2$ cm, $e = 1$ cm, $s = 0{,}4f = 0{,}8$ cm,
$d = \infty$, $G = \infty$; $\varphi c = 1^\circ\,45'\,45''$;

$$d = 20\text{ cm} \left\{ \begin{array}{llll} G = & 1000\text{ m} & 100\text{ m} & 20\text{ m} \\ \varphi_C = & 1^0\,46'\,57'' & 1^0\,46'44'' & 1^0\,45'43''. \end{array} \right.$$

II. $F = 40$ cm, $f = 1$ cm, $e = 0{,}5$ cm, $s = 0{,}4 f = 0{,}4$ cm,
$d = \infty$, $G = \infty$; $\varphi_C = 46'\,21''$;

$$d = 20\text{ cm} \left\{ \begin{array}{llll} G = & 1000\text{ m} & 100\text{ m} & 20\text{ m} \\ \varphi_C = & 46'\,27'' & 46'19'' & 45'\,49''. \end{array} \right.$$

Für Ausrechnung dieser Beispiele war, da schon früher die Fernrohrlängen berechnet waren (S. 33), bequemer die Formel:

$$55)\qquad tg\,\varphi_C = \frac{s}{2} \cdot \frac{3}{l + 4f}.$$

Obige Zahlen lehren, dass das Gesichtsfeld des **Campani**-Fernrohrs sehr erheblich grösser, als das des **Kepler**- und auch recht merklich grösser als das des **Ramsden**-Fernrohrs ist, welche gleiches Objectiv und gleiche Brennweite des Augenglases haben, — gleiche Sehweite u. s. w. vorausgesetzt.

Die allgemeine Vergleichung liefert:

$$56)\qquad \frac{tg\,\varphi_C}{tg\,\varphi_K} = 3 \cdot \frac{f + 2(d-e)}{f + (d-e)} \cdot \frac{Bf + (d-e)(B+f)}{Bf + (d-e)(2B + 9f)}$$

und

$$57)\qquad \frac{tg\,\varphi_C}{tg\,\varphi_R} = \tfrac{1}{15} \cdot \frac{25\,Bf + (d-e)(50\,B + 81f)}{Bf + (d-e)(2B + 9f)}.$$

Für den Sonderfall unendlicher Gegenstandsweite und Accomodation auf parallele Strahlen folgt:

$$\left. \begin{array}{l} \dfrac{tg\,\varphi_C}{tg\,\varphi_K} = 6 \cdot \dfrac{F + f}{2F + 9f} \\ \dfrac{tg\,\varphi_C}{tg\,\varphi_R} = \tfrac{1}{15} \cdot \dfrac{50\,F + 81\,f}{2F + 9f} \end{array} \right\} \quad (G = \infty \text{ und } d = \infty).$$

Dem grössern Gesichtsfelde des **Campani**-Fernrohrs steht eine geringere Vergrösserung gegenüber. Will man das Gesichtsfeld **gleich stark vergrössernder Campani**- und **Kepler**-Fernrohre vergleichen, so muss man (gleiches Objectiv u. s. w. vorausgesetzt) in dem Ausdrucke für $tg\,\varphi_C$ [54)] statt f, gemäss Formel 12), setzen $\dfrac{2f(d-e)}{3(d-e) + 2f}$ und findet dann:

$$58)\qquad tg\,\varphi_{C'} = \frac{s}{2} \cdot \frac{3(f + d - e)}{Bf + (d-e)(B + 3f)},$$

woraus für den besondern Fall unendlicher Gegenstands- und Sehweite:

$$tg\,\varphi_{C'} = \frac{s}{2} \cdot \frac{3}{F + 3f} \quad (G = \infty \text{ und } d = \infty),$$

wie leichter durch unmittelbare Verwendung der Ausdrücke 15) und des Sonderfalls zu 54) hätte abgeleitet werden können.

Die Vergleichung liefert nun:

$$59)\qquad \frac{tg\,\varphi_{C'}}{tg\,\varphi_{K'}} = 3\cdot\frac{Bf+(d-e)(B+f)}{Bf+(d-e)(B+3f)}$$

und

$$60)\qquad \frac{tg\,\varphi_{C'}}{tg\,\varphi_{R'}} = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{5Bf+(d-e)(5B+9f)}{Bf+(d-e)(B+3f)},$$

In dem besondern Falle unendlicher Gegenstands- und Sehweite:

$$\frac{tg\,\varphi_{C'}}{tg\,\varphi_{K'}} = \frac{3F+3f}{F+3f}; \qquad \frac{tg\,\varphi_{C'}}{tg\,\varphi_{R'}} = \frac{5F+9f}{3F+9f}.$$

Das Gesichtsfeld des gleich stark vergrössernden Campani-Fernrohrs ist also grösser als das des Ramsden-Fernrohrs (gleiches Objectiv u. s. w. vorausgesetzt), wenn die Absolutwerthe der Augenglasöffnungen gleich sind. Da aber das Augenglas des Ramsden-Oculars eine grössere Brennweite hat, als das des gleich stark vergrössernden Campani-Oculars, so kann der Oeffnungsdurchmesser, ohne schädliche Aberration befürchten zu müssen, bei Ramsden-Ocular absolut genommen grösser als bei Campani-Ocular gewählt und damit das Gesichtsfeld des Ramsden-Fernrohrs vergrössert werden.

Nimmt man in dem gleich vergrössernden Campani- und Ramsden-Fernrohr die Augenglasöffnungsdurchmesser relativ gleich (d. h. gleiche Bruchtheile der Brennweiten), wählt sie also von den Verhältnissen, welche durch die Formeln 11) bis 13) angegeben sind, so findet man — der Strich unten am Index soll gleiche Vergrösserung und gleiche relative Oeffnung der Augengläser andeuten —:

$$61)\qquad \frac{tg\,\varphi_{C_1}}{tg\,\varphi_{R_1}} = \frac{9(d-e)^2(5B+9f)+(d-e)f(65B+36f)+20Bf^2}{9(d-e)^2(5B+15f)+(d-e)f(75B+90f)+30Bf^2},$$

und im Sonderfalle unendlicher Gegenstands- und Sehweite, wie einfacher aus dem besondern Falle zu 54) und 14) bis 16) abgeleitet werden kann:

$$\frac{tg\,\varphi_{C_1}}{tg\,\varphi_{R_1}} = \frac{5F+9f}{5F+15f} \qquad (G=\infty \text{ und } d=\infty).$$

Daher das Ergebniss:

Das Gesichtsfeld eines Campani-Fernrohrs ist nicht grösser, sondern etwas kleiner als das eines Ramsden-Fernrohrs gleicher Vergrösserung und gleich grosser relativer Oeffnung des Augenglases, gleiche Objective, Gegenstandsweite, Sehweite und Augenabstand vorausgesetzt.

Das Gesichtsfeld des Campani-Fernrohrs übertrifft immer noch sehr erheblich das eines gleich stark vergrössernden Kepler-Fernrohrs, bei gleich grosser relativer Oeffnung des Augenglases, ferner gleichem Objectiv u. s. w. Es ist nämlich

$$62)\qquad \frac{tg\,\varphi_{C_1}}{tg\,\varphi_{K_1}} = 6\cdot\frac{Bf+(d-e)(B+f)}{Bf+(d-e)(B+3f)}\cdot\frac{d-e}{3(d-e)+2f}.$$

und für den Sonderfall unendlicher Gegenstandsweite und Accomodation auf parallele Strahlen:

$$\frac{tg\,\varphi_{C_1}}{tg\,\varphi_{K_1}} = 2\cdot\frac{F+f}{F+3f}\quad (G=\infty \text{ und } d=\infty).$$

D. Weitere Vergleichung von Ramsden- und Campani-Ocular.

Wird das vom Objectiv entworfene Bild als ganz vollkommen angenommen, so ist die Leistung eines Kepler-Fernrohrs dennoch so ungenügend, dass wenigstens an neueren Instrumenten der Geodäsie das einfache Ocular nicht mehr angebracht wird. Es findet überhaupt nur noch eine ausnahmsweise Verwendung, dann, wenn man mit der stärkstmöglichen Vergrösserung Gegenstände betrachten will, ohne messende Beobachtungen mit Fadenkreuz u. s. w. zu machen. Das schliesslich gesehene Bild ist nämlich mit den zwei, bei einfacher Linse ungemindert verbleibenden Abweichungen behaftet. Es liegt sehr nahe, statt einer einfachen eine achromatische Linse zu wählen, die zugleich, da über mindestens drei Krümmungen zu verfügen ist, fast ganz aplanatisch gemacht, jedenfalls so berechnet werden kann, dass die verbleibende Kugelabweichung keine praktische Bedeutung mehr hat. Unerlässlich ist die Beschränkung auf geringe Oeffnung der Linse. Die Achromatisirung wird erzielt durch Anfügung einer Zerstreuungslinse (aus Flintglas), wodurch die Brennweite des zusammengesetzten, nun von der Farbenabweichung genügend befreiten Augenglases bedeutend grösser wird. Dadurch wird dann die Vergrösserung des Fernrohrs erheblich geringer. Will oder kann man nicht auf stärkere Vergrösserung verzichten oder diese durch ein Objectiv grösserer Brennweite erzwingen, so müssen die Krümmungen der zusammengesetzten Ocularlinse weit stärker gemacht werden, als das bei der einfachen nöthig ist, um die für die Vergrösserung unentbehrlich kurze Brennweite des Augenglases zu erzielen. Dadurch entsteht aber sofort die Nothwendigkeit, die freien Flächen der Linse sehr stark zu verengen, wovon eine ungemeine Verminderung des Gesichtsfeldes wieder die Folge ist. Beide Nachtheile, zwischen denen man die Wahl hat: Abnahme der Vergrösserung oder des Gesichtsfeldes, sind so bedeutend, dass Fraunhofer nach einigen wenigen Versuchen (an Mikroskopen wie an Fernrohren) es aufgegeben hat, das Kepler-Ocular durch Achromatisiren zu verbessern, und man allgemein durch Einfügung eines Collectivglases die schädlichen Wirkungen der Farbenabweichung zu bekämpfen sucht.

Welche Art von Ocular mit Collectiv erzielt nun in dieser Hinsicht den besten Erfolg? Eine kurze und allgemeine Antwort wird sich hierauf nicht geben lassen, da der Erfolg bei ganz gleicher Gestalt und Stellung der Linsen beträchtlich von dem mittlern Brechungsexponenten und von dem Zerstreuungscoefficienten der angewandten Glasart abhängt. Denn die Oculare mit Collectiv haben das gemeinsam, dass die sphärische Abweichung der chromatischen entgegenwirkt und durch das Gegenwirken beider ein besseres Bild gewonnen werden soll. Die Farbenabweichung ist aber sehr verschieden, je nach dem Zerstreuungscoefficienten, und die wegen der Kugelgestalt ändert etwas mit dem Brechungsexponenten.

Die ausführliche Besprechung beider Oculare hat ein hervorragender praktischer Optiker, dessen Aussprüche wegen seiner grossen Erfahrung und seiner scharfen Beobachtung viel Ansehen geniessen, geliefert in „Das orthoskopische Ocular etc.", von C. Kellner, Braunschweig 1849. (Das in vieler Hinsicht vortreffliche Schriftchen ist im Buchhandel vergriffen und selten geworden. Die nächst ausführliche Erläuterung, die sich sehr an Kellner's Besprechung anlehnt, steht in dem bekannten Lehrbuche von Hunäus, „Die geometrischen Instrumente der gesammten praktischen Geometrie, deren Theorie, Beschreibung und Gebrauch", Hannover 1864.)

Bei jeder Vergleichung wird zunächst betont, das Campani-Ocular zeichne sich aus durch grössere Helligkeit und grösseres Gesichtsfeld. Das sind unbestreitbar wichtige Vortheile, aber sie sind erkauft durch Verzicht auf stärkere Vergrösserung. Nun liegt, wenn es sich um die Wahl eines Oculars handelt, die Frage wohl immer so, dass ein bestimmtes Objectiv gegeben ist (die Kosten des Objectivs betragen selbst bei mässig grossen Fernrohren neun Zehntel, bei grossen noch mehr, des Gesammtpreises des Fernrohrs) und eine bestimmte Vergrösserung verlangt wird. Die Frage muss deshalb so gestellt werden:

„Welches Ocular ist für das Beobachtungsfernrohr das vortheilhafteste, um in Verbindung mit gegebenem Objectiv eine gegebene Vergrösserung zu erzielen?"

Nun hat die vorstehende Untersuchung nachgewiesen, dass die Helligkeit gleich stark vergrössernder Campani- und Ramsden-Fernrohre (bei gleichem Objectiv u. s. w.) gleich ist, dass das Gesichtsfeld des Campani-Fernrohrs aber keineswegs grösser ist, als das des gleich stark vergrössernden Ramsden-Fernrohrs, sondern umgekehrt sogar kleiner, wenn man in beiden Ocularen dem Augenglas gleiche relative Oeffnung ertheilt, also die Abweichung wegen der Kugelgestalt in gleichem Maasse duldet. Was also bisher überall als der Hauptvorzug des Campani-Oculars ausgegeben wurde, besteht in der That gar nicht, sobald man die Vergleichung unter sonst gleichen Umständen vornimmt oder die Frage richtig stellt.

Kellner hebt, um die Vorzüge des von ihm erfundenen orthoskopischen Oculars zu zeigen, die Mängel der Doppeloculare beider Classen hervor. Zuerst spricht er von dem krummen Bilde und der Ursache der Krümmung. Er sagt:

(S. 9 der genannten Schrift.) „Das Bild, welches von dem in Rede stehenden Ocular (Campani) dargestellt wird, tritt nämlich nur in der Mitte des Gesichtsfeldes klar hervor, und je reiner man dasselbe haben will, mit einer desto kleineren Ausdehnung wird man sich begnügen müssen. Schiebt man die Ocularröhre um eine sehr geringe Grösse gegen das Objectiv hin, so erweitert sich zwar der deutliche Kreis; es legt sich aber alsdann über den Mittelpunkt ein nebliger Fleck, der in dem Maassstabe wächst, in welchem durch ferneres Hineinschieben des Oculareinsatzes der deutliche Kranz sich erweitert, und so läuft das Bild bei anhaltendem Weiterschieben in Gestalt einer ringförmigen Welle dem Rande des Gesichtsfeldes zu.“

Dann wird die Perspective des Bildes besprochen:

(S. 11 unten.) „Ein sehr schwerwiegender Vorwurf, den man diesem (Campani-) Ocular ferner machen muss, ist die aus der sphärischen Abweichung der einfallenden Lichtkegel entstandene Verzerrung des Gesehenen. ... Das Ocular vergrössert demnach gegen den Rand des Gesichtsfeldes hin stärker, als in der Mitte desselben. Diese hässliche Eigenschaft ...“

Um einen recht klaren Begriff von der Grösse der Kugelabweichung zu erhalten, wird ein Beispiel durchgerechnet:

„Ein schlagender Beweis für das eben Gesagte liegt auch schon darin, dass, wenn die ins Auge tretenden Centralstrahlen aus der Entfernung von 10 Zoll, der Weite des deutlichen Sehens, divergiren, die Randstrahlen alsdann, obiger Abweichung gemäss, aus dem Abstande von 22,6 Zoll herzukommen scheinen.“

(S. 13 unten.) „Auch von der Farbenzerstreuung in der Axe ist dieses Ocular ... nicht frei. Es gilt sogar die ganze auf die Zerstreuung der Farben bezügliche Einrichtung streng genommen nur für die aus der Mitte des Objectivs herkommenden Hauptstrahlen, also nur für die Axen aller einfallenden Lichtkegel. ... Zwar sind die auf solche Art übrig bleibenden Reste der Zerstreuung durch ihr regelloses Ineinanderwirken nicht im Stande, farbige Ränder an den Kanten der Objecte hervorzurufen, tragen jedoch immer dazu bei, die Deutlichkeit zu hintertreiben und dem Bilde, anstatt Schärfe und Correctheit, eine gewisse Weichheit zu ertheilen.“

Schliesslich wird der blaue Rand des Gesichtsfeldes erwähnt und erklärt.

Nun werden die Nachtheile des Doppeloculars zweiter Classe besprochen:

(S. 15.) „Dieses von Ramsden eingeführte und später von Fraunhofer bedeutend verbesserte Ocular bleibt im Allgemeinen an guten Eigenschaften noch weit hinter dem Doppelocular erster Classe zurück, hat jedoch vor diesem den grossen Vorzug, dass sein Fadennetz nicht nur in erhöhter Ausdehnung rein gesehen wird, sondern auch der Ort desselben weder von der grössern oder geringern Entfernung der Objecte, noch von der Accomodation des Auges erheblich abhängig ist, welcher Tugend sich ersteres (Campani-) Ocular keineswegs rühmen kann.“

Der letzte Theil dieses Satzes, von „sondern“ bis „abhängig ist“, steht wörtlich auch in Hunäus, Geometrische Instrumente, S. 56, und bedarf einer Bemerkung.

Von der grössern oder geringern Entfernung der Gegenstände hängt der Ort des Fadenkreuzes ganz genau in gleicher Art bei Ramsden- wie bei Campani-Ocular ab. Man erkennt das einfachst, wenn man die Fernrohrlänge (bei deren Abänderung die Fadenplatte verschoben wird) l_R und l_C [Formeln 5) und 8)] nach der Gegenstandsweite differentiirt; man findet dann:

$$\frac{dl_R}{dG} = \frac{dl_C}{dG} = -\left(\frac{F}{G-F}\right)^2.$$

Ueberhaupt ist die Ortsänderung des Fadenkreuzes, welche durch Aenderung der Gegenstandsweite bedingt wird, nur vom Objectiv abhängig und dieselbe, wie immer das Ocular beschaffen sein mag.

Anlangend den Einfluss der Accomodation des Auges, so ist die Lage der Fadenplatte gegen das Objectiv ganz unabhängig (bei jeder Art von Fernrohr) von der Sehweite, nicht aber die Lage gegen das Augenglas und das Collectiv. Es ist der Abstand des reellen Bildes (also auch der Fadenplatte) vom Collectiv des Ramsden-Oculars schon früher gefunden worden (S. 29):

$$g_1 = \tfrac{9}{25} f \cdot \frac{\delta - 4f}{2\delta + f},$$

wenn man statt $d-e$ einfach δ schreibt. Um zu wissen, wie sich g_1 mit der Sehweite ändert, bilde man $\frac{dg_1}{d\delta}$ und findet, was auch durch Differentiirung der Fernrohrlänge nach der Sehweite gefunden wird:

$$\frac{dl_R}{d\delta} = \frac{dg_1}{d\delta} = \tfrac{81}{25}\left(\frac{f}{2\delta + f}\right)^2.$$

Beim Campani-Fernrohr ist die für andere Sehweite erforderliche Verschiebung der Fadenplatte:

$$\frac{dl_C}{d\delta} = 9\left(\frac{f}{2\delta + f}\right)^2.$$

Es ist also allerdings bei Ramsden-Fernrohr die gleicher Aenderung der Sehweite entsprechende nothwendige Verschiebung der Fadenplatte nur $\tfrac{9}{25}$mal so gross, als die bei Campani-Fernrohr mit gleicher Augen-

glasbrennweite erforderliche. Fragt man nach dem Verhältnisse der gleicher Aenderung der Sehweite entsprechenden nothwendigen Verschiebungen der Fadenplatte in gleich stark vergrössernden Ramsden- und Campani-Fernrohren, so erhält man ein wesentlich anderes Ergebniss. Das Campani-Augenglas ist dann von erheblich kürzerer Brennweite und $\frac{dl_{C'}}{d\delta}$ nimmt einen kleinern Werth an, der unter jene von $\frac{dl_{R'}}{d\delta}$ sinkt. Bekanntlich ist das für gleiche Vergrösserung geforderte Verhältniss von $f_{R'}:f_{C'}$ veränderlich mit der Sehweite. Nimmt man die Sehweite unendlich an, so findet man:

$$\frac{dl_{R'}}{d\delta}:\frac{dl_{C'}}{d\delta}=\tfrac{9}{25}\cdot\left(\frac{10\delta+3f}{2\delta+f}\right)^2,$$

in Anbetracht der Kleinheit von f gegen die Sehweite also entschieden grösser als 1, d. h. die Fadenplattenverschiebung, entspringend aus geänderter Accomodation, ist im Ramsden-Fernrohr grösser als im Campani-Fernrohr gleicher Vergrösserung. Uebrigens wird gewöhnlich in Campani-Ocularen nicht das Fadenkreuz verschoben, bis seine Stellung der besondern Sehweite passt, sondern das Augenglas gegen das Fadenkreuz und gegen das Collectiv und damit das zusammengesetzte Ocular verschlechtert.

Kellner fährt in der Vergleichung der zwei Oculare folgendermassen fort:

(S. 15 a. a. O.) Die Mängel des Ramsden-Oculars sind der Hauptsache nach dieselben wie die des Campani-Oculars, und beruhen auch auf ganz ähnlichen Ursachen; „sie treten indessen vermöge der veränderten Construction hier in einer andern Mischung und Stärke hervor".

„Die Krümmung des Bildes ist ... etwas geringer ..."

„Die Verzerrung der Perspective ist ebenfalls erträglicher."

„Die Farbenzerstreuung ausserhalb der Axe der Linsen ist aber auf der andern Seite nur unvollständig gehoben, daher dieses (Ramsden-) Ocular die Objecte gegen die Begrenzung des Gesichtsfeldes hin mit ziemlich hervortretenden farbigen Säumen darstellt und folglich in dieser Hinsicht der vorigen Einrichtung (Campani) bedeutend nachsteht."

„Beiderlei Abweichungen in der Axe, sowohl die sphärische, als auch die chromatische, sind hinwiederum hier etwas vollständiger gehoben..."

„Der blaue Rand des Gesichtsfeldes ist fast ebenso stark, als bei der vorigen Einrichtung."

(S. 16.) „Ein weiterer Nachtheil ist noch der, dass der Ort des Bildes allzu nahe an die erste Fläche der Linse (des Collectivs) fällt, wodurch der zufällig daraufliegende Staub in die Vorstellung des Gesehenen sich störend einmischt; wenn man indessen stets reinlich zu Werke geht, so hat dieser Umstand wenig oder gar nichts zu bedeuten."

In dieser Zusammenstellung Kellner's ist Alles zu Gunsten des Ramsden-Oculars, bis auf den farbigen Rand gegen die Grenzen des Gesichtsfeldes, der zu Ungunsten von Ramsden zählt. Nun ist derselbe an und für sich bei dem Beobachtungsfernrohr nicht sehr störend, mehr ein Schönheitsfehler, findet sich aber auch bei Campani-Ocular, nur weniger lebhaft, d. h. die Farbe ist weniger von Weiss verschieden, da die den einzelnen Spectralfarben entsprechenden Ränder „so regellos ineinander rücken"; ist die Lebhaftigkeit der Färbung geringer, so „wird jedoch immer die Deutlichkeit hintertrieben und dem Bilde anstatt Schärfe und Correctheit eine gewisse Weichheit ertheilt". Ganz anders fallen die von der sphärischen Abweichung herrührenden Mängel, die bei Campani-Ocular die sehr viel stärkere Krümmung und Verzerrung des Bildes bewirken, ins Gewicht. Es sei daran erinnert, dass in den sphärischen Zerstreuungskreisen die Lichtintensität gegen den Rand hin zunimmt, in der chromatischen aber ab, und die gewöhnlich angenommene Zulässigkeitsgrenze für sphärische Abweichungskreise 1 Secunde, für chromatische Abweichungskreise bis zu 5 Minuten Halbmesser beträgt.

Für das Beobachtungsfernrohr kommt noch ein Umstand in Betracht, dessen Kellner nicht gedenkt, der aber in manchen Lehrbüchern der Geodäsie und in meinen schon einmal angeführten „Ergebnissen physikalischer Forschung" (§ 644) besprochen wird. Im Campani-Fernrohr sieht man das Fadenkreuz nur durch das Augenglas, also nicht möglichst deutlich, da die zwei Abweichungen der benutzten einen Linse ungemindert bleiben. Den angezielten Gegenstand aber sieht man durch das ganze Ocular und die Stellung und Einrichtung des Oculars ist ja so gewählt, die Aberrationen weniger störend zu machen. Gegenstand und Fadenkreuz werden im Campani-Fernrohr also niemals gleich scharf und deutlich gesehen, sondern das virtuelle Bild des letzteren ist etwas mangelhafter als das des Gegenstands. Es ist sogar die Stellung, die man, um das ganze Ocular möglichst gut zu machen, dem Augenglase giebt, nämlich mit der convexen Seite dieser planconvexen Linse gegen das Fadenkreuz gewendet, für die Fadenkreuzbetrachtung die ungünstigere; das virtuelle Bild der Fäden würde weniger mangelhaft sein, wenn die ebene Seite der Linse gegen die Fäden gekehrt wäre.

Im Ramsden-Fernrohr hingegen werden das reelle (fehlerfreie) Bild des entfernten Gegenstandes und das Fadenkreuz durch das ganze Ocular betrachtet, das heisst durch ein und dieselbe Linsenzusammenstellung, welche die virtuellen Bilder des Gegenstandes und des Fadenkreuzes in gleichem Maasse, möglichst vollkommen und thunlichst befreit von den Aberrationen entwirft.

Es wird zuweilen angegeben, das Ramsden-Ocular sei anzuwenden bei Mikrometervorrichtung der Fäden und das Campani-Ocular sei unbrauchbar, wenn die Fäden gegen einander verschoben werden sollen.

Das ist aber nicht richtig, man kann auch im Campani-Ocular die mikrometrische Bewegung der Fäden anbringen. Nur ist das etwas weniger bequem, weil die Fäden zwischen Augenglas und Collectiv, also im Innern der Ocularröhre liegen müssen.

Hunäus (Geometr. Instrum. S. 54) meint, das Ramsden-Ocular sei nicht zu gebrauchen, wenn man die stärksten Vergrösserungen anwenden wolle, weil das reelle Bild zu nahe an die Vorderfläche des Collectivs rücke, um die Aufstellung der Fadenplatte zu gestatten. Nun sind aber die stärksten Vergrösserungen, welche bei geodätischen Fernrohren anzuwenden noch Sinn hat, höchstens 60fache. Man kann sie erzwingen durch Vergrösserung der Objectivbrennweite, was allerdings die Unbequemlichkeit der Verlängerung des Fernrohrs mit sich bringt, oder durch Verminderung der Augenglasbrennweite, was erhebliche Verringerung des Gesichtsfeldes nach sich zieht. Mit Rücksicht auf Letzteres wird man selten Ramsden-Oculare an geodätischen Fernrohren finden, deren Augenglas eine geringere Brennweite als 1 cm hat.

Nachstehend berechne ich die Entfernung $g_1 = \frac{9}{25} f \cdot \frac{d-e-4f}{2(d-e)+f}$ (S. 29), das ist die Entfernung des Fadenkreuzes vom Collectiv für die Fälle der Sehweiten 20 cm und unendlich und die Augenglasbrennweiten 1 cm, $\frac{3}{4}$ cm und $\frac{1}{2}$ cm:

	$d-e=19{,}5$ cm.	$d-e=\infty$.
$f=1$ cm	$g_1=0{,}139$ cm	$g_1=0{,}18$ cm
$f=0{,}75$ cm	$g_1=0{,}112$ cm	$g_1=0{,}135$ cm
$f=0{,}5$ cm	$g_1=0{,}0797$ cm	$g_1=0{,}09$ cm

Es bleibt also in den etwa noch vorkommenden Fällen über 1 mm und selbst in dem extremen Falle von nur $\frac{1}{2}$ cm Brennweite des Augenglases noch mehr als $\frac{3}{4}$ mm Abstand, und damit Gelegenheit, die Fadenplatte vor dem Collectiv anzubringen.

Noch ein zu Gunsten des Ramsden-Oculars sprechender Umstand ist erwähnenswerth. Sieht der Beobachter das Fadenkreuz nicht deutlich, so hat er nur das ganze, zusammengesetzte Ocular gegen die Fadenplatte entsprechend zu verschieben, um die Anpassung an die besondere Sehweite zu erzielen; das Ocular wird in seiner optischen Wirksamkeit — auf Verminderung der Abweichungen — nicht im Geringsten geändert, während die für Campani-Ocular bestehende Uebung, wie erwähnt, das Ocular verschlechtert.

Das Campani-Fernrohr hat vor dem gleich stark vergrössernden Ramsden-Fernrohr (mit gleichem Objectiv u. s. w.) auch einen Vortheil, es ist nämlich kürzer, was für die Construction der geodätischen

Werkzeuge erwünscht ist. Der Längenunterschied ist in Formel 22) angegeben; sein Werth ist so unbedeutend — für unendliche Sehweite $\frac{31}{45}$ der Augenglasbrennweite des gleich stark vergrössernden Kepler-Fernrohrs —, wird in den praktischen Fällen nur wenige Millimeter betragen, dass hierdurch die Vergleichung nicht zu Gunsten des Campani-Fernrohrs gewendet wird.

Manche Schriftsteller, wie Hunäus, empfehlen lebhaft das Ramsden-Ocular für Distanzmesser und überhaupt für die Fälle, wo auch ausserhalb der optischen Axe genau beobachtet werden soll, hingegen das Campani- für Theodolithfernrohre und viele andere. Nachdem durch meine Untersuchung dargethan ist, dass die oft angeführten Vorzüge des Campani-Oculars — grössere Helligkeit und grösseres Gesichtsfeld — nur vermeintliche sind, nämlich bei richtiger Vergleichung gleich stark vergrössernder Fernrohre gar nicht bestehen, spricht gar kein ernsthafter Grund für Anwendung von Campani-Ocular, hingegen Alles zur Empfehlung des Ramsden-Oculars. Auch so die Ergebnisse meiner Untersuchung über den Einstellungsspielraum des Fernrohrs (Zeitschr. f. Math. u. Phys. XXVIII, S. 129—149).

Liest man die bei den Schriftstellern vorkommenden Urtheile, so kann man den Gedanken nicht unterdrücken, dass eine gewisse Voreingenommenheit zu Gunsten des Campani-Oculars bestehen müsse, denn wenn ich auch die nicht giltigen Vorzüge hinsichtlich Helligkeit und Gesichtsfeld gelten lassen will, so kann ich, nach den von Anderen gemachten Zusammenstellungen der Eigenschaften beider Oculare, nicht zu dem von Jenen gezogenen Schlusse kommen, sondern muss schon darnach dem Ramsden-Ocular einen Vorzug einräumen.

Ebendiese Begünstigung des Campani-Oculars zeigt sich in der Praxis. Ich habe nur ein oder zwei Mal bei sehr vielen Beobachtungsfernrohren, die ich schon benutzte, ein Ramsden-Ocular gefunden, sonst immer Campani-Oculare. Auf mein Ersuchen haben die Vorstände einiger grösseren geodätischen Sammlungen in Deutschland Abzählungen der Ramsden- und der Campani-Oculare an den verschiedenen Instrumenten der betreffenden Sammlungen anstellen lassen, wofür ich jenen Herren zu Dank verpflichtet bin. Das Ergebniss ist ein ganz entschiedenes Ueberwiegen des Campani-Oculars. Verhältnissmässig am reichsten (oder am wenigsten arm) an Ramsden-Ocularen ist die geodätische Sammlung der Münchner polytechnischen Schule, das Verhältniss ist 29 Ramsden auf 40 Campani.

Der Hauptschluss, zu dem ich nach vorstehender Untersuchung komme, ist der: gar kein Campani-Ocular zu verwenden, sondern immer das Ramsden-Ocular.

Aschaffenburg, 13. Juli 1882.

VI.

Ueber sphärische Vielecke, die einem Kreise eingeschrieben und einem andern Kreise umgeschrieben sind.

Von

Dr. Stoll,

Gymnasiallehrer in Bensheim.

Für ein rechtwinkliges Coordinatensystem ist die Gleichung eines Kegels, dessen Spitze im Anfangspunkte der Coordinaten liegt, dessen Axe mit der Axe der z zusammenfällt und dessen Erzeugende mit derselben den constanten Winkel r bilden:

1) $$z^2 = (x^2 + y^2 + z^2) \cos^2 r,$$

eine Gleichung, die man vermittelst Einführung des veränderlichen Parameters φ durch folgende zwei ersetzen kann:

1a) $$x = z \operatorname{tg} r \cos\varphi, \quad y = z \operatorname{tg} r \sin\varphi.$$

Daher ist die Gleichung einer Ebene, welche durch diejenigen Erzeugenden geht, denen die Parameter φ_1 und φ_2 angehören:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \operatorname{tg} r \cos\varphi_1 & \operatorname{tg} r \sin\varphi_1 & 1 \\ \operatorname{tg} r \cos\varphi_2 & \operatorname{tg} r \sin\varphi_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

oder entwickelt:

2) $$x \cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) + y \sin\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) = z \operatorname{tg} r \cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Die Gleichung eines zweiten Kegels, der mit dem ersten die Spitze gemeinschaftlich hat, dessen Axe mit der z-Axe den Winkel δ, mit der x-Axe den Winkel $90^0 - \delta$ und mit der y-Axe den Winkel 90^0 macht, dessen Erzeugende endlich gegen seine Axe um den constanten Winkel ϱ geneigt sind, ist folgende:

3) $$(x \sin\delta + z \cos\delta)^2 = (x^2 + y^2 + z^2) \cos^2\varrho.$$

Die beiden Kegel 1) und 3) erzeugen auf einer Kugeloberfläche, deren Mittelpunkt in den Anfangspunkt der Coordinaten fällt, zwei kleine Kreise von den sphärischen Radien r und ϱ, deren Mittelpunkte um den Bogen δ von einander entfernt sind, und die Ebene 2) schneidet diese Kugeloberfläche in einem Bogen eines grössten Kreises, der eine Sehne des kleinen Kreises mit dem Radius r ist; dabei ist zu bemerken dass

die Parameter φ_1 und φ_2 die beiden Winkel bedeuten, welche die nach den Endpunkten dieser Sehne gerichteten Radien des Kreises r mit dem Verbindungsbogen der Mittelpunkte der Kreise r und ϱ (der Centrale) machen. Soll nun diese Sehne den kleinen Kreis mit dem Radius ϱ berühren oder, was dasselbe ist, die Ebene 2) eine Tangentialebene des Kegels 3) sein, so findet dafür folgende Bedingungsgleichung statt:

$$\begin{vmatrix} \cos^2\varrho - \sin^2\delta & 0 & -\sin\delta\cos\delta & \cos\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2) \\ 0 & \cos^2\varrho & 0 & \sin\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2) \\ -\sin\delta\cos\delta & 0 & \cos^2\varrho - \cos^2\delta & -tg\,r\cos\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2) \\ \cos\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2) & \sin\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2) & -tg\,r\cos\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2) & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder entwickelt:

$$\begin{gathered}[\sin\delta\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2) - tg\,r\cos\delta\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)]^2 \\ = [1 + tg^2 r\cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)]\sin^2\varrho.\end{gathered}$$

Um dieser Gleichung eine für unsern Zweck mehr dienliche Form zu geben, ersetzen wir zunächst die Cosinusse der halben Winkelsummen und Winkeldifferenzen durch ihre ausgeführten Werthe und erhalten so:

$$\begin{gathered}[(tg\,r\cos\delta + \sin\delta)\sin\tfrac{1}{2}\varphi_1\sin\tfrac{1}{2}\varphi_2 + (tg\,r\cos\delta - \sin\delta)\cos\tfrac{1}{2}\varphi_1\cos\tfrac{1}{2}\varphi_2]^2 \\ = [1 + tg^2 r(\cos\tfrac{1}{2}\varphi_1\cos\tfrac{1}{2}\varphi_2 + \sin\tfrac{1}{2}\varphi_1\sin\tfrac{1}{2}\varphi_2)^2]\sin^2\varrho,\end{gathered}$$

oder nach Ausführung der angezeigten Operationen und neuer Anordnung der Glieder:

$$\begin{aligned}&[(tg\,r\cos\delta + \sin\delta)^2 - tg^2 r\sin^2\varrho]\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi_1\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi_2 \\ &+ [(tg\,r\cos\delta - \sin\delta)^2 - tg^2 r\sin^2\varrho]\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi_1\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi_2 \\ &+ 2[(tg^2 r\cos^2\delta - \sin^2\delta) - tg^2 r\sin^2\varrho]\sin\tfrac{1}{2}\varphi_1\sin\tfrac{1}{2}\varphi_2\cos\tfrac{1}{2}\varphi_1\cos\tfrac{1}{2}\varphi_2 = \sin^2\varrho.\end{aligned}$$

Drückt man endlich die Sinusse und Cosinusse der halben Winkel durch ihre Tangenten aus, so nimmt die Bedingungsgleichung schliesslich die Form an:

$$\begin{aligned}&[\sin^2(r+\delta) - \sin^2 r\sin^2\varrho]\,tg^2\tfrac{1}{2}\varphi_1\,tg^2\tfrac{1}{2}\varphi_2 \\ &+ 2[\sin(r+\delta)\sin(r-\delta) - \sin^2 r\sin^2\varrho]\,tg\tfrac{1}{2}\varphi_1\,tg\tfrac{1}{2}\varphi_2 + \sin^2(r-\delta) - \sin^2 r\sin^2\varrho \\ &= (1 + tg^2\tfrac{1}{2}\varphi_1)(1 + tg^2\tfrac{1}{2}\varphi_2)\sin^2\varrho\cos^2 r,\end{aligned}$$

oder, wenn man nach vorgenommener Reduction der Abkürzung halber statt $tg\frac{1}{2}\varphi_1$ und $tg\frac{1}{2}\varphi_2$ t_1 und t_2 schreibt und die Grössen

$$4)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\sin^2(r+\delta) - \sin^2\varrho}{\sin^2\varrho\cos^2 r} &= a, \\ \frac{\sin^2(r-\delta) - \sin^2\varrho}{\sin^2\varrho\cos^2 r} &= b, \\ 2\cdot\frac{\sin(r+\delta)\sin(r-\delta) - \sin^2\varrho\sin^2 r}{\sin^2\varrho\cos^2 r} &= c\end{aligned}\right.$$

setzt:

$$5)\quad a t_1^2 t_2^2 + b + c t_1 t_2 = t_1^2 + t_2^2.$$

Legt man daher von irgend einem Punkte der Kreisperipherie r, dessen Parameter φ_1 ist, an den Kreis ϱ eine sphärische Tangente, so

erhält man den Parameter des zweiten Schnittpunktes derselben mit dem Kreise r durch die Gleichung 5); legt man ferner von dem Punkte φ_2 in derselben Richtung, in welcher φ_1 und φ_2 gemessen sind, eine zweite sphärische Tangente an den Kreis ϱ, so erhält man den Parameter φ_3 ihres auf dem Kreise r gelegenen Endpunktes durch die ähnlich gebildete Gleichung:

$$a t_2^2 t_3^2 + b + c t_2 t_3 = t_2^2 + t_3^2.$$

Wenn man so fortfährt und immer vom Endpunkte der letzten Tangente an den Kreis ϱ eine neue Tangente legt, so bekommt man eine Reihe solcher Gleichungen zur Bestimmung der aufeinander folgenden Parameter, so dass endlich der Parameter des Endpunktes der n^{ten} Tangente durch die Gleichung

$$a t_n^2 t_{n+1}^2 + b + c t_n t_{n+1} = t_n^2 + t_{n+1}^2$$

gefunden wird. Wenn der Endpunkt der n^{ten} Tangente mit dem Anfangspunkte der ersten zusammenfällt, so hat man ein geschlossenes Vieleck von n Seiten; die Bedingung dafür, dass dies stattfindet, ist $\varphi_{n+1} = 360^0 + \varphi_1$, und infolge dessen gilt dann für die letzte Seite des Vielecks die Gleichung:

$$a t_n^2 t_1^2 + b + c t_n t_1 = t_n^2 + t_1^2.$$

Wir wollen nun den Anfangspunkt der ersten Tangente auf der Kreisperipherie r um einen unendlich kleinen Bogen $d\varphi_1$ in der Richtung, in der die φ gezählt sind, verschieben, dann verschiebt sich ihr Endpunkt um den unendlich kleinen Bogen $d\varphi_2$, der Endpunkt der zweiten Tangente um $d\varphi_3$ etc., der der n^{ten} um $d\varphi_{n+1}$. Alle diese Incremente haben dasselbe Zeichen, weil mit dem Wachsthum von φ_1 alle übrigen φ wachsen. Um das gegenseitige Verhältniss derselben kennen zu lernen, differentiire man die Gleichung 5) nach φ_1 und φ_2, wodurch man erhält:

$$[2t_1(a t_2^2 - 1) + c t_2](1 + t_1^2)\, d\varphi_1 + [2 t_2(a t_1^2 - 1) + c t_1](1 + t_2^2)\, d\varphi_2 = 0.$$

Durch Auflösung der Gleichung 5) nach t_1 findet man aber:

$$2 t_2 (a t_2^2 - 1) + c t_2 = \pm \sqrt{4 a t_2^4 + (c^2 - 4ab - 4) t_2^2 + 4b},$$

und durch Auflösung nach t_2:

$$2 t_2 (a t_1^2 - 1) + c t_1 = \pm \sqrt{4 a t_1^4 + (c^2 - 4ab - 4) t_1^2 + 4b};$$

daher ist:

$$\frac{\sqrt{4 a t_2^4 + (c^2 - 4ab - 4) t_2^2 + 4b}}{1 + t_2^2}\, d\varphi_1 = \frac{\sqrt{4 a t_1^4 + (c^2 - 4ab - 4) t_1^2 + 4b}}{1 + t_1^2}\, d\varphi_2,$$

wo die Zeichen rechts und links positiv genommen wurden, weil, wie oben bemerkt, die Incremente $d\varphi_1$ und $d\varphi_2$ dasselbe Zeichen haben müssen. Wenn man die Coefficienten von $d\varphi_1$ und $d\varphi_2$ kurzweg mit f und f_1 bezeichnet, so hat die letzte Gleichung die Gestalt:

$$f_2\, d\varphi_1 = f_1\, d\varphi_2;$$

für das Verhältniss von $d\varphi_2$ und $d\varphi_3$ findet man ebenso: $f_3\, d\varphi_2 = f_2\, d\varphi_3$, für das von $d\varphi_3$ und $d\varphi_4$: $f_4\, d\varphi_3 = f_3\, d\varphi_4$ etc; endlich für das von $d\varphi_n$ und $d\varphi_{n+1}$: $f_{n+1}\, d\varphi_n = f_n\, d\varphi_{n+1}$. Die Multiplication aller dieser Gleichungen ergiebt:

$$f_{n+1}\, d\varphi_1 = f_1\, d\varphi_{n+1};$$

nun ist aber, im Falle das ursprüngliche Vieleck geschlossen war, $f_{n+1} = f_1$, daher ist dann auch $d\varphi_1 = d\varphi_{n+1}$, d. h. der Endpunkt der letzten Tangente fällt auch jetzt wieder mit dem Anfangspunkte der ersten zusammen und man hat ein neues, wiederum geschlossenes Vieleck, das dem Kreise r ein- und dem Kreise ϱ umgeschrieben ist. Indem man den Anfangspunkt der ersten Tangente stetig immer weiter in derselben Richtung auf der Kreisperipherie r fortrücken lässt, werden bei jeder auch endlichen Verrückung dieses Anfangspunktes immer neue geschlossene Vielecke entstehen, so dass man den Satz aussprechen kann:

A. Dreht man ein sphärisches n-Eck, das einem Kugelkreise r eingeschrieben und einem andern Kugelkreise ϱ umgeschrieben ist, so, dass seine n Eckpunkte immer auf der Peripherie des ersten Kreises fortrücken, seine $n-1$ ersten Seiten aber den zweiten Kreis berühren, indem sie sich auf demselben hinwälzen, so berührt auch seine n^{te} Seite fortwährend denselben Kreis.

Dieser Satz gilt in seinem ganzen Umfange auch für die Ebene, weil, wenn man den Radius der Kugeloberfläche bis ins Unendliche wachsen lässt, sich an der ganzen Schlussweise nichts ändert.*

Dagegen gilt nur für die Ebene ein anderer, schon bekannter Satz,** den wir jetzt herleiten wollen. Denken wir uns nämlich den Kreis r in der Ebene als fest und gegeben, dagegen in derselben Ebene eine Schaar von Kreisen mit veränderlichem Radius ϱ, welche mit dem Kreise r dieselbe Potenzlinie haben, so hat man, um die Gleichung der letzteren zu finden, die beiden Gleichungen

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ und } (x-\delta)^2 + y^2 = \varrho^2$$

von einander abzuziehen, was $2\delta x = r^2 + \delta^2 - \varrho^2$ ergiebt; berücksichtigt man aber, dass für diesen Fall die zwei ersten der Gleichungen 4) in $(r+\delta)^2 = \varrho^2(a+1)$ und $(r-\delta)^2 = \varrho^2(b+1)$ übergehen, dass folglich $2(r^2+\delta^2-\varrho^2) = \varrho^2(a+b)$ und $4r\delta = \varrho^2(a-b)$ ist, so erhält die Gleichung der Potenzlinie die Gestalt:

$$(a-b)x = (a+b)r.$$

---

* Für die Ebene hat den Satz mit Heranziehung der elliptischen Functionen bewiesen Jacobi in Crelle's Journal Bd. 3. Vergl. Durège, Theorie der ellipt. Funct., 2. Aufl., S. 181.

** Vergl. Durège a. a O. S. 180.

Man kann daher die Forderung, dass die Potenzlinie für die ganze Schaar von Kreisen dieselbe sein solle, in die Form kleiden: das Verhältniss $a:b$ solle constant sein, wenn auch die a und b selbst für jeden Kreis der Schaar verschiedene Werthe haben. Legen wir nun von irgend einem Punkte der Kreisperipherie r, dessen Parameter φ_1 ist, an einen Kreis dieser Schaar eine Tangente, so finden wir den Parameter ihres Endpunktes auf dem Kreise r, wie oben, durch die Gleichung 5):

$$a t_1^2 t_2^2 + b + c t_1 t_2 = t_1^2 + t_2^2.$$

Der Parameter des Endpunktes einer zweiten Tangente, die man vom Endpunkte der ersten an einen andern beliebigen Kreis der Schaar legt, wird erhalten durch die Gleichung:

$$a' t_2^2 t_3^2 + b' + c' t_2 t_3 = t_2^2 + t_3^2 \text{ u. s. w.}$$

Indem man nun den Anfangspunkt der ersten Tangente unendlich wenig verschiebt und sonst dieselbe Schlussweise anwendet, wie oben, erhält man nacheinander die Differentialgleichungen:

$$\frac{\sqrt{4 a t_2^4 + (c^2 - 4ab - 4) t_2^2 + 4b}}{1 + t_2^2} d\varphi_1 = \frac{\sqrt{4 a t_1^4 + (c^2 - 4ab - 4) t_1^2 + 4b}}{1 + t_1^2} d\varphi_2,$$

$$\frac{\sqrt{4 a' t_3^4 + (c'^2 - 4a'b' - 4) t_3^2 + 4b'}}{1 + t_3^2} d\varphi_2$$

$$= \frac{\sqrt{4 a' t_2^4 + (c'^2 - 4a'b' - 4) t_2^2 + 4b'}}{1 + t_2^2} d\varphi_3 \text{ u. s. w.}$$

Nun geht aber für die Ebene die dritte der Gleichungen 4) über in: $2(r^2 - \delta^2) = \varrho^2 c$, was mit den zwei anderen schon oben gebrauchten: $(r + \delta)^2 = \varrho^2 (a + 1)$ und $(r - \delta)^2 = \varrho^2 (b + 1)$ die Relation giebt: $c^2 = 4(a+1)(b+1)$, aus welcher $c^2 - 4ab - 4 = 4(a + b)$ folgt. Dividirt man daher diese Differentialgleichungen der Reihe nach mit b, b' u. s. w. und bezeichnet das Verhältniss $a : b = a' : b'$ u. s. w. mit λ, ferner einen Ausdruck wie $\dfrac{\sqrt{4 \lambda t_k^4 + 4(\lambda + 1) t_k^2 + 4b}}{1 + t_k^2}$ mit f_k, so hat man auch hier wieder $f_2 \, d\varphi_1 = f_1 \, d\varphi_2$, $f_3 \, d\varphi_2 = f_2 \, d\varphi_3$ u. s. w. und zuletzt $f_{n+1} \, d\varphi_n = f_n \, d\varphi_{n+1}$, woraus durch Multiplication, wie oben, $f_{n+1} \, d\varphi_1 = f_1 \, d\varphi_{n+1}$ folgt. Hat man aber vom Endpunkte der vorletzten Tangente eine Verbindungslinie nach dem Anfang der ersten gezogen, so dass das Vieleck sich schliesst, so wird auch diese nothwendig irgend einen Kreis der Schaar berühren und man wird haben: $f_{n+1} = f_1$, folglich auch $d\varphi_1 = d\varphi_{n+1}$, d. h. der Endpunkt der letzten Tangente fällt auch jetzt wieder mit dem Anfangspunkt der ersten zusammen, und es gilt der Satz:

B. Wenn in der Ebene ein fester Kreis mit dem Radius r und eine Schaar von Kreisen mit dem veränderlichen Radius ϱ gegeben sind, welche alle mit dem Kreise r dieselbe Potenzlinie besitzen, und man legt von irgend

einem Punkte des ersten Kreises an einen beliebigen Kreis der Schaar eine Tangente, von ihrem Endpunkte an einen zweiten Kreis der Schaar eine zweite Tangente und so fort, so wird die Verbindungslinie des Endpunktes der letzten Tangente mit dem Anfangspunkte der ersten immer denselben Kreis der Schaar berühren, wenn man auch das dadurch entstandene Vieleck sich so drehen lässt, dass seine Eckpunkte auf der Peripherie des Kreises r fortrücken und die $n-1$ ersten Seiten desselben fortwährend dieselben Kreise der Schaar berühren.

Für die Kugel lässt sich ein ähnlicher Satz nicht aufstellen. Denn sollte obige Schlussweise auch hier zulässig sein, so müsste sich erstens die Grösse $c^2-4ab-4$ durch eine mit a oder b multiplicirte Function von $a:b$ ausdrücken lassen, und zweitens müsste die Bedingung, welche erfüllt sein muss, damit alle Kreise der Schaar mit dem Kreise r dieselbe Potenzlinie besitzen, eine Function von $a:b$ allein sein. Keines von beiden ist der Fall. Die oben Gleichung 4) gegebenen Werthe von a, b, c liefern nämlich:

$$(a\cos^2 r+1)\sin^2\varrho=\sin^2(r+\delta),\quad (b\cos^2 r+1)\sin^2\varrho=\sin^2(r-\delta)$$

und

$$(c\cos^2 r+2\sin^2 r)\sin^2\varrho=2\sin(r+\delta)\sin(r-\delta);$$

daraus folgt:

$$4(a\cos^2 r+1)(b\cos^2 r+1)=[(c-2)\cos^2 r+2]^2$$

und daraus

$$c-2=-2(1+tg^2 r)\pm 2\sqrt{(a+1+tg^2 r)(b+1+tg^2 r)}.$$

Dies giebt endlich:

$$c^2-4ab-4=4(a+b+2\,tg^2 r)\pm 8\,tg^2 r\sqrt{(a+1+tg^2 r)(b+1+tg^2 r)}.$$

Um die Gleichung des Potenzkreises zu finden, müssen wir aus den Gleichungen 1) und 3) die Grösse $x^2+y^2+z^2$ eliminiren, wodurch man $z^2\cos^2\varrho=(x\sin\delta+z\cos\delta)^2\cos^2 r$ oder $x\sin\delta\cos r=z(-\cos\delta\cos r\pm\cos\varrho)$ erhält, d. h. die Gleichungen zweier grössten Kreise der Kugel. Es lässt sich leicht zeigen, dass der erste derselben, für den das positive Zeichen gilt, die Eigenschaft besitzt, dass die von einem beliebigen Punkte desselben an die Kreise r und ϱ gelegten sphärischen Tangenten einander gleich sind, während die von einem Punkte des zweiten an den Kreis r und den Gegenkreis von ϱ gezogenen Tangenten gleich sind. In der That, sind

$$x\sin\delta\cos r=z(-\cos\delta\cos r+\cos\varrho)$$

und

$$y\sin\delta\cos r=\lambda z(-\cos\delta\cos r+\cos\varrho)$$

die Gleichungen der geraden Linie, die man vom Ursprung nach einem Punkte des ersten Potenzkreises gezogen hat, so findet man den Winkel k, welchen diese Gerade mit der z-Axe macht, durch die Gleichung:

$$\cos k = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2(\lambda^2+1)}},$$

wo $-\cos\delta\cos r + \cos\varrho = \mu\sin\delta\cos r$ gesetzt ist; dagegen wird der Winkel $\varkappa$, den dieselbe Gerade mit dem Kugelradius nach dem Mittelpunkte des Kreises ϱ macht, bestimmt durch die Gleichung:

$$\cos\varkappa = \frac{1+\mu\,tg\,\delta}{\sqrt{1+\mu^2(\lambda^2+1)}.\sqrt{1+tg^2\delta}} = \frac{\cos\delta+\mu\sin\delta}{\sqrt{1+\mu^2(\lambda^2+1)}}.$$

Bedeutet nun t die Länge der von jenem Punkte des ersten Potenzkreises an den Kreis r, und τ die Länge der von demselben Punkte an den Kreis ϱ gezogenen sphärischen Tangente, so ist nach einem für rechtwinklige Dreiecke geltenden Satze der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos k = \cos r\cos t \quad \text{und} \quad \cos\varkappa = \cos\varrho\cos\tau,$$

also $(\cos\delta+\mu\sin\delta)\cos r\cos t = \cos\varrho\cos\tau$ oder, wenn man die Gleichung $-\cos\delta\cos r+\cos\varrho = \mu\sin\delta\cos r$ heranzieht:

$$\cos t = \cos\tau,$$

woraus die erste Behauptung unmittelbar folgt. Nimmt man statt des Kreises ϱ einen andern mit dem Radius $\varrho' = 180^0 - \varrho$, so ist die Gleichung seines ersten Potenzkreises: $x\sin\delta\cos r = z(-\cos\delta\cos r+\cos\varrho')$ oder $x\sin\delta\cos r = z(-\cos\delta\cos r - \cos\varrho)$, d. h. die Gleichung des ersten Potenzkreises der Kreise r und ϱ' ist identisch mit der Gleichung des zweiten Potenzkreises der Kreise r und ϱ, womit die zweite Behauptung erwiesen ist.

Wenn also eine Schaar von Kreisen mit dem Kreise r den ersten Potenzkreis, der hier allein in Betracht kommt, gemeinschaftlich hat, so muss, weil für einen constanten Werth von p auch $p\,tg\,r$ eine Constante ist,

$$(p\,tg\,r\sin\delta+\cos\delta)\cos r = \cos\varrho$$

sein. Nun ist aber $\frac{a}{b} = \frac{\sin^2(r+\delta)-\sin^2\varrho}{\sin^2(r-\delta)-\sin^2\varrho}$, woraus $\sin^2\varrho = \sin^2 r\cos^2\delta + \cos^2 r\sin^2\delta - 2\frac{a+b}{a-b}\sin r\cos r\sin\delta\cos\delta$ folgt. Daher muss:

$$[p\,tg\,r\sin\delta+\cos\delta]^2\cos^2 r$$
$$= 1 - \left[\sin^2 r\cos^2\delta+\cos^2 r\sin^2\delta - 2\cdot\frac{a+b}{a-b}\sin r\cos r\sin\delta\cos\delta\right]$$

oder

$$[p\,tg\,r\,tg\,\delta+1]^2 = (1+tg^2 r)(1+tg^2\delta) - \left[tg^2 r + tg^2\delta - 2\frac{a+b}{a-b}tg\,r\,tg\,\delta\right]$$

oder endlich

$$[p\,tg\,r\,tg\,\delta+1]^2 = 1+tg^2 r\,tg^2\delta + 2\frac{a+b}{a-b}tg\,r\,tg\,\delta$$

sein. Wenn man entwickelt und den Factor $tg\,\delta$ weghebt, so wird daraus:

$$2[p(a-b)-(a+b)] = (a-b)(1-p^2)\,tg\,r\,tg\,\delta.$$

Es ist aber weiter: $(a-b)\sin^2\varrho\cos^2 r = \sin^2(r+\delta) - \sin^2(r-\delta)$ und $(a+b-c+2)\sin^2\varrho\cos^2 r = [\sin(r+\delta)-\sin(r-\delta)]^2$; daher kommt durch Division:

$$\frac{a-b}{a+b-c+2} = \frac{\sin(r+\delta)+\sin(r-\delta)}{\sin(r+\delta)-\sin(r-\delta)} = tg\, r\, cotg\,\delta,$$

also

$$2[p(a-b)-(a+b)] = (a+b-c+2)(1-p^2)\,tg^2 r$$

oder, wenn man für $a+b-c+2$ seinen oben gefundenen Werth setzt:

$$2[p(a-b)-(a+b)]$$
$$= \left[a+b+2(1+tg^2 r) \pm 2\sqrt{(a+1+tg^2 r)(b+1+tg^2 r)}\right](1-p^2)\,tg^2 r.$$

Das ist also die Bedingung, dass eine Schaar von Kreisen mit veränderlichem Radius ϱ zugleich mit dem festen Kreise r eine gemeinschaftliche Potenzlinie besitzt, ausgedrückt als Function von a und b. Daraus ersieht man sofort, dass sie nicht von dem Verhältniss der Grössen a und b abhängig ist, woraus, verbunden mit der Form des Ausdrucks, den wir für $c^2-4ab-4$ gefunden haben, folgt, dass der Satz B für die Kugel nicht gilt.

Unter den Vielecken, welche dem Kreise r ein- und dem Kreise ϱ umgeschrieben sind, besitzen die von gerader Seitenzahl einige besondere Eigenschaften; für ebene Vielecke findet man eine derselben entwickelt und ausgesprochen bei Durège a. a. O. S. 183 (vergl. unten Satz C).

Für ein $2n$-Eck nämlich gelten folgende $2n$ Gleichungen, die ähnlich der Gleichung 5) gebildet sind:

$$a t_1^2 t_2^2 + b + c t_1 t_2 = t_1^2 + t_2^2,$$
$$a t_2^2 t_3^2 + b + c t_2 t_3 = t_2^2 + t_3^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a t_{2n}^2 t_1^2 + b + c t_{2n} t_1 = t_{2n}^2 + t_1^2.$$

Eliminirt man aus der $(n+1)^{\text{ten}}$ dieser Gleichungen und der ersten, der $(n+2)^{\text{ten}}$ und der zweiten u. s. w. die Grösse c, so erhält man die n neuen Gleichungen:

$$(b - a t_1 t_2 t_{n+1} t_{n+2})(t_{n+1} t_{n+2} - t_1 t_2) = (t_1 t_{n+1} - t_2 t_{n+2})(t_1 t_{n+2} - t_2 t_{n+1}),$$
$$(b - a t_2 t_3 t_{n+2} t_{n+3})(t_{n+2} t_{n+3} - t_2 t_3) = (t_2 t_{n+2} - t_3 t_{n+3})(t_2 t_{n+3} - t_3 t_{n+2}),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(b - a t_n t_{n+1} t_{2n} t_1)(t_{2n} t_1 - t_n t_{n+1}) = (t_n t_{2n} - t_{n+1} t_1)(t_n t_1 - t_{n+1} t_{2n}).$$

Man kann diesen n Gleichungen zugleich dadurch Genüge thun, dass man

$$t_1 t_{n+2} = t_2 t_{n+1},\quad t_2 t_{n+3} = t_3 t_{n+2},\quad \ldots\quad t_n t_1 = t_{n+1} t_{2n}$$

setzt. Denn das Product aller dieser Relationen ist: $t_1^2 = t_{n+1}^2$, woraus $t_1 = \pm t_{n+1}$ folgt. Nimmt man das positive Zeichen, also $t_1 = t_{n+1}$, so folgt aus der ersten Relation $t_2 = t_{n+2}$, dann aus der dritten $t_3 = t_{n+3}$ etc.;

infolge dessen sind auch die auf der rechten Seite obiger Gleichungen vorkommenden zweiten Factoren gleich Null. Wählt man aber das negative Zeichen, nämlich $t_1 = -t_{n+1}$, so erhält man ebenso nacheinander: $t_2 = -t_{n+2}$, $t_3 = -t_{n+3}$ etc., und die erwähnten Factoren werden auch jetzt wieder Null. Aber obgleich die genannten Relationen obige Gleichungen in beiden Fällen identisch erfüllen, so darf man sie doch nicht als wirklich bestehend ansehen; denn im ersten Falle müsste $\varphi_1 = 360^0 + \varphi_{n+1}$, $\varphi_2 = 360^0 + \varphi_{n+2}$ etc. sein, d. h. die gegenüberliegenden Ecken des Vielecks müssten zusammenfallen, im zweiten Falle aber müsste $\varphi_1 = 360^0 - \varphi_{n+1}$, $\varphi_2 = 360^0 - \varphi_{n+2}$ etc. sein, d. h. die gegenüberliegenden Ecken des Vielecks müssten symmetrisch liegen gegen die Centrale, was ebenfalls unmöglich ist.

Dem gegenüber müssen wir uns nach anderen Relationen unter den t umsehen, welche obige Gleichungen erfüllen; solche erhält man aber durch Nullsetzen der ersten Factoren auf der rechten Seite der genannten Gleichungen, so dass

$$t_1 t_{n+1} = t_2 t_{n+2} = t_3 t_{n+3} = \ldots = t_n t_{2n} = \lambda,$$

wo λ eine Constante bedeutet. In der That gehen dadurch die genannten Gleichungen über in:

$$\begin{aligned}(b - a\lambda^2)(\lambda^2 - t_1^2 t_2^2) &= 0,\\ (b - a\lambda^2)(\lambda^2 - t_2^2 t_3^2) &= 0,\\ &\vdots\\ (b - a\lambda^2)(\lambda^2 - t_n^2 t_{n+1}^2) &= 0;\end{aligned}$$

die zweiten Factoren auf der linken Seite können nicht zugleich Null sein, weil sonst $t_1^2 = t_3^2$, $t_2^2 = t_4^2$, $t_3^2 = t_5^2$, $\ldots$ $t_{n-1}^2 = t_{n+1}^2$ folgen würde, was nicht möglich ist. Man hat daher den ersten Factor auf der rechten Seite $= 0$ zu setzen, also

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{b}{a}},$$

damit die Gleichungen vollständig erfüllt werden. Demzufolge bestehen für jedes Vieleck von gerader Seitenzahl die Relationen:

$$6)\qquad t_1^2 t_{n+1}^2 = t_2^2 t_{n+2}^2 = t_3^2 t_{n+3}^2 = \ldots = t_n^2 t_{2n}^2 = \frac{b}{a}.$$

Bei der Radicirung hat man das positive Zeichen zu nehmen, wenn die Kreise r und ϱ sich nicht einschliessen; im andern Falle das negative.

Nun ist die Gleichung einer Diagonale, welche die gegenüberliegenden Eckpunkte von den Parametern k und $n+k$ verbindet, nach Gleichung 2):

$$x \cos\tfrac{1}{2}(\varphi_k + \varphi_{n+k}) + y \sin\tfrac{1}{2}(\varphi_k + \varphi_{n+k}) = z\, tg\, r \cos\tfrac{1}{2}(\varphi_k - \varphi_{n+k})$$

oder, nach t_k und t_{n+k} entwickelt:

$$x(1-t_k t_{n+k})+y(t_k+t_{n+k})=z\,tgr(1+t_k t_{n+k}).$$

Ersetzt man hier t_{n+k} durch $-\frac{1}{t_k}\sqrt{\frac{b}{a}}$, so erhält man:

$$x+y\frac{t_k^2\sqrt{a}-b}{t_k^2\sqrt{a}+b}=z\,tgr\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Da, wie man sieht, die Gleichungen aller Diagonalen sich nur durch den Coefficienten von y unterscheiden, so schneiden sich alle in einem Punkte p_1 der Kugeloberfläche, dessen Coordinaten

$$7)\qquad y_1=0 \text{ und } x_1=z_1\,tgr.\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},$$

also unabhängig von den t sind. Daraus folgt der Satz:

C. Die Verbindungsbögen gegenüberliegender Ecken eines sphärischen Vielecks von gerader Seitenzahl, das einem festen Kreise r eingeschrieben und einem festen Kreise ϱ umgeschrieben ist, schneiden sich in einem Punkte, welcher unverändert derselbe bleibt, wenn man auch das Polygon verschiebt, sobald nur seine Ecken auf der Peripherie des Kreises r bleiben und seine Seiten den Kreis ϱ berühren.*

Wir wollen uns jetzt die Aufgabe stellen: den Schnittpunkt zweier gegenüberliegenden Seiten des Vielecks zu finden. Die Gleichung der Seite k, $k+1$ ist:

$$x(1-t_k t_{k+1})+y(t_k+t_{k+1})=z\,tgr(1+t_k t_{k+1}),$$

und die der Seite $n+k$, $n+k+1$:

$$x(1-t_{n+k}t_{n+k+1})+y(t_{n+k}+t_{n+k+1})=z\,tgr(1+t_{n+k}t_{n+k+1}).$$

Durch die Substitution $t_{n+k}=-\frac{1}{t_k}\sqrt{\frac{b}{a}}$ und $t_{n+k+1}=-\frac{1}{t_{k+1}}\sqrt{\frac{b}{a}}$ geht letztere über in:

$$x(at_k t_{k+1}-b)-y(t_k+t_{k+1})\sqrt{ab}=z\,tgr(at_k t_{k+1}+b).$$

Für den Schnittpunkt erhält man demnach nach leichter Rechnung:

$$x=z\,tgr\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}},\quad y=2z\,tgr\frac{t_k t_{k+1}\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(t_k+t_{k+1})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}.$$

Da die Gleichung zwischen x und z die Grössen t_k und t_{k+1} nicht mehr enthält, so liegen die Schnittpunkte irgend zweier gegenüberliegenden Seiten auf einem und demselben grössten Kreise, dessen Schnittpunkt p_2 mit der Centrale der Kreise r und ϱ bestimmt wird durch die Gleichungen:

* Für ebene Vielecke findet sich, wie schon oben bemerkt, dieser Satz entwickelt bei Durège a. a. O. S. 183.

8) $$y_2 = 0 \text{ und } x_2 = z_2 \, tg\, r \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$$

Wenn man den Quotienten $x_1 : z_1$ in Gleichung 7) mit $tg\, e_1$ und den Quotienten $x_2 : z_2$ in Gleichung 8) mit $tg\, e_2$ bezeichnet, so hat man durch Multiplication:

$$tg\, e_1 \, tg\, e_2 = tg^2 r,$$

woraus man schliesst, dass die Punkte p_1 und p_2 den auf der Centrale liegenden Durchmesser des Kreises r harmonisch theilen, oder dass der durch p_2 gehende grösste Kreis in Bezug auf den Punkt p_1 dieselbe Rolle spielt, wie in der Ebene die Polare in Bezug auf den Pol; daher gehen bekanntlich die Berührungssehnen aller von irgendwelchen Punkten dieses Polarkreises an den Kreis r gelegten Tangentenpaare durch den Pol p_1.

Wir können ferner noch die Frage aufwerfen, welcher Punkt p der harmonische Pol des durch p_2 gehenden grössten Kreises in Bezug auf den Kreis ϱ sei, oder welcher Punkt p zugleich mit p_2 den auf der Centrale liegenden Durchmesser des Kreises ϱ harmonisch theile. Nennen wir den Winkel, den der nach diesem Punkte gerichtete Kugelradius mit der z-Axe bildet, e, so muss demgemäss:

$$tg(e-\delta)\, tg(e_2-\delta) = tg^2 \varrho$$

sein, wo

$$tg\, e_2 = tg\, r \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}, \quad \text{also} \quad tg(e_2-\delta) = \frac{tg\, r(\sqrt{a}+\sqrt{b}) - tg\,\delta(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}-\sqrt{b}+tg\, r\, tg\,\delta(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$$

ist. Es ist aber:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin^2(r+\delta)-\sin^2\varrho}{\sin^2(r-\delta)-\sin^2\varrho} = \frac{(tg\, r+tg\,\delta)^2(1+tg^2\varrho) - tg^2\varrho(1+tg^2 r)(1+tg^2\delta)}{(tg\, r-tg\,\delta)^2(1+tg^2\varrho) - tg^2\varrho(1+tg^2 r)(1+tg^2\delta)},$$

oder anders geordnet:

$$\frac{a}{b} = \frac{(tg\, r+tg\,\delta)^2 - (1-tg\, r\, tg\,\delta)^2\, tg^2\varrho}{(tg\, r-tg\,\delta)^2 - (1+tg\, r\, tg\,\delta)^2\, tg^2\varrho}.$$

Dies giebt:

$$tg^2\varrho = \frac{a(tg\, r-tg\,\delta)^2 - b(tg\, r+tg\,\delta)^2}{a(1+tg\, r\, tg\,\delta)^2 - b(1-tg\, r\, tg\,\delta)^2}$$

oder, wenn man die Differenzen im Zähler und Nenner der rechten Seite in Producte zerlegt:

$$tg^2\varrho = \frac{[(tg\, r-tg\,\delta)\sqrt{a} - (tg\, r+tg\,\delta)\sqrt{b}]\,[(tg\, r-tg\,\delta)\sqrt{a} + (tg\, r+tg\,\delta)\sqrt{b}]}{[(1+tg\, r\, tg\,\delta)\sqrt{a} + (1-tg\, r\, tg\,\delta)\sqrt{b}]\,[(1+tg\, r\, tg\,\delta)\sqrt{a} - (1-tg\, r\, tg\,\delta)\sqrt{b}]};$$

durch andere Anordnung der Glieder auf der rechten Seite bekommt diese Gleichung schliesslich die Gestalt:

$$tg^2\varrho = \frac{tg\, r(\sqrt{a}-\sqrt{b}) - tg\,\delta(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+tg\, r\, tg\,\delta(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \cdot \frac{tg\, r(\sqrt{a}+\sqrt{b}) - tg\,\delta(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}-\sqrt{b}+tg\, r\, tg\,\delta(\sqrt{a}+\sqrt{b})}.$$

Der zweite Factor rechts ist, wie oben bemerkt, gleich $tg(e_2 - \delta)$, also ist:

$$tg(e-\delta) = \frac{tg r(\sqrt{a}-\sqrt{b}) - tg\delta(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+tg r\, tg\delta(\sqrt{a}-\sqrt{b})}, \text{ d. h. } tg e = tg r \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},$$

womit bewiesen ist, dass der Punkt p mit dem Punkte p_1, dem Schnittpunkte der Diagonalen, zusammenfällt.

Die beiden Punkte p_1 und p_2 theilen daher sowohl den auf der Centrale liegenden Durchmesser des Kreises r, als auch den ebenso liegenden Durchmesser des Kreises ϱ harmonisch, oder sie sind die Doppelpunkte der von den Endpunkten dieser Durchmesser auf der Centrale gebildeten Involution; infolge dessen ist der durch p_2 gehende grösste Kreis der Polarkreis des Punktes p_1 auch in Bezug auf den Kreis ϱ, oder die Berührungssehnen je zweier von irgend einem Punkte dieses Polarkreises an den Kreis ϱ gelegten Tangenten, folglich auch die Verbindungsbögen der Berührungspunkte je zweier gegenüberliegenden Seiten schneiden sich in dem Punkte p_1, dem nämlichen Punkte also, in dem sich auch die Verbindungsbögen je zweier gegenüberliegenden Ecken schneiden, und zwar findet dies Alles statt unabhängig von den verschiedenen Werthen, welche die t annehmen können, also auch dann, wenn man das Vieleck in der oben angegebenen Weise verschiebt. Weil wir bei unserer Untersuchung jedesmal die Substitution $t_{n+k} = -\frac{1}{t_k}\sqrt{\frac{b}{a}}$ gebrauchten, die nur dann gilt, wenn der Kreis r den Kreis ϱ einschliesst, so sind vorerst die gewonnenen Resultate auch nur in diesem Falle richtig; wenn aber die Kreise r und ϱ auseinanderliegen, man also für t_{n+k} das positive Zeichen wählen muss, so hat dies nur die Folge, dass die sphärischen Abscissen der Punkte p_1 und p_2 ihre algebraischen Werthe vertauschen, ohne dass die Eigenschaften dieser Punkte selbst sich ändern: der innerhalb des Kreises r liegende Doppelpunkt der Involution bleibt auch jetzt noch Schnittpunkt der Verbindungsbögen je zweier gegenüberliegenden Ecken des Vielecks sowohl, als des Vielecks der Berührungspunkte; der ausserhalb liegende bestimmt den grössten Kreis, auf dem die Schnittpunkte je zweier gegenüberliegenden Seiten des Vielecks liegen. Weil aber der gemeinschaftliche Schnittpunkt der Verbindungsbögen je zweier gegenüberliegenden Ecken des Vielecks der Berührungspunkte der Punkt p_1 ist, so müssen nothwendig die Schnittpunkte je zweier gegenüberliegenden Seiten des Vielecks der Berührungspunkte auf dem grössten Kreise liegen, der durch den diesem harmonisch zugeordneten Punkt, nämlich den Punkt p_2 bestimmt wird. Das Gesammtergebniss unserer Untersuchung enthält folgender Satz:

D. Für ein sphärisches Vieleck von gerader Seitenzahl, das einem festen Kreise r eingeschrieben und einem

festen Kreise ϱ umgeschrieben ist, sind die Doppelpunkte der von den Endpunkten der Durchmesser beider Kreise auf der Centrale gebildeten Involution zwei merkwürdige Punkte, von denen der erste, innerhalb des Kreises r liegende die Eigenschaft besitzt, dass die Verbindungsbögen je zweier gegenüberliegenden Eckpunkte sowohl des Vielecks, als auch des Vielecks der Berührungspunkte durch ihn hindurchgehen, während der zweite, ausserhalb des Kreises r liegende einen grössten Kreis bestimmt, auf dem die Schnittpunkte je zweier gegenüberliegenden Seiten sowohl des Vielecks, als des Vielecks der Berührungspunkte sich befinden. Alles dies bleibt unverändert, auch wenn man das Vieleck so verschiebt, dass seine Eckpunkte auf dem Kreise r bleiben und seine Seiten fortwährend den Kreis ϱ berühren.

Wenn in den festen Kreis r ein sphärisches Vieleck von bestimmter Seitenzahl eingeschrieben werden soll, dessen Seiten einen andern Kreis mit dem Radius ϱ berühren, so muss zwischen den Grössen r, δ und ϱ eine gewisse Relation bestehen, die, wie aus Satz A erhellt, unabhängig ist von den Werthen der Parameter der Eckpunkte des Vielecks. Man könnte dieselbe dadurch erhalten, dass man aus den n Gleichungen:

$$\begin{array}{c} a t_1^2 t_2^2 + b + c t_1 t_2 = t_1^2 + t_2^2, \\ a t_2^2 t_3^2 + b + c t_2 t_3 = t_2^2 + t_3^2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a t_n^2 t_1^2 + b + c t_n t_1 = t_n^2 + t_1^2 \end{array}$$

die Grössen $t_2, t_3, \ldots t_n$ eliminirte, wodurch man eine Endgleichung bekäme, die nur noch t_1 enthielte. Wegen der Willkürlichkeit von t_1 müssten aber sämmtliche Coefficienten dieser Gleichung gleich Null sein, also einen gemeinschaftlichen Factor besitzen, der, gleich Null gesetzt, die fragliche Relation lieferte. Für ein Dreieck hat man beispielshalber die drei Gleichungen:

$$\begin{array}{c} a t_1^2 t_2^2 + b + c t_1 t_2 = t_1^2 + t_2^2, \\ a t_2^2 t_3^2 + b + c t_2 t_3 = t_2^2 + t_3^2, \\ a t_3^2 t_1^2 + b + c t_3 t_1 = t_3^2 + t_1^2. \end{array}$$

Die Elimination von t_3 aus den beiden letzten Gleichungen giebt das Resultat:

$$[a c^2 t_1^2 - (ab-1)^2] t_2^2 + [(ab+1)c^2 - 2(ab-1)^2] t_1 t_2 + b c^2 - (ab-1)^2 t_1^2 = 0.$$

Schreibt man die erste Gleichung in der Form:

$$(a t_1^2 - 1) t_2^2 + c t_1 t_2 + b - t_1^2 = 0,$$

so erhält man durch Elimination von t_2 aus dieser und der vorhergehenden Gleichung:

$$\begin{vmatrix} act_1^2-(ab-1)^2 & 0 & at_1^2-1 & 0 \\ (ab+1)c^2-2(ab-1)^2 & act_1^2-(ab-1)^2 & c & at_1^2-1 \\ bc^2-(ab-1)^2t_1^2 & (ab+1)c^2-2(ab-1)^2 & b-t_1^2 & c \\ 0 & bc^2-(ab-1)^2t_1^2 & 0 & b-t_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Aus dieser Determinante kann man den Factor $ab-1-c$ ausscheiden; denn sie wird identisch gleich Null, wenn man $ab-1=c$ setzt, weil dann zwei Vertikalreihen, nachdem man sie durch c^2 dividirt hat, den beiden anderen Vertikalreihen gleich werden. Also ist $ab-1=c$ die verlangte Relation.

Es würde jedoch, wie man an diesem Beispiele sieht, zu sehr unerquicklichen Rechnungen führen, wenn man in dieser Weise auch die Relationen für Vielecke höherer Seitenzahl entwickeln wollte. Da bietet nun aber der Satz A ein willkommenes Mittel, um die aufzuwendende Mühe ganz bedeutend zu verringern. Weil nämlich darnach die fragliche Relation bei jeder Lage des Vielecks, d. h. bei jedem Werthe des Anfangsparameters φ_1 gelten muss, so kann man auch dem φ_1 den speciellen Werth Null geben, wodurch bewirkt wird, dass die übrigen Ecken des Vielecks eine symmetrische Lage gegen die Centrale annehmen. Für ein Vieleck von gerader Seitenzahl $2n$ wird nämlich dann: $\varphi_2=360^0-\varphi_{2n}$, $\varphi_3=360^0-\varphi_{2n-1}$ ... etc. und endlich $\varphi_{n+1}=360^0-\varphi_{n+1}$ oder $\varphi_{n+1}=180^0$, und infolge dessen: $t_{2n}=-t_2$, $t_{2n-1}=-t_3$ ... etc. und endlich $t_{n+1}=\infty$; für ein Vieleck von ungerader Seitenzahl $2n+1$ aber hat man dann: $\varphi_2=360^0-\varphi_{2n+1}$, $\varphi_3=360^0-\varphi_{2n}$ ... etc. und endlich $\varphi_{n+1}=360^0-\varphi_{n+2}$, und infolge dessen: $t_{2n+1}=-t_2$, $t_{2n}=-t_3$ ... etc. und endlich $t_{n+2}=-t_{n+1}$. Wenn man zunächst in die $2n$ für ein Vieleck von gerader Seitenzahl geltenden Gleichungen die eben für die t gefundenen Werthe substituirt, so werden die n letzten Gleichungen identisch mit den n ersten und man hat deshalb die n Gleichungen:

$$9)\quad \left\{ \begin{array}{rcl} b &=& t_2^2, \\ at_2^2t_3^2+b+ct_2t_3 &=& t_2^2+t_3^2, \\ at_3^2t_4^2+b+ct_3t_4 &=& t_3^2+t_4^2, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot && \cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot && \cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot && \cdot\quad\cdot \\ at_{n-1}^2t_n^2+b+ct_{n-1}t_n &=& t_{n-1}^2+t_n^2, \\ at_n^2 &=& 1. \end{array} \right.$$

Ebenso erhält man für ein Vieleck von $2n+1$ Seiten die $n+1$ Gleichungen:

$$10)\quad \left\{\begin{array}{l} b = t_2^2, \\ a t_2^2 t_3^2 + b + c t_2 t_3 = t_2^2 + t_3^2, \\ a t_3^2 t_4^2 + b + c t_3 t_4 = t_3^2 + t_4^2, \\ \quad \cdot \quad , \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a t_n^2 t_{n+1}^2 + b + c t_n t_{n+1} = t_n^2 + t_{n+1}^2, \\ a t_{n+1}^4 + b - c t_{n+1}^2 = 2 t_{n+1}^2. \end{array}\right.$$

Aus diesen beiden Gleichungssystemen kann man noch einen merkwürdigen Schluss ziehen. Substituirt man nämlich aus der ersten der Gleichungen 9) den Werth von t_2 in die zweite, so erhält man:

$$a b t_3^2 + b + c\sqrt{b}\, t_3 = b + t_3^2 \quad \text{oder} \quad (ab-1) t_3 + c\sqrt{b} = 0.$$

Wenn man daher mit f_k kurzweg eine Function der beiden Grössen ab und c bezeichnet, so ist $t_3 = f_0 \sqrt{b}$. Dies in die dritte der Gleichungen 9) substituirt, giebt: $a b f_0^2 t_4^2 + b + c f_0 \sqrt{b}\, t_4 = f_0^2 b + t_4^2$, woraus $t_4 = \sqrt{b}$ $\times \dfrac{-c f_0 \pm \sqrt{c^2 f_0^2 - 4(1-f_0^2)(a b f_0^2 - 1)}}{2(a b f_0^2 - 1)}$, d. h. wieder eine mit $\sqrt{b}$ multiplicirte Function von ab und c folgt, so dass man setzen kann: $t_4 = f_1 \sqrt{b}$; dann folgt in der nämlichen Weise $t_5 = f_2 \sqrt{b}$ etc.; die letzte Gleichung giebt dann aber $a b f_{n-3}^2 = 1$ als verlangte Relation, die sich demnach als eine Function der beiden Grössen ab und c ausweist. Setzt man den in der nämlichen Weise aus der vorletzten der Gleichungen 10) gewonnenen Werth von t_{n+1}, nämlich $f_{n-2}\sqrt{b}$ in die letzte, so entsteht: $a b^2 f_{n-2}^4 + b - c b f_{n-2}^2 = 2 b f_{n-2}^2$ oder nach der Division mit b: $a b f_{n-2}^4 + 1 - c f_{n-2}^2 = 2 f_{n-2}^2$ als verlangte Relation, die also ebenfalls eine Function der beiden Grössen ab und c ist. Man kann diese beiden Resultate in den Satz zusammenfassen:

E. Die für irgend ein sphärisches Vieleck von bestimmter Seitenzahl, das einem Kreise mit dem Radius r eingeschrieben und einem Kreise ϱ umgeschrieben ist, geltende Relation zwischen r, ϱ und δ ist eine Function der beiden Grössen

$$ab = \frac{\sin(r+\delta+\varrho)\,\sin(r+\delta-\varrho)\,\sin(r-\delta+\varrho)\,\sin(r-\delta-\varrho)}{\sin^4\varrho\,\cos^4 r}$$

und

$$c = \frac{2(\sin^2 r\,\cos^2\varrho - \sin^2\delta)}{\sin^2\varrho\,\cos^2 r}.$$

Wenn man von der Kugel zur Ebene übergeht, so bleibt der eben geschilderte Bau der Relationen derselbe, nur hat man

$$\frac{(r+\delta+\varrho)(r+\delta-\varrho)(r-\delta+\varrho)(r-\delta-\varrho)}{\varrho^4} \quad \text{oder} \quad \frac{[(r+\varrho)^2-\delta^2][(r-\varrho)^2-\delta^2]}{\varrho^4}$$

statt ab und $\frac{2(r^2-\delta^2)}{\varrho^2}$ statt c zu setzen. Nun lässt sich aber das Product ab für die Kugel auch auf die Form:

$$\frac{[\sin^2(r+\varrho)-\sin^2\delta][\sin^2(r-\varrho)-\sin^2\delta]}{\sin^4\varrho\cos^4 r}$$

$$=\frac{\{[\sin r\cos\varrho+\sin\varrho\cos r]^2-\sin\delta^2\}\{[\sin r\cos\varrho-\sin\varrho\cos r]^2-\sin^2\delta\}}{\sin^4\varrho\cos^4 r}$$

bringen, weil $\sin(r+\delta+\varrho)\sin(r-\delta+\varrho)=\sin^2(r+\varrho)-\sin^2\delta$ und $\sin(r+\delta-\varrho)\sin(r-\delta-\varrho)=\sin^2(r-\varrho)-\sin^2\delta$ ist. Daraus kann man folgende Schlussfolgerung ziehen:

F. Die Relation zwischen r, ϱ und δ für ein sphärisches Vieleck von bestimmter Seitenzahl lässt sich aus der für ein ebenes Vieleck derselben Seitenzahl dadurch ableiten, dass man $\sin\delta$ statt δ, $\sin r\cos\varrho$ statt r und $\sin\varrho\cos r$ statt ϱ setzt.*

Dieser Satz ist für die Herleitung der auf sphärische Vielecke bezüglichen Relationen von grosser Wichtigkeit, weil es in vielen Fällen leichter ist, die Relationen für ebene Vielecke zu finden, wofür weiter unten Beispiele vorkommen werden.

Es bleibt uns nur noch übrig, für einige der einfachsten Fälle diese Relationen wirklich zu entwickeln, und zwar wollen wir mit Vielecken gerader Seitenzahl den Anfang machen, weil sich für diese die Ausführung der Rechnung am leichtesten gestaltet.

1. Für ein Viereck hat man nach 9) die zwei Gleichungen: $b=t_2^2$ und $at_2^2=1$, woraus sofort:

$$ab-1=0$$

oder

$$\sin(r+\delta+\varrho)\sin(r+\delta-\varrho)\sin(r-\delta+\varrho)\sin(r-\delta-\varrho)=\sin^4\varrho\cos^4 r \;**$$

als verlangte Relation folgt. Für die Ebene geht dieselbe über in:

$$(r+\delta+\varrho)(r+\delta-\varrho)(r-\delta+\varrho)(r-\delta-\varrho)=\varrho^4$$

oder

$$(r^2-\varrho^2)^2-2\delta(r^2+\varrho^2)+\delta^4=\varrho^4.$$

Dies giebt:

$$\delta^2=r^2+\varrho^2\pm\varrho\sqrt{4r^2+\varrho^2},$$

wo das obere Zeichen für den Fall gilt, dass der Kreis ϱ ausserhalb des Kreises r liegt, das untere für den Fall, dass der Kreis r den Kreis ϱ

---

* In etwas anderer Form findet sich dieser Satz, durch Vergleichung der Werthe der Invarianten Δ, Δ', Θ und Θ' für die Ebene und die Kugel abgeleitet, bei Salmon-Fiedler, Analyt. Geometrie des Raumes I[2], S. 316.

** Genau in derselben Gestalt, aber ohne Beweis giebt Steiner diese Relation Gesammelte Werke I, 159, wo er auch die Relationen für das ebene Drei-, Vier-, Fünf-, Sechs- und Achteck mittheilt.

einschliesst. Umgekehrt leitet man daraus durch Anwendung des Satzes F für das sphärische Viereck folgende Form der Relation her:

$$\sin^2\delta = \sin^2 r \cos^2\varrho + \sin^2\varrho \cos^2 r \pm \sin\varrho \cos r \sqrt{4 \sin^2 r \cos^2\varrho + \sin^2\varrho \cos^2 r}.$$

2. Für ein Sechseck gelten die drei Gleichungen:

$$b = t_2^2, \quad a t_2^2 t_3^2 + b + c t_2 t_3 = t_2^2 + t_3^2, \quad a t_3^2 = 1,$$

woraus nach leichter Rechnung die Relation $(ab-1)^2 = c^2 ab$ folgt, d. h.:

$$[\sin(r+\delta+\varrho)\sin(r+\delta-\varrho)\sin(\varrho-\delta+\varrho)\sin(r-\delta-\varrho) - \sin^4\varrho \cos^4 r]^2$$
$$= 4(\sin^2 r \cos^2\varrho - \sin^2\delta)^2 \sin(r+\delta+\varrho)\sin(r+\delta-\varrho)\sin(r-\delta+\varrho)\sin(r-\delta-\varrho).$$

3. Für ein Achteck erhält man aus den vier Gleichungen:

$$b = t_2^2, \; a t_2^2 t_3^2 + b + c t_2 t_3 = t_2^2 + t_3^2, \; a t_3^2 t_4^2 + b + c t_3 t_4 = t_3^2 + t_4^2, \; a t_4^2 = 1$$

ebenso leicht die Relation:

$$(ab-1)^4 = c^4 ab.$$

4. Was das Zehneck betrifft, so könnte es scheinen, dass die Relation für dasselbe $(ab-1)^6 = c^6 ab$ heissen müsse, weil man für das Viereck $(ab-1)^0 = c^0 ab$, für das Sechseck $(ab-1)^2 = c^2 ab$, für das Achteck $(ab-1)^4 = c^4 ab$ hat; aber dieser Analogieschluss ist falsch, wie aus der folgenden Darstellung hervorgeht. Von den fünf Gleichungen:

$$b = t_2^2, \quad a t_2^2 t_3^2 + b + c t_2 t_3 = t_2^2 + t_3^2,$$
$$a t_3^2 t_4^2 + b + c t_3 t_4 = t_3^2 + t_4^2,$$
$$a t_4^2 t_5^2 + b + c t_4 t_5 = t_4^2 + t_5^2, \quad a t_5^2 = 1$$

giebt nämlich zunächst die zweite und vierte mit Hilfe der ersten und fünften:

$$(ab-1)t_3 + c\sqrt{b} = 0 \quad \text{und} \quad c\sqrt{a}\,t_4 + ab - 1 = 0.$$

Durch Substitution der daraus gewonnenen Werthe von t_3 und t_4 in die dritte Gleichung erhält man:

$$2abc^2(ab-1)^2 + c^3(ab-1)^2\sqrt{ab} = abc^4 + (ab-1)^4$$

oder anders geordnet:

$$c^3(ab-1)^2\sqrt{ab} = [(ab-1)^2 - c^2 ab]^2 - c^4 ab(ab-1).$$

Durch Quadriren geht diese Gleichung über in:

$$c^6(ab-1)^4 ab = [(ab-1)^2 - c^2 ab]^4 - 2c^4 ab(ab-1)[(ab-1)^2 - c^2 ab]^2$$
$$+ c^8 a^2 b^2 (ab-1)^2$$

oder, wenn man das Glied links auf die rechte Seite bringt:

$$0 = [(ab-1)^2 - c^2 ab]\{[(ab-1)^2 - c^2 ab]^3 - 2c^4 ab(ab-1)[(ab-1)^2 - c^2 ab]$$
$$- c^6 ab(ab-1)^2\}.$$

Wie man sieht, lässt sich der Factor $(ab-1)^2 - c^2 ab$, welcher dem Zehneck fremd ist, weil er, gleich Null gesetzt, die Relation für das Sechseck liefert, ausscheiden, und die Relation für das Zehneck nimmt demnach die Gestalt an:

$$[(ab-1)^2 - c^2 ab]^3 = 2c^4 ab(ab-1)[(ab-1)^2 - c^2 ab] + c^6 ab(ab-1)^2.$$

Indem man die linke Seite in die zwei Posten $(ab-1)^2[(ab-1)^2-c^2ab]^2$ $-c^2ab[(ab-1)^2-c^2ab]^2$ zerlegt und den zweiten auf die rechte Seite bringt, erhält diese Gleichung die bequemere Form:

$$(ab-1)^2[(ab-1)^2-c^2ab]^2=c^2ab[(ab-1)^2-c^2]^2,$$

wodurch durch Radicirung die zwei Relationen:

$$(ab-1)[(ab-1)^2-c^2ab]=\pm c[(ab-1)^2-c^2]\sqrt{ab}$$

entspringen, von denen die erste für den Fall gilt, dass der Kreis r den Kreis ϱ einschliesst, die zweite, mit dem negativen Zeichen rechts, für den Fall, dass die Kreise r und ϱ auseinanderliegen.

5. Endlich wollen wir noch die Relation für ein Zwölfeck entwickeln. Aus der ersten und zweiten, vorletzten und letzten der hierzu dienenden Gleichungen erhält man wieder wie oben:

$$(ab-1)t_3+c\sqrt{b}=0 \quad \text{und} \quad c\sqrt{a}\,t_5+ab-1=0,$$

wodurch die beiden mittelsten Gleichungen übergehen in:

$$[(ab-1)^2-c^2ab]\,t_4^2+c^2\sqrt{b}\,(ab-1)\,t_4+b[c^2-(ab-1)^2]=0,$$
$$a[c^2-(ab-1)^2]\,t_4^2+c^2\sqrt{a}\,(ab-1)\,t_4+[(ab-1)^2-c^2ab]=0.$$

Als Resultante dieser beiden Gleichungen findet man nach den bekannten Methoden:

$$(ab-1)^2[(ab-1)^2-c^2\sqrt{ab}]\{[(ab-1)^2+c^2\sqrt{ab}]^2-c^4(1+\sqrt{ab})^2\sqrt{ab}\}=0.$$

Die beiden ersten quadratischen Factoren sind dem Zwölfeck fremd, denn sie gelten für das Viereck und Achteck. Es bleiben somit als Relationen für das Zwölfeck, wenn man entwickelt und neu ordnet:

$$(ab-1)^4-c^4ab=\pm c^2[c^2(ab+1)-2(ab-1)^2]\sqrt{ab},$$

von denen die erste, mit dem positiven Zeichen, wiederum für den Fall gilt, dass der Kreis r den Kreis ϱ einschliesst, die zweite für den Fall, dass beide Kreise auseinanderliegen.

Die Relationen für Vielecke ungerader Seitenzahl folgen ebenso leicht aus den Gleichungen 10), und zwar hat man

1. für das Dreieck $b=t_2^2$ und $at_2^4+b-ct_2^2=2t_2^2$. Daraus findet man sofort nach Ausscheidung des Factors b:

$$ab-1=c,$$

d. h.

$$\sin(r+\delta+\varrho)\sin(r+\delta-\varrho)\sin(r-\delta+\varrho)\sin(r-\delta-\varrho)$$
$$=\sin^2\varrho\cos^2r[\sin^2\varrho\cos^2r+2\sin^2r\cos^2\varrho-2\sin^2\delta].$$

Für die Ebene geht diese Relation über in:

$$(r^2-\varrho^2)^2-2\delta^2(r^2+\varrho^2)+\delta^4=\varrho^4+2\varrho^2(r^2-\delta^2)$$

oder

$$\delta^4-2r^2\delta^2+r^4-4r^2\varrho^2=0.$$

Dies giebt aber die bekannte Euler'sche Relation $\delta^2=r^2\pm2r\varrho$, folglich nach Satz F für das sphärische Dreieck:

$$\sin^2\delta = \sin r \cos\varrho (\sin r \cos\varrho \pm 2 \sin\varrho \cos r)^*$$

oder in anderer Form:

$$\sin^2\varrho \cos^2 r = \sin(r \pm \varrho + \delta) \sin(r \pm \varrho - \delta).$$

2. Das Fünfeck erfordert die Gleichungen:

$$b = t_2^2, \quad a t_2^2 t_3^2 + b + c t_2 t_3 = t_2^2 + t_3^2, \quad a t_3^4 + b - c t_3^2 = 2 t_3^2.$$

Die erste und zweite Gleichung geben $(ab-1)t_3 + c\sqrt{b} = 0$, wodurch die dritte Gleichung nach Ausscheidung des Factors b übergeht in:

$$abc^4 + (ab-1)^4 = c^2(c+2)(ab-1)^2.$$

Wenn man derselben die Form giebt:

$$[(ab-1)^2 - c^2]^2 = c^3(ab-1)[ab-1-c],$$

so kann man den Factor $ab-1-c$, welcher dem Dreieck angehört, hier also fremd ist, ausscheiden und erhält so endlich

$$[ab-1+c]^2[ab-1-c] = c^3(ab-1).$$

Für das ebene Fünfeck kann man sich mit Vortheil der folgenden Reduction bedienen. Man setze $(r+\delta):\varrho = \alpha$, $(r-\delta):\varrho = \beta$, so ist $a = \alpha^2 - 1$, $b = \beta^2 - 1$, $c = 2\alpha\beta$, $ab - 1 = \alpha^2\beta^2 - \alpha^2 - \beta^2$, was wir kurzweg mit A bezeichnen wollen. Die Gleichung $(ab-1)^4 - c^2(c+2)(ab-1)^2 + abc^4 = 0$ geht dann über in $A^4 - 8\alpha^2\beta^2(\alpha\beta+1)A^2 + 16\alpha^4\beta^4(\alpha^2-1)(\beta^2-1)$. Dies giebt aber $A^2 = 4\alpha^2\beta^2[\alpha\beta + 1 \pm (\alpha+\beta)]$, also entweder

$$(\alpha^2\beta^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 = 4\alpha^2\beta^2(\alpha+1)(\beta+1)$$

oder

$$(\alpha^2\beta^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 = 4\alpha^2\beta^2(\alpha-1)(\beta-1).$$

Die erste dieser Gleichungen ist durch $\alpha\beta + \alpha + \beta$ theilbar, die zweite durch $\alpha\beta - \alpha - \beta$; durch Ausführung der Divisionen bekommt man für das ebene Fünfeck die zwei Relationen:

$$\alpha^3 + \beta^3 - \alpha^3\beta^3 = \alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha+1)(\beta+1),$$
$$\alpha^3 + \beta^3 - \alpha^3\beta^3 = \alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha-1)(\beta-1),^{**}$$

von denen die erste gilt, wenn die Kreise r und ϱ sich schneiden, die zweite, wenn der Kreis ϱ vom Kreise r eingeschlossen wird. Nach Wiedereinführung der Werthe von α und β und durch Anwendung des Satzes F erhalten die Relationen ihre Ausdehnung auf die Kugel.

3. Der Einfachheit halber wollen wir gleich von vornherein das ebene Siebeneck betrachten und dabei die nämlichen Bezeichnungen beibehalten, wie in der vorigen Nummer. Man hat auszugehen von den Gleichungen:

---

* In etwas anderer Form steht diese Relation bei Salmon-Fiedler a. a. O. S. 316.

** Vergl. damit die Form dieser Relation bei Durège a. a. O. S. 186; durch Rationalisiren und Ausscheidung des fremden Factors $r + \delta + \varrho$ kann man derselben die obige symmetrische Gestalt geben:

$$b=t_2^2,\quad a t_2^2 t_3^2+b+c t_2 t_3=t_2^2+t_3^2,\quad a t_3^2 t_4^2+b+c t_3 t_4=t_3^2+t_4^2,$$
$$a t_4^4+b-c t_4^2=2 t_4^2.$$

Aus der ersten und zweiten Gleichung ergiebt sich $A t_3=-2\alpha\beta\sqrt{\beta^2-1}$, aus der letzten Gleichung aber erhält man entweder $(\alpha-1)t_4^2=\beta+1$ oder $(\alpha+1)t_4^2=\beta-1$. Nehmen wir zunächst den ersten Werth, so wird die dritte Gleichung, nachdem man die Nenner weggebracht und mit dem fremden Factor $\beta+1$ dividirt hat:

$$4(\alpha^2-1)(\beta^2-1)\alpha^2\beta^2+(\alpha-1)(\beta-1)A^2-4\alpha^2\beta^2 A\sqrt{(\alpha-1)(\beta-1)}$$
$$=4\alpha^2\beta^2(\alpha-1)(\beta-1)+A^2$$

oder, wenn man berücksichtigt, dass $(\alpha^2-1)(\beta^2-1)=1-A$ ist:

$$4\alpha^2\beta^2(1-A)+(\alpha\beta-\alpha-\beta)A^2-4\alpha^2\beta^2(\alpha\beta-\alpha-\beta+1)$$
$$=4\alpha^2\beta^2 A\sqrt{(\alpha-1)(\beta-1)}.$$

Dies giebt nach der Reduction:

$$(A^2-4\alpha^2\beta^2)(\alpha\beta-\alpha-\beta)-4\alpha^2\beta^2 A=4\alpha^2\beta^2 A\sqrt{(\alpha-1)(\beta-1)}.$$

Erhebt man jetzt ins Quadrat, so fällt rechts und links das Glied $16\alpha^4\beta^4 A^2$ fort, und nach Weghebung des fremden Factors $\alpha\beta-\alpha-\beta$ bleibt nur noch:

$$(A^2-4\alpha^2\beta^2)^2(\alpha\beta-\alpha-\beta)-8\alpha^2\beta^2 A(A^2-4\alpha^2\beta^2)=16\alpha^4\beta^4 A^2$$

oder in einer mehr symmetrischen Form

$$(A^2-4\alpha^2\beta^2)^2(\alpha-1)(\beta-1)=(4\alpha^2\beta^2 A^2+A^2-4\alpha^2\beta^2)^2.$$

Diese Entwickelung gilt für den Fall, dass der Kreis r den Kreis ϱ einschliesst. Hätte man aber den andern Werth von t_4 aus $(\alpha+1)t_4^2=\beta-1$ genommen und gerade so gerechnet, so hätte man als Relation für den Fall, dass beide Kreise sich schneiden, erhalten:

$$(A^2-4\alpha^2\beta^2)^2(\alpha+1)(\beta+1)=(4\alpha^2\beta^2 A^2+A^2-4\alpha^2\beta^2)^2.$$

Dabei wären die Factoren $\beta-1$ und $\alpha\beta+\alpha+\beta$ weggefallen; das Product des bei der ersten Relation ausgeschiedenen Factors $\alpha\beta-\alpha-\beta$ mit $\alpha\beta+\alpha+\beta$ giebt aber $\alpha^2\beta^2-(\alpha+\beta)^2$, was annullirt die Relation für das Dreieck ist, ein Beweis, dass wir das Recht hatten, diese beiden Factoren wegzuwerfen.

Kleinere Mittheilungen.

III. Ueber dreifach-orthogonale Flächensysteme.

1. Geometrische Interpretation der Gleichungen

$$1)\qquad x = f(u, v, w), \quad y = \varphi(u, v, w), \quad z = \psi(u, v, w).$$

In den Gleichungen 1) seien x, y, z die gewöhnlichen rechtwinkligen Raumcoordinaten, u, v und w drei von einander völlig unabhängige Parameter, so ist klar, dass jedem Werthsystem von u, v, w ein oder mehrere Werthsysteme von x, y, z, d. h. ein oder mehrere Punkte des Raumes entsprechen, je nachdem die genannten Gleichungen linear oder höheren Grades sind. Setzt man nun eine der Variablen — etwa u — gleich constant und lässt nur v und w variiren, so wird man, wenn sich v und w continuirlich ändern, im Raume ein ganzes Continuum von Punkten, d. h. eine Fläche erhalten, in deren sämmtlichen Punkten $u = constant$ ist und deren Gleichung durch Elimination der Grössen v, w aus 1) gefunden wird. Denkt man sich dem u einen andern constanten Werth beigelegt, so bekommt man eine andere Fläche; lässt man u alle möglichen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen, betrachtet aber bezüglich eines jeden dieser Werthe die Grössen v, w als variabel, so bekommt man ein ganzes System von unendlich vielen Flächen, von denen jede die Eigenschaft besitzt, dass in ihren sämmtlichen Punkten $u = const.$ ist. Wir wollen dieses System von Flächen das System der u-Flächen nennen. Es ist nun klar, dass es ebenso ein System von unendlich vielen Flächen giebt, auf denen überall $v = const.$ ist. Wir nennen dieses System das System der v-Flächen. Ebenso giebt es ein System von Flächen, auf denen überall $w = const.$ ist, d. h. ein System von w-Flächen.

Es entspricht daher jedem Werthsystem von u, v, w ein bestimmter Punkt des Raumes, der als Schnittpunkt dreier Flächen — einer u-Fläche, einer v-Fläche und einer w-Fläche — erscheint, und man kann sonach jeden Punkt des Raumes als Schnittpunkt dreier sogenannter Fundamentalflächen auffassen. Es ist dadurch der Begriff des allgemeinsten Raumcoordinatensystems gegeben. So bekommt man z. B. das gewöhnliche rechtwinklige Coordinatensystem, wenn

$$x = u, \quad y = v, \quad z = w$$

gesetzt wird.

Setzt man

$$x = u\cos v\cos w,\quad y = u\sin v\cos w,\quad z = u\sin w,$$

so bekommt man das Polarcoordinatensystem. Denn setzt man $u = const.$, so erhält man durch Elimination von v und w eine Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2,$$

d. h. eine Kugel, deren Mittelpunkt der Anfangspunkt und deren Radius gleich u ist. Jedem andern constanten Werthe von u entspricht eine andere Kugel, und man erhält, indem u der Reihe nach alle möglichen Werthe zwischen $-\infty$ und $+\infty$ beigelegt werden, ein ganzes System von concentrischen Kugeln.

Setzt man $w = const.$, so ist $\cos w$, als auch $\sin w$ constant; ist etwa $\cos w = A$, $\sin w = B$, so ist

$$x = Au\cos v,\quad y = Au\sin v,\quad z = Bu$$

oder

$$x^2 + y^2 - \frac{A^2}{B^2}z^2 = 0,$$

d. h. man erhält einen geraden Kreiskegel, dessen Scheitel der Anfangspunkt und in dessen sämmtlichen Punkten $w = const.$ ist.

Setzt man $v = const.$, so bekommt man

$$x = A'u\cos w,\quad y = B'u\cos w,\quad z = u\sin w$$

oder

$$\frac{x}{A'} = \frac{y}{B'},$$

d. h.: die Fläche $v = const.$ ist eine Ebene, die durch die z-Axe geht.

Es erscheint somit auch im Polarcoordinatensystem jeder Punkt als Schnittpunkt dreier Fundamentalflächen.

Wir wollen ferner jede Linie der u-Fläche, in der nebst $u = const.$ auch $v = const.$ ist, welche also Schnittlinie der u-Fläche mit einer v-Fläche ist, eine uv-Linie nennen und haben sonach zwischen uv-Linien und uw-Linien der u-Fläche, zwischen uv-Linien und vw-Linien der v-Fläche und zwischen uw-Linien und vw-Linien der w-Fläche zu unterscheiden. Ferner soll die Curve einer Fläche, in der diese von einer u-Fläche geschnitten wird, eine u-Linie dieser Fläche genannt werden u. s. w.

2.

Es sollen folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = a,\quad \frac{\partial x}{\partial v} = a',\quad \frac{\partial x}{\partial w} = a'';$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = b,\quad \frac{\partial y}{\partial v} = b',\quad \frac{\partial y}{\partial w} = b'';$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = c,\quad \frac{\partial z}{\partial v} = c',\quad \frac{\partial z}{\partial w} = c'';$$

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 + c^2 &= F_{00},\\
a a' + b b' + c c' &= F_{01},\\
a'^2 + b'^2 + c'^2 &= F_{11},\\
a a'' + b b'' + c c'' &= F_{02},\\
a' a'' + b' b'' + c' c'' &= F_{12},\\
a''^2 + b''_2 + c''_2 &= F_{22};
\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} b, & c \\ b', & c' \end{vmatrix} = A_{01}, \quad \begin{vmatrix} b, & c \\ b'', & c'' \end{vmatrix} = A_{02},$$

$$\begin{vmatrix} b', & c' \\ b'', & c'' \end{vmatrix} = A_{12};$$

$$\begin{vmatrix} c, & a \\ c', & a' \end{vmatrix} = B_{01}, \quad \begin{vmatrix} c, & a \\ c'', & a'' \end{vmatrix} = B_{02},$$

$$\begin{vmatrix} c', & a' \\ c'', & a'' \end{vmatrix} = B_{12},$$

$$\begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix} = C_{01}, \quad \begin{vmatrix} a, & b \\ a'', & b'' \end{vmatrix} = C_{02},$$

$$\begin{vmatrix} a', & b' \\ a'', & b'' \end{vmatrix} = C_{12}.$$

Sind nun ds und ds_1 zwei vom Punkte (u, v, w) ausgehende Linienelemente, so zeigt eine Rechnung, die wir hier übergehen zu können glauben, dass das durch sie begrenzte Flächenelement $\Delta(F)$ durch:

$$\begin{aligned}
4\overline{\Delta(F)}^2 = \;& (F_{00} F_{22} - F_{02}^2)(du_1\, dw - du\, dw_1)^2\\
&+ (F_{00} F_{11} - F_{01}^2)(du\, dv_1 - dv\, du_1)^2\\
&+ (F_{11} F_{22} - F_{12}^2)(dv\, dw_1 - dw\, dv_1)^2\\
&+ 2(F_{01} F_{02} - F_{12} F_{00})(du\, dv_1 - dv\, du_1)(dw\, du_1 - du\, dw_1)\\
&+ 2(F_{01} F_{12} - F_{02} F_{11})(du\, dv_1 - dv\, du_1)(dv\, dw_1 - dw\, dv_1)\\
&+ 2(F_{02} F_{12} - F_{01} F_{22})(dw\, du_1 - du\, dw_1)(dv\, dw_1 - dv_1\, dw)
\end{aligned}$$

gegeben ist.

Die Lage dieses Flächenelements, somit auch die Richtung der zugehörigen Fläche im Punkte (u, v, w) ist gegeben durch die Richtung der Ebene, welche mit der Fläche, der dieses Element angehört, dieses gemein hat, d. h. durch die Richtung der Tangentialebene im Punkte (u, v, w) oder der Ebene, die durch:

$$u, \qquad v, \qquad w,$$

$$u + du, \quad v + dv, \quad w + dw$$

und

$$u + du_1, \quad v + dv_1, \quad w + dw_1$$

geht. Nachdem aber die Gleichung dieser Ebene

$$\begin{vmatrix} \xi - x, & \eta - y, & \zeta - z \\ a\,du + a'dv + a''dw, & b\,du + b'dv + b''dw, & c\,du + c'dv + c''dw \\ a\,du_1 + a'dv_1 + a''dw_1, & b\,du_1 + b'dv_1 + b''dw_1, & c\,du_1 + c'dv_1 + c''dw_1 \end{vmatrix} = 0$$

ist, so sind die Richtungscosinus der im Punkte (u, v, w) auf diese Ebene errichteten Senkrechten, d. h. der bezüglichen Flächennormale gegeben durch:

$$\cos\{N, x\} = \frac{1}{M}\{\ \varDelta_{01}(du\,dv_1 - dv\,du_1) + \varDelta_{02}(du\,dw_1 - dw\,du_1) + \varDelta_{12}(dv\,dw_1 - dw\,dv_1)\},$$

$$\cos\{N, y\} = \frac{1}{M}\{\ B_{01}(du\,dv_1 - dv\,du_1) + B_{02}(du\,dw_1 - dw\,du_1) + B_{12}(dv\,dw_1 - dw\,dv_1)\},$$

$$\cos\{N, z\} = \frac{1}{M}\{\ C_{01}(du\,dv_1 - dv\,du_1) + C_{02}(du\,dw_1 - dw\,du_1) + C_{12}(dv\,dw_1 - dw\,dv_1)\},$$

wobei M die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der drei Zähler bedeutet.

Für die Fundamentalflächen selbst ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\cos\{N, x\}_{u=c} = \frac{A_{12}}{\varDelta_{12}}, \quad \cos\{N, y\}_u = \frac{B_{12}}{\varDelta_{12}}, \quad \cos\{N, z\}_u = \frac{C_{12}}{\varDelta_{12}},$$

wenn $A^2 + B^2 + C^2 = \varDelta$ gesetzt wird.

Ebenso ist:

$$\cos\{N, x\}_{v=c} = \frac{A_{02}}{\varDelta_{02}}, \quad \cos\{N, y\}_v = \frac{B_{02}}{\varDelta_{02}}, \quad \cos\{N, z\}_v = \frac{C_{02}}{\varDelta_{02}}$$

und

$$\cos\{N, x\}_w = \frac{A_{01}}{\varDelta_{01}}, \quad \cos\{N, y\}_w = \frac{B_{01}}{\varDelta_{01}}, \quad \cos\{N, z\}_w = \frac{C_{01}}{\varDelta_{01}}.$$

8.

Es ist nun leicht, den Winkel anzugeben, unter welchem sich je zwei der zu einem (u, v, w)-Punkte gehörenden Fundamentalflächen schneiden.

Es ist nämlich:

$$\cos(u, v) = \cos\{N_u, N_v\} = \frac{A_{02}A_{12} + B_{02}B_{12} + C_{02}C_{12}}{\varDelta_{02}\varDelta_{12}},$$

$$\cos(u, w) = \cos\{N_u, N_w\} = \frac{A_{01}A_{12} + B_{01}B_{12} + C_{01}C_{12}}{\varDelta_{01}\varDelta_{12}}$$

und

$$\cos\{v, w\} = \frac{A_{01}A_{02} + B_{01}B_{02} + C_{01}C_{02}}{\varDelta_{01}\varDelta_{02}}.$$

Sollen sich überdies die Fundamentalflächen im Punkte (u, v, w) rechtwinklig durchschneiden, so müssen die Gleichungen

$$\text{A)} \quad \begin{cases} A_{02}A_{12} + B_{02}B_{12} + C_{02}C_{12} = 0, \\ A_{01}A_{12} + B_{01}B_{12} + C_{01}C_{12} = 0, \\ A_{01}A_{02} + B_{01}B_{02} + C_{01}C_{02} = 0 \end{cases}$$

bestehen.

Sind überhaupt für jeden Punkt des Raumes diese Gleichungen erfüllt, so ist jeder Punkt des Raumes als Schnittpunkt dreier sich in ihm rechtwinklig schneidender Flächen aufzufassen und man hat sich den ganzen Raum von lauter sich rechtwinklig durchschneidenden Flächen ausgefüllt zu denken, so dass jeder Punkt des Raumes Schnittpunkt dreier solcher Flächen ist.

Durch das Gleichungssystem A) sind also die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen gegeben, die drei Flächenschaaren zu erfüllen haben, damit sie ein dreifach-orthogonales Flächensystem bilden.

Doch erlauben die hier aufgestellten Bedingungen eine einfachere und elegantere Darstellung. Mit Rücksicht auf die eingeführten Bezeichnungen kann die erste Gleichung des Systems A) auch so geschrieben werden:

$$0=\begin{vmatrix} bb'+cc', & bb''+cc'' \\ b'b''+c'c'', & b''^2+c''^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} cc'+aa', & cc''+aa'' \\ c'c''+a'a'', & c''^2+a''^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} aa'+bb', & aa''+bb'' \\ a'a''+b'b'', & a''^2+b''^2 \end{vmatrix}$$

oder

$$0=3.\begin{vmatrix} aa'+bb'+cc', & aa''+bb''+cc'' \\ a'a''+b'b''+c'c'', & a''^2+b''^2+c''^2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} aa', & aa'' \\ F_{12}, & F_{22} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} bb'+cc', & bb''+cc'' \\ aa'', & a''^2 \end{vmatrix}$$
$$-\begin{vmatrix} bb', & bb'' \\ F_{12}, & F_{22} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} cc'+aa', & cc''+aa'' \\ b'b'', & b''_2 \end{vmatrix}$$
$$-\begin{vmatrix} cc', & cc'' \\ F_{12}, & F_{22} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} aa'+bb', & aa''+bb'' \\ c'c'', & c''^2 \end{vmatrix}.$$

Nun ist aber:

$$\begin{vmatrix} bb'+cc', & bb''+cc'' \\ a'a'', & a''^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} aa'+bb'+cc', & aa''+bb''+cc'' \\ a'a'' & a''^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} F_{01}, & F_{02} \\ a'a'', & a''^2 \end{vmatrix}$$

und daher:

$$0=3\cdot\begin{vmatrix} F_{01}, & F_{02} \\ F_{12}, & F_{22} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} F_{01}, & F_{02} \\ F_{12}, & F_{22} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} F_{01}, & F_{02} \\ F_{12}, & F_{22} \end{vmatrix}$$

oder

B)

$$\begin{vmatrix} F_{01}, & F_{02} \\ F_{12}, & F_{22} \end{vmatrix}=0.$$

Ebenso ist:

$$\begin{vmatrix} F_{12}, & F_{10} \\ F_{20}, & F_{00} \end{vmatrix}=0$$

und

$$\begin{vmatrix} F_{02}, & F_{01} \\ F_{21}, & F_{11} \end{vmatrix}=0.$$

Durch das Gleichungssystem B) sind also die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für dreifach-orthogonale Flächensysteme gegeben. Auch erkennt man sofort, dass als hinreichende Bedingungen für die gegenseitige Orthogonalität der drei Flächensysteme schon die Erfüllung der Gleichungen:

C) $$F_{01}=0,\quad F_{02}=0,\quad F_{12}=0$$
genügen.

Es seien z. B. die durch:

D) $$\left\{\begin{aligned} x &= f(u).\cos\varphi(v).\cos\psi(w),\\ y &= f(u).\cos\varphi(v).\sin\psi(w),\\ z &= f(u).\sin\varphi(v) \end{aligned}\right.$$

gegebenen Flächensysteme zu untersuchen (f, φ und ψ sind beliebige Functionen).

Hier ist:

$$\begin{array}{l|l|l} a=f'(u).\cos\varphi.\cos\psi, & a'=-f.\varphi'.\sin\varphi.\cos\psi, & a''=-f.\psi'.\cos\varphi.\sin\psi,\\ b=f'(u).\cos\varphi.\sin\psi, & b'=-f.\varphi'.\sin\varphi.\sin\psi, & b''=f.\psi'.\cos\varphi.\cos\psi,\\ c=f'(u).\sin\varphi & c'=f.\varphi'.\cos\varphi & c''=0 \end{array}$$

und daher:

$$F_{01}=0,\quad F_{02}=0,\quad F_{12}=0.$$

Es ist also durch D) ein dreifach-orthogonales Flächensystem gegeben.

Es soll nun folgende Frage behandelt werden.

Unter welchen Bedingungen stellt:

E) $$\left\{\begin{aligned} x &= (u+\alpha)^{1/2}.\cos v.\cos w,\\ y &= (u+\beta)^{1/2}.\cos v.\sin w,\\ z &= (u+\gamma)^{1/2}.\sin v \end{aligned}\right.$$

ein dreifach-orthogonales Flächensystem dar?*

Es ist hier:

$$\begin{array}{l|l|l} a=\dfrac{\cos v\cos w}{2\sqrt{u+\alpha}}, & a'=-\sin v\cos w\sqrt{u+\alpha}, & a''=-\sin v\sin w\sqrt{u+\alpha},\\ b=\dfrac{\cos v\sin w}{2\sqrt{u+\beta}}, & b'=-\sin v\sin w\sqrt{u+\beta}, & b''=\cos v\cos w\sqrt{u+\beta},\\ c=\dfrac{\sin v}{2\sqrt{u+\gamma}}, & c'=\cos v\sqrt{u+\gamma}, & c''=0 \end{array}$$

und daher:

$$F_{01}=0,\quad F_{02}=0,$$
$$F_{12}=(u+\alpha)\sin v\cos v\sin w\cos w-(u+\beta)\sin v\cos v\sin w\cos w.$$

Soll nun E) ein orthogonales System bilden, so muss, um B) zu genügen, entweder noch $F_{00}=0$ oder $F_{12}=0$ sein. Nachdem aber F_{00} hier nicht Null sein kann, so müsste $F_{12}=0$ sein. Dies ist aber der Fall, wenn $\alpha=\beta$ ist und sonach die eine Flächenschaar, welche nun durch:

$$\frac{x^2+y^2}{u+\alpha}+\frac{z^2}{u+\gamma}=1$$

gegeben ist, eine Schaar von Rotationsellipsoiden darstellt.

---

* Es ist dies ein specieller Fall der von Tissérand (Comptes rendus, Bd. 72) behandelten Frage.

Die durch C) gegebenen Bedingungen lassen eine einfache geometrische Deutung zu. $F_{12}=0$ drückt — wie eine kleine Ueberlegung zeigt — die Bedingung aus, dass sich die uv- und uw-Linien der u-Fläche rechtwinklig schneiden. Die gegebenen Definitionen dieser Linien lehrten aber, dass diese die Curven sind, in denen die u-Fläche von den beiden anderen Fundamentalflächen geschnitten wird. Dies für die anderen Fundamentalcurven der übrigen Flächen in Betracht gezogen, sowie die Berücksichtigung der Gleichungen $F_{02}=0$, $F_{01}=0$ giebt folgenden wichtigen Satz:

„Schneiden sich drei Flächen so, dass die drei bezüglichen Schnittcurven im gemeinsamen Schnittpunkte aufeinander senkrecht stehen, so schneiden sich auch die Flächen daselbst rechtwinklig."

Wien, im Juni 1883. Dr. Ed. Mahler.

IV. Berechnung der Moduln Rosenhain'scher Thetafunctionen.

In der Theorie der elliptischen Functionen gelingt es bekanntlich in eleganter Weise, den Modul der Thetafunctionen durch den Classenmodul oder, was dasselbe ist, durch den Werth eines Thetaquotienten mit verschwindendem Argument auszudrücken. Die analoge Aufgabe für die Rosenhain'schen Functionen gestaltet sich bei Weitem complicirter. In meiner „Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen und Rosenhain'schen Functionen gebraucht werden," ist unter 114) eine Näherungsformel gegeben, deren Begründung auf S. 20 versucht ist, von der aber infolge eines Versehens beim Rechnen nur das erste Glied brauchbar ist, wobei die vernachlässigten Glieder von der dritten Ordnung wären. Hierauf wurde ich privatim durch Herrn Krause und jüngst durch Herrn v. Braunmühl in den Leipziger Annalen XX, S. 565 aufmerksam gemacht. Es ist leicht, mit der in der Sammlung angewandten Methode die Genauigkeit bis auf Glieder fünfter Ordnung zu verschärfen; will man aber weiter gehen, so wird die Sache sehr complicirt. Ich will hier, um zu grösserer Genauigkeit zu gelangen, Formeln aufstellen, in welchen die vernachlässigten Glieder von der 20. Ordnung sind.

Es sei

$$f(x,y)=\tau_{11}xx+2\tau_{12}xy+\tau_{22}yy,$$

$$\vartheta^{h_1,h_2}_{g_1,g_2}=\Sigma\Sigma\, e^{\frac{1}{4}i\pi f(2m_1-h_1,\,2m_2-h_2)-\frac{1}{2}i\pi[(2m_1-h_1)g_1+(2m_2-h_2)g_2]},$$

$$\Theta^{h_1,h_2}_{g_1,g_2}=\Sigma\Sigma\, e^{i\pi f(2m_1-h_1,\,2m_2-h_2)-\frac{1}{2}i\pi[(2m_1-h_1)g_1+(2m_2-h_2)g_2]},$$

worin die Doppelsummen sich über alle ganzen positiven und negativen Zahlen m_1, m_2 zu erstrecken haben. Zur Abkürzung sei ferner

$$p=e^{i\pi\tau_{11}},\quad q=e^{i\pi\tau_{22}},\quad \varrho_m=e^{2i\pi m\tau_{12}}+e^{-2i\pi m\tau_{12}},\quad \varrho=\varrho_1,$$

$$\vartheta^{0,0}_{0,0}=\alpha,\quad \vartheta^{0,0}_{0,1}=\beta,\quad \vartheta^{0,0}_{1,0}=\gamma,\quad \vartheta^{0,0}_{1,1}=\delta,$$

$$\Theta_{0,0}^{0,0}=\lambda,\quad \Theta_{0,0}^{0,1}=\mu,\quad \Theta_{0,0}^{1,0}=\nu,\quad \Theta_{0,0}^{1,1}=\xi,\quad \Theta_{1,1}^{1,1}=\sigma,$$

dann sind die Grössen

$$2p_0=\frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}=\frac{\nu}{\lambda},\quad 2q_0=\frac{\alpha-\beta+\gamma-\delta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}=\frac{\mu}{\lambda},$$

$$2r_0=\frac{\alpha-\beta-\gamma+\delta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}=\frac{\xi}{\lambda}$$

als **bekannte** Grössen anzusehen, weil die Quotienten der ϑ als Classenmoduln zu betrachten sind. Nun sind aus den Gleichungen

$$\nu=2p_0\lambda,\quad \mu=2q_0\lambda,\quad \xi=2r_0\lambda$$

oder

$$p=p_0(1+2p^4+2q^4+2p^4q^4(\varrho^4-4\varrho^2+2))-pq^4(\varrho^2-2)+B_p,$$
$$q=q_0(1+2p^4+2q^4+2p^4q^4(\varrho^4-4\varrho^2+2))-qp^4(\varrho^2-2)+B_q,$$
$$pq\varrho=r_0(1+2p^4+2q^4+2p^4q^4(\varrho^4-4\varrho^2+2))+B_r$$

die Grössen p, q, ϱ zu berechnen. Nennen wir p, q, $pq\varrho$ kleine Grössen erster Ordnung, so sind B_p, B_q, B_r (z. B. das Glied $p^4q^9\varrho_6$) von der siebenten Ordnung. Das in der Sammlung begangene Versehen besteht darin, dass $pq^4\varrho_2$, $qp^4\varrho_2$ bez. durch $pq^4\varrho$, $qp^4\varrho$ ersetzt sind; auch dürfen B_p, B_q, B_r nicht als Reihen bezeichnet werden, die nach Potenzen von p, q, $pq\varrho$ fortschreiten. — Schreiben wir nun

$$p=p_0-pq^4\varrho^2+C_p,\quad q=q_0-qp^4\varrho^2+C_q,\quad pq\varrho=r_0+C_r,$$

so sind jetzt die c von der fünften Ordnung. Hieraus folgt mit Unterdrückung von Grössen derselben Ordnung

$$p=p_0-(p_0-pq^4\varrho^2)(q_0-qp^4\varrho^2)^4\varrho^2=p_0-p_0q_0^4\varrho^2,$$
$$q=q_0-q_0p_0^4\varrho^2,\quad \varrho=r_0:pq$$

und weiter

$$p=(p_0^2-q_0^2r_0^2):p_0,\quad q=(q_0^2-p_0^2r_0^2):q_0,$$

$$\varrho=\frac{r_0p_0q_0}{p_0^2q_0^2-(p_0^4+q_0^4)r_0^2}=\frac{r_0}{p_0q_0}+\left(\frac{r_0}{p_0q_0}\right)^3(p_0^4+q_0^4).$$

Wenn die vernachlässigten Glieder von der fünften Ordnung genannt werden, so ist nicht ϱ, sondern $pq\varrho$ als zu bestimmende Grösse angesehen; soll ϱ selbst bis auf Grössen fünfter Ordnung genau sein, so ist

$$\varrho=\frac{r_0}{p_0q_0}(1+2p_0^4+2q_0^4+2r_0^4)+\left(\frac{r_0}{p_0q_0}\right)^3(p_0^4+q_0^4)$$

zu setzen. So sind die Thetamoduln, wenn man noch das Vorzeichen in der Gleichung

$$2e^{2i\pi\epsilon_p}=\varrho\pm\sqrt{\varrho\varrho-4}$$

nach den in meiner Sammlung gegebenen Vorschriften bestimmt, gefunden. Die von Herrn v. **Braunmühl** gegebenen Formeln sind in Bezug auf p_0, q_0 unsymmetrisch, aber die für q stimmt mit der hier abgeleiteten überein.

Um nun zu genaueren Formeln zu gelangen, bedienen wir uns von Herrn Rosenhain gegebener, von Herrn Weber bequem* zusammengestellter Formeln

$$\Theta_{0,1}^{0,0\,4}=\lambda^4-\mu^4-\sigma^4,\quad \Theta_{1,0}^{0,0\,4}=\lambda^4-\nu^4-\sigma^4,\quad \Theta_{1,1}^{0,0\,4}=\lambda^4-\mu^4-\nu^4+\xi^4-\sigma^4,$$

$$(\lambda^2\xi^2-\mu^2\nu^2)^2=\sigma^4.\Theta_{1,1}^{0,0\,4}=(\lambda^4-\mu^4-\nu^4+\xi^4)\sigma^4-\sigma^8,$$

so dass

$$\sigma^4=\tfrac{1}{2}(\lambda^4-\mu^4-\nu^4+\xi^4)-\tfrac{1}{2}\sqrt{(\lambda^4-\mu^4-\nu^4+\xi^4)-4(\lambda^2\xi^2-\mu^2\nu^2)^2}$$

ist. Das negative Zeichen der Wurzel ist gewählt, damit rechts das von p, q freie Glied fortfalle. — Nun werde

$$\Theta_{0,0}^{0,0}+\Theta_{0,1}^{0,0}-\Theta_{1,0}^{0,0}-\Theta_{1,1}^{0,0}:\Theta_{0,0}^{0,0}+\Theta_{0,1}^{0,0}+\Theta_{1,0}^{0,0}+\Theta_{1,1}^{0,0}$$

$$=2\bar{p}_0=\frac{\lambda+\sqrt[4]{(\lambda^4-\mu^4-\sigma^4)}-\sqrt[4]{(\lambda^4-\nu^4-\sigma^4)}-\sqrt[4]{(\lambda^4-\mu^4-\nu^4+\xi^4-\sigma^4)}}{\lambda+\sqrt[4]{(\lambda^4-\mu^4-\sigma^4)}+\sqrt[4]{(\lambda^4-\nu^4-\sigma^4)}+\sqrt[4]{(\lambda^4-\mu^4-\nu^4+\xi^4-\sigma^4)}},$$

$$2\bar{q}_0=\frac{\lambda-\sqrt[4]{(\lambda^4-\mu^4-\sigma^4)}+\sqrt[4]{(\lambda^4-\nu^4-\sigma^4)}-\sqrt[4]{(\lambda^4-\mu^4-\nu^4+\xi^4-\sigma^4)}}{\lambda+\sqrt[4]{(\lambda^4-\mu^4-\sigma^4)}+\sqrt[4]{(\lambda^4-\nu^4-\sigma^4)}+\sqrt[4]{(\lambda^4-\mu^4-\nu^4+\xi^4-\sigma^4)}},$$

$$2\bar{r}_0=\frac{\lambda-\sqrt[4]{(\lambda^4-\mu^4-\sigma^4)}-\sqrt[4]{(\lambda^4-\nu^4-\sigma^4)}+\sqrt[4]{(\lambda^4-\mu^4-\nu^4+\xi^4-\sigma^4)}}{\lambda+\sqrt[4]{(\lambda^4-\mu^4-\sigma^4)}+\sqrt[4]{(\lambda^4-\nu^4-\sigma^4)}+\sqrt[4]{(\lambda^4-\mu^4-\nu^4+\xi^4-\sigma^4)}}$$

gesetzt, so dass $\bar{p}_0$, $\bar{q}_0$, $\bar{r}_0$ bekannte Grössen sind, weil die Verhältnisse $\lambda:\mu:\nu:\xi$ durch ϑ-Quotienten gegeben sind; alsdann sind die Formeln

$$p=\sqrt[4]{\frac{\bar{p}_0^2-\bar{q}_0^2\bar{r}_0^2}{\bar{p}_0}},\quad q=\sqrt[4]{\frac{\bar{q}_0^2-\bar{p}_0^2\bar{r}_0^2}{\bar{q}_0}},$$

$$\varrho_4=\frac{\bar{r}_0\bar{p}_0\bar{q}_0}{\bar{r}_0^2\bar{q}_0^2-\bar{r}_0^2(\bar{p}_0^4+\bar{q}_0^4)},\quad \varrho=\sqrt{2+\sqrt{2+\varrho_4}}$$

bis auf Glieder von der 20. Ordnung richtig und demnach wohl meist ausreichend, freilich nicht mühelos zu berechnen.

Ist $q=0$, sind die Functionen elliptische, und ist $\vartheta_1{}^0:\vartheta_0{}^0=\sqrt{k}$, so ist

$$2\bar{p}_0=(1-\sqrt[4]{1-\omega^4}):(1+\sqrt[4]{1-\omega^4}),\quad \omega=(1-\sqrt{k'}):(1+\sqrt{k'});$$

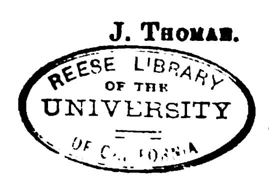
wird dann $p=\sqrt[4]{\bar{p}_0}$ gesetzt, so ist der ϑ-Modul bis auf kleine Grössen 20. Ordnung genau gefunden.

In Bezug auf die Formel 109) meiner Sammlung ist zu bemerken, dass die rechte Seite die Form 0:0:0... besitzt.

---

* Crelle's Journal Bd. 84 S. 336, 337. Bei dieser Gelegenheit will ich bemerken, dass der an dieser Stelle von Herrn Weber vermisste Beweis Rosenhain'scher Formeln erweitert auf alle Classen ultraelliptischer Functionen von mir Bd. 71 S. 280 des Crelle'schen Journals gegeben ist.

Jena 1883. J. Thomae.



V. Zusammenhang der Hyperbeln und Lemniscaten höherer Ordnung mit den Ausgangspunkten der Functionentheorie.

Transformirt man ein Strahlenbüschel nebst concentrischer Kreisschaar mittels der Umkehrung einer gebrochenen rationalen Function complexen Arguments in eine andere Ebene, so entsteht ein isothermisches Netz von Hyperbeln und Lemniscaten von der Ordnung $\frac{n}{m}$ *, die sich in folgenden Gleichungen schreiben lassen:

$$1)\qquad (\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n)-(\chi_1+\chi_2+\cdots+\chi_m)=c,$$

$$2)\qquad lg(p_1\cdot p_2\cdots p_n) \quad - \quad lg(q_1\cdot q_2\cdots q_m) \quad =\gamma,$$

wobei n und m den Grad der Functionen im Zähler, resp. im Nenner bedeuten, die p und q aber Radii vectores sind, die von den sogenannten Wurzelpunkten der beiden Functionen ausgehen, während die φ und χ die Neigungswinkel dieser Radii vectores sind.

Da die Wurzeln in Gruppen zu ν oder μ gleich sein können, so ist die allgemeinste Schreibweise dieser algebraischen Curven:

$$3)\qquad (\nu_1\varphi_1+\nu_2\varphi_2+\cdots+\nu_n\varphi_n)-(\mu_1\chi_1+\mu_2\chi_2+\cdots+\mu_m\chi_m)=\gamma,$$

$$4)\qquad lg(p_1^{\nu_1}\cdot p_2^{\nu_2}\cdots p_n^{\nu_n}) \quad - \quad lg(q_1^{\mu_1} q_2^{\mu_2}\cdots q_m^{\mu_m}) \quad = c.$$

Die wesentlichen Eigenschaften derselben, die zugehörigen Riemann-schen Flächen, ihren Zusammenhang mit der Gleichung des logarithmischen Potentials, der sie genügen, ebenso ihre physikalische Deutung findet man in des Verfassers „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften“.

In letzterer Beziehung sei hier wiederholt, dass es sich um Niveaucurven und Stromlinien handelt, die auftreten, wenn man durch die eine Gruppe von Wurzelpunkten Elektricität mit den Intensitäten $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n$ einströmen, in den anderen mit den Intensitäten $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_m$ ausströmen lässt, wobei die Platte eben und unbegrenzt zu denken ist. Dies gilt zunächst nur von dem Falle $\Sigma\nu=\Sigma\mu$, denn wenn $\Sigma\nu>\Sigma\mu$ ist, so sind Ausströmungspunkte in der durch die Differenz gegebenen Zahl im Unendlichen zu Hilfe zu nehmen, bei $\Sigma\nu<\Sigma\mu$ liegen dafür Einströmungspunkte im unendlich fernen Bereiche. Für endlich begrenzte Platten handelt es sich immer um den Fall $\Sigma\mu=\Sigma\nu$.

Den 26. Band der Zeitschrift f. Math. u. Phys. eröffnet eine sehr lesenswerthe Abhandlung des Herrn Veltmann: „Ueber die Bestimmung

---

* Der Verfasser hielt diese Bezeichnung für zweckmässiger, als den von Darboux aufgestellten Namen „Cassinoiden“. Vergl. Progr. 1880 der königl. Gewerbeschule zu Hagen; Crelle's Journal, Bd. 83 S. 38; Zeitschr. f. Math. u. Phys., XXVI S. 231, oder des Verfassers Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften, Leipzig 1882, Cap. IX – XI, wo die einschlagende Literatur citirt ist.

einer Function auf einer Kreisfläche aus gegebenen Randbedingungen", die schneller in die Grundlagen der neueren Functionentheorie einführt, als mehrere andere Arbeiten ähnlicher Tendenz. Im Anschluss an den ersten Theil dieser Arbeit sei die isothermische Bedeutung der obigen Curven an dem Beispiele einer einfachen Kreisplatte erörtert.

Auf dem Rande einer Kreisplatte mögen eine Anzahl beliebiger Bogen $b_1, b_2, \ldots b_n$ auf constanten Temperaturen $v_1, v_2, \ldots v_n$ gehalten werden. Es handelt sich um die bekannte Aufgabe, den stationären Wärmezustand zu untersuchen und zugleich die durch jene Bedingungen bestimmte Function complexen Arguments aufzufinden.

Zu diesem Zwecke verbinde man einen beliebigen Punkt P im Innern mit den Endpunkten der obigen Bögen und bezeichne die Längen der Verbindungslinien mit $p_1, p_2, \ldots p_n$, ihre Neigungswinkel mit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$, so dass die von ihnen eingeschlossenen Winkel sind $(\varphi_2-\varphi_1)$, $(\varphi_3-\varphi_2)$, $\ldots (\varphi_1-\varphi_n)$. Endlich bezeichne man die zu den Bögen gehörigen Centriwinkel mit $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$. Jetzt ist eine Function v zu suchen, die am Rande die gegebenen Werthe $v_2, v_3, \ldots v_n$ annimmt. Als solche ergiebt sich durch eine einfache Winkelbetrachtung ganz von selbst

$$5)\qquad v=\frac{v_1(\varphi_2-\varphi_1)+v_2(\varphi_3-\varphi_2)+\cdots+v_n(\varphi_1-\varphi_n)}{\pi} - \frac{v_1\beta_1+v_2\beta_2+\cdots+v_n\beta_n}{2\pi},$$

denn lässt man z. B. P auf den Bogen b_1 rücken, so gehen die Winkeldifferenzen $(\varphi_3-\varphi_2)$ u. s. w. in die Hälften der Centriwinkel über, während $\varphi_2-\varphi_1=\pi+\frac{\beta_1}{2}$ wird, so dass in der That nur v_1 stehen bleibt. Der eine Theil der Function complexen Arguments ist also gefunden und die Isothermen des Problems sind die Curven

$$6)\qquad (v_n-v_1)\varphi_1+(v_1-v_2)\varphi_2+\cdots+(v_{n-1}-v_n)\varphi_n=\gamma,$$

wobei von den Constanten abgesehen ist. Sie sind also von der Form 3), und zwar handelt es sich um den Fall $\Sigma\nu=\Sigma\mu$, denn die Summe der sämmtlichen Factoren ist Null.

Das zugehörige u bestimmt sich folgendermassen: Zu dem Theile $(\varphi_2-\varphi_1)$ gehört als ergänzende Function $lg\frac{p_2}{p_1}$, denn $lg\frac{p_2}{p_1}+i(\varphi_2-\varphi_1)$ ist, in rechtwinkligen Coordinaten geschrieben, eine Function des complexen Arguments $(x+yi)$.* Demnach ist das gesuchte u

* In Capitel III der citirten Einführung werden die Bicircularcoordinaten $lg\frac{p_1}{p_2}$ und $(\varphi_2-\varphi_1)$ behandelt, auch gezeigt, dass sie der Gleichung $\Delta u=0$ genügen. Man kann aber auch u durch Integration der Differentialgleichung $du=\frac{\partial v}{\partial y}dx-\frac{\partial v}{\partial y}dy$ bestimmen, die *per se integrabilis* ist. Vergl. § 36.

$$7)\qquad u = \frac{1}{\pi}\left[v_1\, lg\frac{p_2}{p_1} + v_2\, lg\frac{p_3}{p_2} + \ldots + v_n\, lg\frac{p_1}{p_n}\right] + c,$$

so dass, abgesehen von den Constanten, die Stromlinien des Problems sind:

$$8)\qquad lg\left(p_1^{v_n - v_1} \cdot p_2^{v_1 - v_2} \ldots p_n^{v_{n-1} - v_n}\right) = c,$$

so dass es sich um die Gleichungen 4) in dem Falle $\Sigma\nu = \Sigma\mu$ handelt.

Die gesuchte Function complexen Arguments ist also, bis auf die zuzufügende Constante,

$$9)\qquad \begin{aligned} u + vi = \frac{1}{\pi}\Big[v_1\left(lg\frac{p_2}{p_1} + i(\varphi_2 - \varphi_1)\right) + v_2\left(lg\frac{p_3}{p_2} + i(\varphi_3 - \varphi_2)\right) + \cdots \\ \cdots + v_n\left(lg\frac{p_1}{p_n} + i(\varphi_1 - \varphi_n)\right)\Big]. \end{aligned}$$

Statt nun am Rande in die einzelnen Bögen constante Wärme einströmen zu lassen, kann man dies auch mit constanter Elektricität thun, so dass gegen die frühere elektrodynamische Deutung die bekannte Vertauschung der Strom- und Niveaulinien eingetreten ist.

Rückt P in die Mitte, so hat man dort die Temperatur

$$v_0 = \frac{v_1\beta_1 + v_2\beta_2 + \ldots + v_n\beta_n}{2\pi},$$

denn dann wird in Gleichung 5) $(\varphi_2 - \varphi_1) = \beta_1$, $(\varphi_3 - \varphi_2) = \beta_2$ etc. Dies ist der bekannte mittlere Werth der Randwerthe, der für die Verzeichnung der Isothermen von Bedeutung ist.

Durch Reciprocität geht man leicht vom Innern des Kreises zum Aeussern über und durch Vereinigung beider Probleme findet man den Zustand der gesammten Ebene bei kreisförmiger Vertheilung der singulären Punkte. Da aber für jedes Problem nur eine Lösung möglich ist, so ergiebt sich sofort folgender Satz:

Liegen die Ausgangspunkte der Radii vectores der Curvenschaaren 3) und 4) auf einem Kreise, so gehört im Falle $\Sigma\mu = \Sigma\nu$ zu der Schaar 3) stets ein Kreis, der die Schaar 4) orthogonal schneidet.

So werden z. B. die Curven $\frac{p \cdot q}{r^2} = c$, die Curven $\frac{p}{q} = c$, stets durch einen Kreis orthogonal geschnitten, die Curven $\frac{p \cdot q}{r \cdot s} = c$ dann, wenn die Ausgangspunkte der Radii vectores auf einem Kreise liegen.

Der auf den ersten Blick überraschende Satz folgt sofort aus dem selbstverständlichen Satze, dass, wenn alle Ein- und Ausströmpunkte der Elektricität auf einer Geraden liegen, diese selbst zum System der Stromlinien gehört, ein Satz, der, durch reciproke Radii vectores transformirt, auf den vorigen führt. Fügt man auf beiden Seiten der Geraden symmetrisch zwei gleichartige Punkte zu, so bleibt der Satz bestehen, und transformirt man von einem dieser Punkte aus, so erhält man Ein-

oder Ausströmungspunkte in der Mitte der Platte und im unendlichen Punkte.

Auch durch geometrische Untersuchung der Peripheriewinkel lässt sich der Satz beweisen. Auf § 43 der citirten Einführung, der die Fälle der Symmetrie und Reciprocität bei gewissen Isothermenschaaren behandelt, braucht nur hingewiesen zu werden.

Aber nicht nur die Abbildung mittels reciproker Radii vectores, auch jede andere Abbildung mittels einer Function complexen Arguments giebt leicht zu deutende Resultate, besonders die Abbildung mittels der Umkehrungen rationaler Functionen. So geht z. B. bei $z=\sqrt[n]{Z}$ jeder Radius vector p über in ein Product $p_1, p_2, \dots p_n$, jedes φ in eine Summe $\varphi_1+\varphi_2+\dots+\varphi_n$, so dass die Curven 6) und 8) ihre Gleichungen trotz der Transformation im Wesentlichen beibehalten. So erkennt man, in welchen Fällen bei Vertheilung der singulären Punkte auf einer Lemniscate höherer Ordnung diese selbst zu den Stromlinien gehört, kurz, zahlreiche Probleme lassen sich durch solche Ueberlegungen wesentlich erleichtern.

Die gegebenen Resultate sind grossentheils nicht neu, in diesem Zusammenhange aber wahrscheinlich noch nicht dargestellt. Jedenfalls aber hat sich gezeigt, dass die Lemniscaten und Hyperbeln höherer Ordnung mit den Ausgangspunkten der neueren Functionentheorie auf's Innigste verknüpft sind, für die abstracten Sätze derselben leichtverständliche Beispiele bieten und somit das eingehendste Studium verdienen.

Hagen, den 6. December 1883. Dr. G. Holzmüller.

VI. Bemerkungen über die Mittelpunkte von Kegelschnitten einer Fläche zweiten Grades.

1.

Satz. Die Mittelpunkte der Kegelschnitte, welche die Ebenen eines Bündels mit dem Scheitel P aus einer Fläche zweiten Grades — F^2 — schneiden, liegen auf einer neuen Fläche zweiten Grades — F_m^2 —, welche durch P und den Mittelpunkt von F^2 geht.

Beweis. Wir erhalten im Allgemeinen den Mittelpunkt des Kegelschnittes, in welchem eine Ebene die Fläche F^2 schneidet, indem wir den zur Stellung der Ebene conjugirten Durchmesser der Fläche bestimmen. Er trifft die Ebene in dem gesuchten Mittelpunkte. Nun erfüllen die zu den Stellungen der Ebenen eines Bündels conjugirten Durchmesser ein zu dem Ebenenbündel reciprokes Strahlenbündel. Das Erzeugniss zweier solchen Bündel — in unserem Falle der Ort der er-

wähnten Mittelpunkte — ist bekanntlich eine Fläche zweiten Grades, welche durch die Scheitel der Bündel geht. Somit ist unser Satz bewiesen und wir bemerken über F_m^2 noch Folgendes:

Dem Strahle MP, welcher die Scheitel der erwähnten Bündel verbindet, entsprechen Ebenen, deren Stellung die conjugirte zum Durchmesser MP der Fläche F^2 ist. Folglich ist MP ein Durchmesser der Fläche F_m^2.

Construiren wir die Tangentialebenen aus P an F^2, so sind ihre Berührungspunkte als Mittelpunkte der Kegelschnitte aufzufassen, in denen diese Tangentialebenen F^2 schneiden. Bestimmen wir ferner die Ebenen durch P, welche den Tangentialebenen des Asymptotenkegels von F^2 parallel sind, so schneiden diese F^2 in Kegelschnitten, deren Mittelpunkte unendlich fern sind. Wir schliessen also:

F^2 hat mit F_m^2 den Kegelschnitt K^2 gemeinsam, in welchem der Kegel aus P die Fläche F^2 berührt, und den Kegelschnitt, in welchem die unendlich ferne Ebene F^2 schneidet.

2.

Die Construction von F_m^2 hängt nur ab von dem Punkte P und der Involution von Durchmessern und Durchmesserebenen um M. Wir erhalten daher für alle Flächen F^2, bei denen diese Involution die nämliche ist, welche also denselben Asymptotenkegel haben, die gleiche Fläche F_m^2. Letztere hat mit jeder der ersteren je den Kegelschnitt gemeinsam, den die Polarebene von P aus ihr schneidet. Daraus ergiebt sich auch folgende Erzeugung von F_m^2:

Wenn wir die Polarebenen eines Punktes P in Bezug auf die Flächen zweiten Grades bestimmen, welche denselben Asymptotenkegel haben, so schneiden diese Ebenen ihre respectiven Flächen in Kegelschnitten, welche auf einer neuen Fläche zweiten Grades liegen.

3.

Die Flächen F_m^2 für reelle Punkte P des Raumes sind stets reell. Ist daher F^2 imaginär, also Kugel oder Ellipse, so können wir an Stelle dieser imaginären Fläche eine reelle Fläche F_m^2 setzen. Dabei lässt sich durch passende Wahl von P noch erreichen, dass F^2 und F_m^2 sich in einer der Congruenz analogen Lage befinden.

Sei nämlich x ein Durchmesser von F^2 und auf demselben sei die Involution harmonischer Pole durch M und ein Paar xx_1 gegeben. Wir bezeichnen die Potenz dieser Involution mit k_x^2, so dass $k_x^2 = MX.MX_1$. Dann wählen wir auf X den Punkt P in der Weise, dass $2MP = k_x$ ist, wo k_x der absolute Werth der Wurzel der Potenz sei.

Die zu diesem P gehörige Fläche F_m^2 hat die Eigenschaft, dass die Potenzen der Involutionen harmonischer Pole auf ihren Durchmessern

dem absoluten Werthe nach resp. gleich den Potenzen der Involutionen auf parallelen Durchmessern von F^2 sind.

Haben wir nun Constructionen für die imaginäre Fläche F^2 auszuführen, so übertragen wir dieselben auf eine reelle Mittelpunktsfläche F_m^2, welche nach obiger Angabe bestimmt ist.

Sei z. B. der Pol P zu einer Ebene P in Bezug auf die imaginäre Fläche F^2 gesucht, so construiren wir den Pol P^* von P in Bezug auf F_m^2. Ist dabei M^* der Mittelpunkt von F_m^2, so ziehen wir durch M — den Mittelpunkt von F^2 — eine Parallele zu M^*P^* und bestimmen auf ihr P so, dass MP gleich M^*P^* ist, aber den entgegengesetzten Sinn von M^*P^* hat.*

4.

Zu jedem Kegelschnitt der Fläche F^2 gehört eine Fläche F_m^2, welche durch den Pol der Ebene des Kegelschnittes in Bezug auf F^2 geht. Verallgemeinern wir die gegenseitige Beziehung von F^2 und F_m^2, indem wir zu diesen Flächen die collinearen Flächen zweiten Grades bestimmen, so erhalten wir den

Satz: Wenn eine Fläche zweiten Grades — F_m^2 — mit einer andern — F^2 — einen Kegelschnitt gemeinsam hat und durch den Pol der Ebene dieses Kegelschnittes in Bezug auf F^2 geht, so enthält sie auch den Pol der Ebene des zweiten Kegelschnittes, den sie mit F^2 gemeinsam hat.

5.

Zu jedem Punkte P des Raumes gehört in Bezug auf F^2 eine und nur eine Fläche F_m^2. Bewegt sich P auf einer Geraden g, so zeigen wir nun, dass die zu den Punkten von g gehörigen Flächen F_m^2 ein Büschel B^2 bilden. Denn erstens haben alle diese Flächen den unendlich fernen Querschnitt gemein. Ferner gehen sie durch M und die Punkte A, B, in denen die Tangentialebenen aus g die Fläche F^2 berühren. Folglich liegen die zweiten Querschnitte, welche jede Fläche mit der andern gemeinsam hat, in der durch A, B, M bestimmten Ebene. Sie gehen durch A, B, M und durch die zwei Punkte, in denen die erwähnte Ebene den unendlich fernen gemeinsamen Querschnitt schneidet, mithin fallen sie in einen Kegelschnitt K_m^2 zusammen. Es ist der zweite allen Flächen gemeinsame Querschnitt und unsere Behauptung ist bewiesen.

Da K_m^2 allen Flächen F_m^2 gemeinsam ist, so ist dieser Kegelschnitt der Ort der Mittelpunkte der Kegelschnitte, welche die Ebenen eines

* Verschieben wir F_m^2 parallel zu sich um MM^*, so erhalten wir eine Fläche, welche zur imaginären Fläche F^2 gleichsam centrisch-symmetrisch ist. Dieser Darstellungsweise der imaginären Fläche durch eine centrisch-symmetrische bedient sich mein geehrter Lehrer Herr Fiedler seit Jahren in seinen Vorlesungen.

Büschels durch g aus F^2 schneiden. Die Ebene des Kegelschnittes K_m^1 ist die zur Stellung von g conjugirte Diametralebene der Fläche F^2. Wir schliessen also:

Satz: Die Kegelschnitte, welche die Ebenen eines Büschels mit der Scheitelkante g aus einer Fläche zweiten Grades schneiden, haben ihren Mittelpunkt in einem Kegelschnitt K_m^2, dessen Ebene die zur Richtung von g conjugirte Diametralebene der Fläche ist.

6.

Kehren wir wieder zum Büschel B^2 der Flächen F_m^2 zurück, so bemerken wir, dass die Mittelpunkte M^* der Flächen dieses Büschels in einer Geraden g^* liegen, die durch den Mittelpunkt von K_m^2 geht und zu g parallel ist. In g^* befinden sich aber auch die Pole der Ebene von K_m^2 in Bezug auf die Flächen des Büschels, denn diese Pole müssen je auf der Geraden liegen, welche den Mittelpunkt der resp. Fläche F_m^2 mit dem Mittelpunkte von K_m^2 verbindet.

Nun ist das Büschel B^2 dadurch charakterisirt, dass seine Grundcurve in zwei Kegelschnitte zerfällt, wovon der eine unendlich fern ist. Es ergiebt sich also für solche Büschel der Satz:

Die Mittelpunkte der Flächen zweiten Grades eines Büschels, welches durch einen unendlich fernen Kegelschnitt geht, liegen in einer Geraden. Diese ist auch der Ort der Pole der Ebene des andern gemeinsamen Kegelschnittes in Bezug auf die Flächen des Büschels.

Uebertragen wir diesen Gedanken auf ein zu dem erwähnten Büschel collineares, so folgt:

Haben die Flächen zweiten Grades eines Büschels zwei Kegelschnitte gemein, so liegen die Pole der Ebenen dieser Kegelschnitte in Bezug auf die Flächen des Büschels in derselben Geraden.

7.

Mit Hilfe der Flächen F_m^2, welche zu einer Geraden g in Bezug auf F^2 gehören, lösen wir folgende Aufgabe:

Gegeben seien zwei Gerade g, h und eine Fläche F^2. Es sollen diejenigen Transversalen t zu g und h gesucht werden, deren Schnittpunkte mit der Fläche F^2 durch den Schnittpunkt mit h halbirt werden. Wir construiren dann zu g das Büschel der Flächen F_m^2. Zu jedem Punkte P auf g gehört eine solche Fläche, welche von h in zwei Punkten x, y geschnitten wird. Die Verbindungslinien von P mit letzteren Punkten sind Linien t.

Nun bilden die Punkte x, y, in welchen h die Flächen des Büschels schneidet, eine Involution. Zu jedem Punkte auf g gehört ein Paar dieser Involution, also ist letztere zur Punktreihe auf g projecti-

visch. Punktreihe und Involution aber, die in einer derartigen Beziehung zu einander stehen, erzeugen bekanntlich eine Regelfläche dritten Grades, für welche der Träger der Punktreihe eine Doppelgerade ist. Diese Regelfläche giebt uns den Ort der Geraden t an.

Bedenken wir, dass die Schnittpunkte von h mit t auch die Mittelpunkte der Involutionen harmonischer Pole auf t in Bezug auf F^2 sind, so sagen wir:

Die Geraden t, welche eine Linie g schneiden und für welche die Mittelpunkte der Involution harmonischer Pole in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades in einer Geraden h liegen, erfüllen eine Regelfläche dritten Grades, die g zur Doppelgeraden hat.

Mittels dieser Regelfläche können wir auch die Transversalen zu drei windschiefen Geraden g, h, f bestimmen, für welche die Mittelpunkte der Involutionen harmonischer Pole in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades in h liegen. Es giebt drei derartige Transversalen. Sie gehen durch die Schnittpunkte von f mit der durch g, h und F^2 bestimmten Regelfläche.

Zürich. Dr. Beyel.

VII. Nachtrag zur XVI. Mittheilung im 20. Bande dieser Zeitschrift S. 369: „Beweis einiger Sätze über Potenzreihen."

Abel hat in dem 4. Lehrsatze über die Reihen* gezeigt, dass, wenn eine Potenzreihe $\Sigma a_n x^n$ für den reellen Werth $x=r$ convergirt, ihre Summe $f(x)$ in allen Punkten des Intervalls $(0, r)$ mit Einschluss der Grenzen stetig sei. Das ist von Herrn Pringsheim mit Recht gegen die von mir am Eingange der obigen Mittheilung ausgesprochene Ansicht hervorgehoben worden.** Abel's Entwickelung giebt zunächst den Satz: „Ist die Potenzreihe $\Sigma a_n x^n$ für den reellen Werth $x=r$ convergent, so convergirt sie auch für jeden Werth von x im Intervalle $(0, r)$ und zwar gleichmässig für alle diese Werthe von x." — Diesen Satz kann man in folgender Art ausdehnen auf complexe Werthe von x: „Ist die Potenzreihe $\Sigma a_n x^n$ in einem Punkte x_1 ihres Convergenzkreises vom Radius R convergent, so convergirt sie gleichmässig für alle Punkte einer Strecke $x_1 x_0$, wo x_0 einen festen, übrigens beliebigen Punkt innerhalb des Convergenzkreises R bedeutet." Denn man hat mit Benutzung der von mir a. a. O. gebrauchten Bezeichnungen, falls $x = x_1 - h$ ein Punkt innerhalb der Strecke $x_1 x_0$ ist,

$$P_m(x) = \sum_m^\infty{}^n a_n x^n = \left(1-\frac{x}{x_1}\right)\sum_0^\infty{}^s d_s \left(\frac{x}{x_1}\right)^{m+s},$$

also

a) $$|P_m(x)| < \varepsilon\varrho \sum_0^\infty{}^s \sigma^{m+s} < \frac{\varepsilon\varrho}{1-\sigma} < \frac{2\varepsilon}{2\cos\varphi-\varrho}.$$

Hat die Sehne $x_1 x_0$ die Länge $R(2\cos\varphi-\alpha)-\alpha > 0$ —, so ergiebt sich hieraus, wenn $\varrho \leqq 2\cos\varphi-\alpha$, $|P_m(x)| < \frac{2\varepsilon}{\alpha}$. Ist nun eine positive Zahl

* Vergl. Oeuvres complètes par Sylow & Lie, I p. 223.

** Mathem. Annalen Bd. XXI S. 376.

ε_1 vorgelegt, so denke man sich $\varepsilon < \frac{1}{2}\alpha\varepsilon_1$ und bestimme darnach den Index m, worauf man auf der ganzen Strecke $x_1 x_0$ findet $|P_m(x)| < \varepsilon_1$.

Aus dem soeben erwähnten Satze folgt sofort der Satz S. 370: „Wenn die Reihe $\Sigma a_n x^n$ für den Punkt $x = x_1$ ihres Convergenzkreises convergirt, so ist ihre Summe $f(x)$ für sämmtliche Punkte einer solchen Strecke $x_1 x_0$ stetig.“ — Dass aber, wenn diese Potenzreihe für alle Punkte eines continuirlichen Stückes ihres Convergenzkreises convergirt, ihre Summe $f(x)$ längs desselben stetig sich ändere, scheint bis jetzt nicht erwiesen zu sein. Der Satz leuchtet ein, wenn die Reihe für $x = x_1$ unbedingt convergirt. — Der a. a. O. vorgetragene Beweis des ersteren Satzes wird an Klarheit gewinnen, wenn man m zunächst einen festen Werth des Stellenzeigers sein lässt. Dann muss es aber heissen:

$$R_m = -\xi \sum_0^\infty {}_s\, d_s (1-\xi)^{m+s} + P_m(x_1).$$

(Eine ähnliche Bemerkung tritt ein beim Beweise des zweiten Satzes, wo zum dritten Gliede der Gleichung 5) noch $-\sum_m^\infty {}_n\, n a_n x_1^{n-1}$ zuzufügen ist.) Die hierdurch bedingten Abänderungen des Folgenden bedürfen um so weniger der näheren Ausführung, als man auch hier ähnlich wie mit der Relation a) verfahren kann.

Dass der Satz in Nr. 2 sammt seinem Beweise, wenigstens für reelle Werthe der Glieder a_n, b_n, schon bei Abel vorkommt, hat Hr. Pringsheim ebenfalls bemerkt.

Der zweite Satz (Nr. 3) lässt heute noch einen andern Beweis zu. Herr Dini* hat nämlich gezeigt: „Wenn in einer endlichen Umgebung $(a - \varepsilon_1,\ a + \varepsilon_2)$ eines Punktes a die Reihe $\Sigma f_n(x)$ convergirt und jedes ihrer Glieder eine endliche Ableitung besitzt, und wenn die aus den Ableitungen gebildete Reihe $\Sigma f'_n(x)$ im genannten Bereiche von x gleichmässig convergirt, so hat die Function $f(x) = \Sigma f_n(x)$ im Punkte $x = a$ eine endliche Ableitung und zwar gerade $\Sigma f'_n(a)$.“ Dini's Beweis gilt auch für den Fall, dass die $f_n(x)$ complexe Functionen der reellen Veränderlichen x sind und dass nur eine Seite des Punktes $x = a$ betrachtet wird. Der letztere Umstand tritt auch hier ein, indem die Reihe

$$\sum_1^\infty {}_n\, n a_n x^{n-1}$$ gleichmässig convergirt für sämmtliche Punkte der oben eingeführten Strecke $x_1 x_0$.

Der erste Theil des dritten Satzes (S. 373) ist viel zu allgemein gehalten: mit Sicherheit ist er richtig in solchen von x_1 verschiedenen Punkten des von x_0 aus beschriebenen Kreises, wo auch die Taylorsche Reihe $\sum \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ convergirt. Das folgt leicht aus dem ersten Satze. Der Irrthum erklärt sich daraus, dass a. a. O. eine Formel, die nur für positive, echt-gebrochene Werthe von $x_0 : x'$ gilt, auch für complexe Werthe dieses Quotienten benutzt worden ist. — S. 376 Formel 11) setze man statt $\varphi'(m+1) - \varphi'(m)$ die entgegengesetzte Differenz und in der Schlussformel anstatt g_3 g.

* Fondamenti etc., p. 115.

Innsbruck, 29. Januar 1884. Prof. O. Stolz.

VII.

Ueber die Krümmung der Flächen.

Von

Dr. O. Böklen

in Reutlingen.

Hierzu Taf. V Fig. 1.

§ 1.

In einem früheren Aufsatze dieser Zeitschrift (XXVII, S. 369) habe ich die Beziehungen zwischen den centrischen Flächen zweiten Grades untersucht, welche mit irgend einer Fläche F in einem beliebigen Punkte S derselben von gleichartiger Krümmung eine Berührung erster oder zweiter Ordnung haben. Da nun durch S zwei Krümmungslinien gehen, in welchen F von zwei weiteren Flächen F' und F'' orthogonal geschnitten werden kann, so giebt es drei confocale Flächen zweiten Grades (λ), (μ), (ν), wovon die erste, das Ellipsoid, mit F, die zweite, das einmantlige Hyperboloid, mit F' und die dritte, das zweimantlige Hyperboloid, mit F'' je eine Berührung zweiter Ordnung hat.

Um die Beziehungen solcher Tripel von Confocalen zu untersuchen, gehen wir von ihren Gleichungen

$$1)\quad \frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-\beta}+\frac{z^2}{\lambda-\gamma}=1,\quad \frac{x^2}{\mu}+\frac{y^2}{\mu-\beta}+\frac{z^2}{\mu-\gamma}=1,\quad \frac{x^2}{\nu}+\frac{y^2}{\nu-\beta}+\frac{z^2}{\nu-\gamma}=1,$$
$$\lambda>\gamma>\mu>\beta>\nu$$

aus. Bezeichnet man die Hauptkrümmungshalbmesser von (λ) mit L und L', diejenigen von (μ) mit M und M', von (ν) mit N und N', so ist

$$2)\qquad L=\frac{1}{\pi}(\lambda-\mu)^{3/2}(\lambda-\nu)^{1/2},\quad L'=\frac{1}{\pi}(\lambda-\nu)^{3/2}(\lambda-\mu)^{1/2},$$

$$3)\qquad M=\frac{1}{\pi'}(\mu-\nu)^{3/2}(\lambda-\mu)^{1/2},\quad M'=-\frac{1}{\pi'}(\lambda-\mu)^{3/2}(\mu-\nu)^{1/2},$$

$$4)\qquad N=\frac{1}{\pi''}(\lambda-\nu)^{3/2}(\mu-\nu)^{1/2},\quad N'=\frac{1}{\pi''}(\mu-\nu)^{3/2}(\lambda-\nu)^{1/2},$$

$$\pi=\sqrt{\lambda(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)},\quad \pi'=\sqrt{\mu(\mu-\beta)(\gamma-\mu)},\quad \pi''=\sqrt{\nu(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}.$$

S ist der Berührungspunkt von F mit (λ), von F' mit (μ) und von F'' mit (ν). Vom Mittelpunkt O der drei Confocalen fälle man auf die

drei durch S gehenden Tangentialebenen die Perpendikel p, p' und p'', so ist

$$5)\quad p=\frac{\pi}{\sqrt{\lambda-\mu}\sqrt{\lambda-\nu}},\quad p'=\frac{\pi'}{\sqrt{\lambda-\mu}\sqrt{\mu-\nu}},\quad p''=\frac{\pi''}{\sqrt{\lambda-\nu}\sqrt{\mu-\nu}}.$$

Aus den Gleichungen 2) bis 4) ergeben sich folgende Relationen:

$$6)\qquad \frac{L}{L'}=\frac{\lambda-\mu}{\lambda-\nu},\quad \frac{M}{M'}=-\frac{\mu-\nu}{\lambda-\mu},\quad \frac{N}{N'}=\frac{\lambda-\nu}{\mu-\nu},$$

also

$$7)\qquad LMN=-L'M'N',$$

$$8)\qquad \frac{L'}{L}+\frac{M}{M'}=1,\quad \frac{M'}{M}+\frac{N}{N'}=1,\quad \frac{N'}{N}+\frac{L}{L'}=1.$$

Von diesen letzten Gleichungen folgt jede aus den beiden anderen, somit sind die sechs Krümmungshalbmesser an zwei Bedingungsgleichungen gebunden und die sechs Gleichungen 2) bis 4) sind also nur vier von einander unabhängige Relationen, welche zur Bestimmung von den fünf Unbekannten λ, μ, ν, β, γ nicht hinreichen. Es giebt also unendlich viele Tripel von Confocalen, welche unter einander in einem Punkte S eine Berührung zweiter Ordnung haben oder osculiren, worunter im Folgenden immer zu verstehen ist, dass alle Ellipsoide der Tripel dieselben Krümmungshalbmesser L und L', die einmantligen Hyperboloide die Krümmungsradien M und M', die zweimantligen die Krümmungsradien N und N' haben.

Durch Combination mit 5) findet man ferner:

$$9)\qquad \frac{p}{p'}=-\frac{M'}{L},\quad \frac{p'}{p''}=\frac{N'}{M},\quad \frac{p''}{p}=\frac{L'}{N}.$$

Hieraus folgt: Die Mittelpunkte O aller Tripel von Confocalen, welche in einem Punkte S unter einander osculiren, liegen auf einer durch S gehenden Geraden, welche durch die Gleichungen 9) bestimmt ist.

Aus 2) — 5) erhält man

$$10)\quad L.p=\lambda-\mu,\qquad 11)\quad M.p'=\mu-\nu,\qquad 12)\quad N.p''=\lambda-\nu,$$
$$L'.p=\lambda-\nu,\qquad M'.p'=-(\lambda-\mu),\qquad N'.p''=\mu-\nu.$$

Betrachten wir zunächst das Ellipsoid (λ). In demselben sind $\lambda-\mu$ und $\lambda-\nu$ die Quadrate der Halbaxen desjenigen Centralschnittes, welcher mit der Tangentialebene vom Punkte S parallel, dessen conjugirter Halbmesser also OS ist. Diese Halbaxen sind parallel den Tangenten der Krümmungslinien in S, also sind sie bei allen Ellipsoiden unter sich parallel. Die Grössen L, L', M, ... sind vermöge der Aufgabe constant und da sich der Mittelpunkt O auf der Geraden SO, deren Gleichungen 9) sind, bewegt, welche mit den Normalen der Confocalen (λ), (μ), (ν) in S der Reihe nach die Winkel α, β, γ bilden soll, deren Werthe durch 9) bestimmt sind, so sieht man sofort, dass die Centralschnitte der Ellip-

soide auf einem elliptischen Paraboloid liegen. Die Gleichung eines solchen Centralschnitts, auf seine Axen bezogen, ist

$$\frac{\eta^2}{\lambda-\nu}+\frac{\zeta^2}{\lambda-\mu}=1.$$

Setzt man nun $OS=\frac{p}{\cos\alpha}=\mathfrak{x}$, so ist nach 10)

$$13)\qquad \frac{\eta^2}{L'\cos\alpha}+\frac{\zeta^2}{L\cos\alpha}=\mathfrak{x}$$

die Gleichung dieses elliptischen Paraboloids.

Durch ähnliche Betrachtungen findet man für die Centralschnitte der einmantligen Hyperboloide

$$14)\qquad \frac{\zeta^2}{M\cos\beta}+\frac{\xi^2}{M'\cos\beta}=\mathfrak{y},$$

wenn man $OS=\frac{p'}{\cos\beta}=\mathfrak{y}$ setzt. In beiden Formeln beziehen sich die Coordinaten ξ, η, ζ der Reihe nach auf die Normalen von (λ), (μ), (ν) (nicht aber $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$). Da M', wie in allen vorhergehenden Formeln, nach 5) negativ zu nehmen ist, so liegen diese Centralschnitte auf einem hyperbolischen Paraboloid.

Für diejenigen der zweimantligen Hyperboloide erhält man, weil sie imaginär sind, die Gleichung

$$15)\qquad \frac{\xi^2}{N'\cos\gamma}+\frac{\eta^2}{N\cos\gamma}=-\mathfrak{z}.$$

Hieraus folgt: Die dem Halbmesser OS conjugirten Centralschnitte, welche also je einer der drei durch S gehenden Tangentialebenen parallel sind, aller Tripel von Confocalen, die in dem Punkt S untereinander osculiren, liegen auf Paraboloiden, und zwar diejenigen der Ellipsoide auf einem elliptischen, der einmantligen Hyperboloide auf einem hyperbolischen und der zweimantligen auf einem imaginären Paraboloid. Diese drei Paraboloide haben also den Durchmesser OS gemeinschaftlich.

Die sechs Krümmungsmittelpunkte der Flächen (λ), (μ), (ν) bezeichnen wir mit l und l', m und m', n und n'; das erste Paar liegt auf der Normale von (λ) oder auf der ξ-Axe, das zweite auf der Normale von (μ) oder auf der η-Axe, das dritte Paar auf der Normale von (ν) oder auf der ζ-Axe. Die Punkte l und l', sowie n und n' liegen auf derselben Seite von S, m und m' dagegen auf entgegengesetzten Seiten von S. Man construire nun drei Parabeln P, P', P'', die erste in der $\eta\zeta$-Ebene berührt die η-Axe in m und die ζ-Axe in n', die zweite in der $\zeta\xi$-Ebene berührt die ζ-Axe in n und die ξ-Axe in l', die dritte in der $\xi\eta$-Ebene berührt die ξ-Axe in l und die η-Axe in m'. Aus den Gleichungen 8) folgt, dass P von der Verlängerung von $m'n$ berührt wird; Q sei der

Berührungspunkt; ebenso wird P' von der Geraden ln' in Q' und P'' von der verlängerten ml' in Q' berührt.

Durch den Mittelpunkt O des Confocalentripels gehen die drei Hauptebenen desselben, auf welche sich die drei Gleichungen 1) beziehen; die erste dieser Hauptebenen oder die xy-Ebene schneide die drei durch S gehenden Normalen oder die ξ-, η-, ζ-Axen der Reihe nach in den Punkten X, Y, Z, so hat man die Gleichungen

$$SX=\frac{\lambda-\gamma}{p},\quad SY=\frac{\gamma-\mu}{p'},\quad SZ=\frac{\gamma-\nu}{p''}.$$

Aus 2) bis 5) erhält man

$$\frac{SX}{L}=\frac{\lambda-\gamma}{\lambda-\mu},\quad \frac{SY}{M'}=\frac{\gamma-\mu}{\lambda-\mu},\quad \text{also}\quad \frac{SX}{L}+\frac{SY}{M'}=1,$$

d. h.: die Linie XY ist eine Tangente der Parabel P'';

$$\frac{SX}{L'}=\frac{\lambda-\gamma}{\lambda-\nu},\quad \frac{SZ}{N}=\frac{\gamma-\nu}{\lambda-\nu},\quad \text{somit}\quad \frac{SX}{L'}+\frac{SZ}{N}=1,$$

d. h. die Gerade XZ berührt die Parabel P'. Ebenso beweist man, dass die Verlängerung von YZ die Parabel P berührt, woraus folgt, dass die xy-Ebene die drei Parabeln berührt. Das Gleiche findet auch bei den zwei anderen Hauptebenen xz und zy statt, wie sich auf analoge Art zeigen lässt.

Die bis jetzt angeführten Eigenschaften der drei Parabeln hat Mannheim angegeben, aber auf andere Weise begründet (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 3me série t. VIII, 1882).

Man hat demnach den Satz: Die drei Hauptebenen aller Tripel von Confocalen, welche in einem Punkte S unter einander osculiren, berühren drei bestimmte Parabeln, wovon jede zwei der drei durch S gehenden Normalen in zwei Krümmungsmittelpunkten tangirt und deren Directricen also durch S gehen; sie sind die Projectionen der Geraden OS auf den Ebenen der Normalen.

Der letzte Theil des Satzes lässt sich so beweisen: $O''S$ ist z. B. die Projection von OS auf der $\xi\zeta$-Ebene, welche die x-, y-, z-Axen in einem Dreieck xyz schneidet, dessen Höhendurchschnitt O'' ist. Da nun die Parabel P' die drei Seiten dieses Dreiecks berührt, so geht ihre Directrix durch O''; sie geht aber auch durch S, weil ihre zwei Tangenten Sl' und Sn rectangulär sind. Man kann noch weiter hinzufügen, dass die Brennpunkte der drei Parabeln die Fusspunkte der von S auf die Verbindungslinien mn', nl', lm' gefällten Perpendikel sind. Die Verbindungslinien Ox, Oy, Oz sind die drei Axen des Tripels.

Wenn eine Ebene während ihrer Bewegung zwei feste Curven berührt, so umhüllt sie eine entwickelbare Fläche, deren Erzeugende die Verbindungslinie der Berührungspunkte ist; berührt die Ebene also drei

Curven zugleich, so müssen die drei Berührungspunkte stets in gerader Linie sein, welche in ihren aufeinanderfolgenden Lagen Tangente einer Raumcurve sein wird — der Rückkehrkante der entwickelbaren Fläche —; die bewegliche Ebene enthält also stets zwei unendlich nahe Tangenten dieser Raumcurve und somit ist sie Osculationsebene derselben. Die drei Hauptebenen jedes Confocalentripels osculiren demnach eine bestimmte Raumcurve, und da sie sich im Mittelpunkte O des Tripels schneiden, welcher auf der durch die Gleichungen 9) bestimmten Geraden SO liegt, so folgt daraus, dass die fragliche Raumcurve die Eigenschaft hat, dass je drei rectanguläre Osculationsebenen derselben ein Trieder bilden, dessen Spitze auf einer bestimmten Geraden liegt, welche man die Directrix der Curve nennen kann, nach Analogie der ebenen Parabel, bei der je zwei rectanguläre Tangenten sich ebenfalls auf einer Geraden oder Directrix schneiden. Diese Raumcurve ist also eine specielle cubische Parabel.

Um die Gleichungen derselben zu finden, wählen wir die xz-Ebene oder die zweite Hauptebene der Confocalen, welche die Normalen von S in dem Dreieck $X'Y'Z'$ schneidet. Die drei Seiten desselben berühren die Parabeln in A, B, C, und zwar sind dies der Reihe nach die Berührungspunkte von $Y'Z'$ mit P, von $Z'X'$ mit P' und von der verlängerten $X'Y'$ mit P''; die Gerade ABC ist also Tangente der Raumcurve. Ist $A'C'$ die Projection von AC in der $\xi\zeta$-Ebene, so hat man

$$\frac{SA'}{SZ'}=\frac{Y'A}{Y'Z'}=\frac{SZ'}{N'}, \text{ also } SZ'=\sqrt{SA'}\sqrt{N'} \text{ und analog } SX'=\sqrt{SC'}\sqrt{L}.$$

Da aber $X'Z'$ die Parabel P' berührt, so ist

$$\frac{SZ'}{N}+\frac{SX'}{L'}=1 \text{ oder } \frac{\sqrt{SC'}}{\frac{L'}{\sqrt{L}}}+\frac{\sqrt{SA'}}{\frac{N}{\sqrt{N'}}}=1.$$

Hieraus folgt, dass SA' und SC' die Coordinaten einer Parabel sind, welche die ξ-Axe in der Entfernung $\frac{L'^2}{L}$ und die ζ-Axe in der Entfernung $\frac{N^2}{N'}$ berührt; somit umhüllt die Projection $A'C'$ in der $\xi\zeta$-Ebene die Curve

$$\frac{\xi^{1/3}}{\left(\frac{L'^2}{L}\right)^{1/3}}+\frac{\zeta^{1/3}}{\left(\frac{N^2}{N'}\right)^{1/3}}=1.$$

Die Projectionen von ABC in der $\xi\eta$-, $\eta\zeta$- und $\zeta\xi$-Ebene umhüllen also die Curven

$$16)\quad \frac{\xi^{1/3}}{\left(\frac{L^2}{L'}\right)^{1/3}}+\frac{\eta^{1/3}}{\left(\frac{M'^2}{M}\right)^{1/3}}=1, \qquad 17)\quad \frac{\eta^{1/3}}{\left(\frac{M^2}{M'}\right)^{1/3}}+\frac{\zeta^{1/3}}{\left(\frac{N'^2}{N}\right)^{1/3}}=1,$$

$$18)\quad \frac{\zeta^{2/3}}{\left(\frac{N^2}{N'}\right)^{2/3}} + \frac{\xi^{2/3}}{\left(\frac{L'^2}{L}\right)^{2/3}} = 1.$$

Von diesen drei Gleichungen, in welchen, wie in den vorhergehenden, zu beachten ist, dass M' nach 3) negativ zu nehmen ist, folgt jede aus den beiden anderen, wenn man die Formeln 8) berücksichtigt. Sie sind die Projectionen der Raumcurve auf den drei Tangentialebenen von S, welche im Raume das Analogon der drei Mannheim'schen Parabeln in der Ebene ist. Während diese in einem Confocalentripel je zwei Normalen des gemeinschaftlichen Durchschnittspunktes S, sowie auch jede der drei Hauptebenen berühren, so osculirt die Raumcurve die drei Tangentialebenen von S und ebenfalls die drei Hauptebenen.

Die Osculationspunkte in den Tangentialebenen sind die obengenannten Punkte Q, Q', Q''. Die Coordinaten von Q sind $\eta = \frac{M'^2}{M}$ und $\zeta = \frac{N^2}{N'}$, von Q' $\zeta = \frac{N'^2}{N}$ und $\xi = \frac{L^2}{L'}$, von Q'' $\zeta = \frac{L'^2}{L}$ und $\eta = \frac{M^2}{M'}$. Man überzeugt sich hiervon, wenn man z. B. die Ebene XYZ sich der $\eta\zeta$-Ebene nähern lässt; im Grenzfall werden die Punkte A, B, C auf Q, n, m' fallen.

Setzt man nun in 18) $\zeta = \frac{N^2}{N'}$, so wird mit Berücksichtigung von 8) $\eta = \frac{M'^2}{M}$ und $\frac{\zeta - N}{\eta} = \frac{N}{M'}$. Ebenso lässt sich der Beweis für die zwei anderen Punkte führen.

Das Vorhergehende kann man so zusammenfassen:

Die Hauptebenen der Confocalentripel, welche in einem Punkte S unter einander eine Berührung dritter Ordnung (s. § 2) haben, osculiren eine cubische Parabel, die eine geradlinige Directrix hat, auf welcher die Spitzen der rectangulären Trieder liegen, deren Seiten die Curve osculiren.

§ 2.

Um das Bisherige auf die Theorie der allgemeinen Flächen anzuwenden, nehmen wir eine beliebige Fläche F an, welche in dem Punkte S gleichartig gekrümmt ist; auf der Normale liegen die beiden Krümmungsmittelpunkte l und l', $Sl = L$ und $Sl' = L'$ sind die Hauptkrümmungshalbmesser von F, $L' > L$. Die Normale ist die ξ-Axe, während die Tangenten der zwei durch S gehenden Krümmungslinien von F die Axen der η und ζ sind. Die Ebenen der Krümmungskreise von L und L' gehen durch die η- und durch die ζ-Axe. Zwei unendlich nahe conjugirte Tangenten des die Krümmungslinie ζ (deren Tangente die ζ-Axe ist) berührenden Normalschnittes von F, nämlich die η-Axe und die

nächstfolgende conjugirte Tangente dieses Normalschnittes schneiden sich im Punkte m auf der η-Axe. Nun werde F von einer zweiten Fläche F' senkrecht geschnitten, welche die $\xi\zeta$-Ebene in S berührt und deren durch die $\eta\zeta$-Ebene bestimmter Hauptschnitt den Krümmungsmittelpunkt m habe, so dass $Sm = M$ der eine Hauptkrümmungshalbmesser von F' ist. Zwei aufeinanderfolgende conjugirte Tangenten des die Krümmungslinie η berührenden Normalschnittes von F schneiden sich in n', eine dritte Fläche F'' berührt die $\xi\eta$-Ebene ebenfalls in S, und n' sei der Krümmungsmittelpunkt des in der $\eta\zeta$-Ebene liegenden Hauptschnitts von F'', dann ist $Sn' = N'$ der eine Hauptkrümmungshalbmesser von F''. Die vier Grössen L, L', M und N' sind beliebig und haben in jedem Punkte S von F wieder andere Werthe; wenn aber die drei sich senkrecht schneidenden Flächen F, F', F'' die Eigenschaft haben sollen, dass sie in F von einem Confocalentripel in zweiter Ordnung berührt werden können, so sind die zwei weiteren Hauptkrümmungshalbmesser M' von F' und N von F'' nicht mehr beliebig, sondern an die Bedingungsgleichungen 8) gebunden, da nach denselben, wenn die vier Grössen L, L', M und N' gegeben sind, auch die zwei anderen M' und N bestimmt werden. Hieraus folgt der Satz:

Wenn drei sich in einem Punkte senkrecht schneidende Flächen von einem Confocalentripel sollen osculirt werden können, so sind ihre sechs Hauptkrümmungshalbmesser für diesen Punkt an zwei Bedingungsgleichungen gebunden.

Ist auf irgend einer Fläche F ein Punkt S gegeben, so sind für diesen Punkt auch die vier Strecken L, L', M und N' bestimmt und also auch die zwei anderen M' und N; es lassen sich somit immer zwei weitere Flächen F' und F'' denken, welche F in S senkrecht schneiden. Auf diese Voraussetzung gründen sich die folgenden Sätze:

Durch jeden Punkt (von gleichartiger Krümmung) einer Fläche geht eine durch die Gleichungen 9) bestimmte Gerade, auf welcher die Mittelpunkte aller Confocalentripel liegen, welche die Fläche und die zwei anderen sie senkrecht schneidenden osculiren. Die den drei Tangentialebenen der Flächen parallelen Centralschnitte der Confocalen liegen je auf einem Paraboloid, die Hauptebenen der Confocalen berühren drei Parabeln und osculiren eine cubische Parabel, deren Directrix die gemeinschaftliche Centrallinie der Confocalentripel ist.

Um ein solches Confocalentripel zu construiren, wähle man auf der Normale der Fläche einen Punkt X, z. B. zwischen S und l, lege durch X eine Ebene, welche die Parabeln P'' und P' tangirt und die Tangenten der Krümmungslinien in Y und Z schneidet. Man hat also die Gleichungen

$$\frac{SX}{L} + \frac{SY}{M'} = 1, \quad \frac{SX}{L'} + \frac{SZ}{N} = 1.$$

Dadurch sind die Punkte Y und Z und somit auch die Ebene selbst bestimmt. Ihr Durchschnitt mit der Centrallinie 9) giebt den Mittelpunkt und mit einem gewissen Kegel die Focalellipse des Tripels, wodurch dasselbe vollständig bekannt ist. Der Kegel (diese Zeitschrift XXVII, S. 371) entspricht den Gleichungen

$$\frac{SX}{\cos^2\omega} = L, \quad \frac{SX}{\cos^2\omega'} = L'.$$

Er hat seine Spitze in S, die Normale zur Axe und schneidet die Ebene SXY in zwei Geraden, welche mit der Normale den Winkel ω, und die Ebene SXZ in zwei anderen Geraden, die mit der Normale den Winkel ω' bilden.

Die Focallinien dieses Kegels liegen in der SXZ-Ebene und bilden mit der ξ-Axe den Winkel φ', der durch die Relation $\cos^2\varphi' = \frac{L}{L'}$ gegeben ist.

Wenn der Mittelpunkt O des Tripels gefunden ist, so kennt man auch seine Abstände p, p' und p'' von den drei Tangentialebenen oder den $\eta\zeta$-, $\zeta\xi$- und $\xi\eta$-Ebenen u. s. w.

Während also durch einen beliebigen Punkt X zwischen S und l auf der Normale einer Fläche F sich unendlich viele Ebenen legen lassen, deren jede durch ihren Schnitt mit dem diesem Punkte conjugirten Kegel (*l. c.* S. 371) die Focalellipse eines F in S in zweiter Ordnung berührenden Ellipsoids bestimmt, so giebt es durch denselben Punkt X nur Eine Ebene XYZ, welche durch ihren Schnitt mit der Centrallinie den Mittelpunkt und damit auch das einzige, dem Punkte X entsprechende osculirende Confocalentripel angiebt. Unter den genannten unendlich vielen dem Punkte X entsprechenden Ellipsoiden, welche sämmtlich mit F die beiden Krümmungshalbmesser L und L' gemein haben, ist also nur ein einziges, welches dem osculirenden Confocalentripel angehört, d. h. welches F im Punkte S in dritter Ordnung berührt.

Betrachten wir nun weiter die drei Paraboloide, deren gemeinschaftlicher Durchmesser die Centrallinie SO ist und welche die drei Flächen F, F', F'' im Punkte S ebenfalls in zweiter Ordnung berühren. Das reelle elliptische Paraboloid berührt F, auf ihm liegen die durch die Mittelpunkte O auf der Centrallinie gehenden, dem Halbmesser SO conjugirten, mit der Tangentialebene $\eta\zeta$ von F parallelen Centralschnitte der Ellipsoide jedes Tripels. Die Halbaxen eines solchen Centralschnittes sind $\sqrt{\lambda-\nu}$ und $\sqrt{\lambda-\mu}$ und da nach 6) $\frac{L}{L'} = \frac{\lambda-\mu}{\lambda-\nu}$, so sind ihre Quadrate den beiden Hauptkrümmungshalbmessern von F proportional, d. h. jeder solche Centralschnitt ist eine Dupin'sche Indicatrix. Zieht

man in demselben einen beliebigen Halbmesser, der mit $\sqrt{p\varrho}$ bezeichnet werden soll und mit der Axe $\sqrt{\lambda-\nu}$ den Winkel α bildet, so ist $\frac{1}{p\varrho}=\frac{\cos^2\alpha}{\lambda-\nu}+\frac{\sin^2\alpha}{\lambda-\mu}$ oder nach 10)

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{\cos^2\alpha}{L'}+\frac{\sin^2\alpha}{L},$$

welche Gleichung das Euler'sche Theorem über die Krümmungshalbmesser der Normalschnitte enthält. Somit haben wir den Satz:

Die Centrallinie der Confocalentripel ist zugleich Durchmesser eines elliptischen Paraboloids, von dessen mit der Tangentialebene der Fläche parallelen Schnitten jeder als Indicatrix des Berührungspunktes betrachtet werden kann.

In dem Bisherigen wurde der Einfachheit wegen stillschweigend die Voraussetzung gemacht, dass F in S von den Ellipsoiden des Tripels berührt wird. Um den zweiten Fall zu berücksichtigen, wo an die Stelle der Ellipsoide die zweimantligen Hyperboloide treten, darf man nur in den Formeln des § 1 λ und ν gegenseitig vertauschen und demgemäss statt L, L', M der Reihe nach N', N, M' setzen. Dadurch bleiben die Formeln 6) bis 8) ungeändert, während in 9) p mit p'' zu vertauschen ist. Man erhält also in diesem Falle für F dieselbe Centrallinie, nur mit dem Unterschiede, dass die Mittelpunkte der osculirenden zweimantligen Hyperboloide auf der der Fläche F entgegengesetzten Seite der Tangentialebene liegen. Da nun die Confocalen, welche einem osculirenden Confocalentripel angehören, mit je einer von den Flächen F, F', F'' eine Berührung dritter Ordnung haben, indem z. B. bei den osculirenden Ellipsoiden zu der Bedingung, dass ihre Krümmungshalbmesser L und L' zugleich diejenigen von F sind, noch die weitere hinzutritt, dass die Schnittpunkte von zwei unendlich nahen conjugirten Tangenten der die Krümmungslinien von F berührenden Normalschnitte Krümmungsmittelpunkte des osculirenden Confocalentripels sein sollen, so lässt sich dem oben angeführten Satze auch die Form geben:

Die Mittelpunkte aller Ellipsoide oder zweimantligen Hyperboloide, welche eine Fläche in einem Punkte von gleichartiger Krümmung in dritter Ordnung berühren, liegen auf einer durch diesen Punkt gehenden, durch die Formeln 9) bestimmten Geraden.

Durch jeden Punkt von gleichartiger Krümmung einer Fläche gehen also ausser der Normale und den Tangenten der beiden Krümmungslinien noch drei merkwürdige Linien:

Für die Berührung zweiter Ordnung die (von mir sogenannten) Focallinien; sie liegen in der Ebene des grösseren Krümmungskreises und bilden mit der Normale den Winkel $\cos^2\varphi'=\frac{L}{L'}$. Auf ihnen liegen die

Brennpunkte der osculirenden Rotationsflächen zweiten Grades, und sie bestimmen ein System von confocalen Kegeln, auf denen die Focalcurven aller osculirenden Ellipsoide und zweimantligen Hyperboloide liegen.

Für die Berührung dritter Ordnung die Centrallinie; auf ihr liegen die Mittelpunkte aller Ellipsoide und zweimantligen Hyperboloide, welche die Fläche in dritter Ordnung berühren; sie ist durch die Gleichungen 9) bestimmt.

Diese Gerade ist zugleich Directrix einer cubischen Parabel, welche die drei Hauptebenen der Ellipsoide oder zweimantligen Hyperboloide osculiren.

Es unterliegt nun keinem Anstande, diese Untersuchungen auch auf Punkte von ungleichartiger Krümmung auf den Flächen auszudehnen. Die Fläche F', welche von dem einmantligen Hyperboloid des Confocalentripels osculirt wird, ist in S ungleichartig gekrümmt. Aus der Focalliniengleichung $\cos^2\varphi' = \frac{L}{L'}$ folgt $tg^2\varphi' = \frac{L'}{L} - 1 = -\frac{M}{M'}$ nach 8), wo, wie immer, M' negativ zu nehmen ist; die Focallinien sind also die geradlinigen Erzeugenden des einmantligen Hyperboloids oder die Tangenten der Asymptotencurven von F'. Unter den centrischen Flächen zweiten Grades können nur die einmantligen Hyperboloide mit einer solchen Fläche eine Berührung höherer Ordnung haben. Sind nun von F' nicht blos die zwei Krümmungshalbmesser M und M' gegeben, sondern auch die Durchschnittspunkte l' und n von zwei unendlich nahen conjugirten Tangenten der die Krümmungslinien berührenden Normalschnitte, so kennt man die sechs Krümmungshalbmesser L, L', M, ... des osculirenden Confocalentripels, woraus sich nach 9) die Richtung der Centrallinie bestimmen lässt, auf welcher die Mittelpunkte von den einmantligen Hyperboloiden liegen, welche die Fläche in dritter Ordnung berühren.

§ 3.

Auf der Centrallinie SO liegen die Mittelpunkte aller im Vorhergehenden betrachteten Confocalentripel, die sich in S in zweiter Ordnung berühren. Unter denselben wählen wir ein bestimmtes aus, dessen Mittelpunkt O ist und auf welches sich die Gleichungen 1) speciell beziehen sollen. Die drei durch O gehenden Axen desselben sind, wie bisher, die Axen der x, y, z (nämlich die Geraden Ox, Oy, Oz in der Figur). Die drei durch S gehenden Normalen $S\xi$, $S\eta$, $S\zeta$ sollen nun die Axen eines zweiten Tripels sein, welches durch O geht und den Gleichungen

$$19)\quad \frac{p^2}{\lambda} + \frac{p'^2}{\mu} + \frac{p''^2}{\nu} = 1,$$

$$20)\quad \frac{p^2}{\lambda-\beta} + \frac{p'^2}{\mu-\beta} + \frac{p''^2}{\nu-\beta} = 1, \qquad 21)\quad \frac{p^2}{\lambda-\gamma} + \frac{p'^2}{\mu-\gamma} + \frac{p''^2}{\nu-\gamma} = 1$$

entspricht. p, p', p'' sind, wie bisher, die Coordinaten von O in Beziehung auf die Axen $S\xi$, $S\eta$, $S\zeta$; also sind λ, μ, ν die Quadrate der Halbaxen

des Ellipsoids, $\lambda-\beta$, $\mu-\beta$, $\nu-\beta$ des einmantligen und $\lambda-\gamma$, $\mu-\gamma$, $\nu-\gamma$ des zweimantligen Hyperboloids vom zweiten Tripel. Nach Analogie der Gleichungen 2) bis 4) hat man für die sechs durch O gehenden Hauptkrümmungshalbmesser des zweiten Tripels die Relationen

$$22)\qquad \mathfrak{L}=\frac{1}{\mathfrak{p}}\beta^{3/2}\gamma^{1/2},\qquad \mathfrak{L}'=\frac{1}{\mathfrak{p}}\gamma^{3/2}\beta^{1/2},$$

$$23)\qquad \mathfrak{M}=\frac{1}{\mathfrak{p}'}(\gamma-\beta)^{3/2}\beta^{1/2},\qquad \mathfrak{M}'=-\frac{1}{\mathfrak{p}'}\beta^{3/2}(\gamma-\beta)^{1/2},$$

$$24)\qquad \mathfrak{N}=\frac{1}{\mathfrak{p}''}\gamma^{3/2}(\gamma-\beta)^{1/2},\qquad \mathfrak{N}'=\frac{1}{\mathfrak{p}''}(\gamma-\beta)^{3/2}\gamma^{1/2};$$

$$\mathfrak{p}=\sqrt{\lambda\mu\nu},\quad \mathfrak{p}'=\sqrt{(\lambda-\beta)(\mu-\beta)(\nu-\beta)},\quad \mathfrak{p}''=\sqrt{(\lambda-\gamma)(\mu-\gamma)(\nu-\gamma)}.$$

Die Confocalen des zweiten Tripels berühren in O die Hauptebenen des ersten, nämlich das Ellipsoid die yz-, das einmantlige Hyperboloid die zx- und das zweimantlige die xy-Ebene. Trägt man also auf der x-Axe zwei Strecken ab gleich $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$, auf der y-Axe gleich $\mathfrak{M}$ und $-\mathfrak{M}'$, auf der z-Axe gleich $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}'$, so erhält man sechs Krümmungsmittelpunkte des zweiten Tripels, $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}'$, welche, wie beim ersten Tripel, drei Parabeln bestimmen, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$; $\mathfrak{P}$ in der yz-Ebene berührt die y-Axe in $\mathfrak{m}$ und die z-Axe in $\mathfrak{n}'$, $\mathfrak{P}'$ in der zx-Ebene berührt die z-Axe in $\mathfrak{n}$ und die x-Axe in $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{P}''$ in der xy-Ebene berührt die x-Axe in $\mathfrak{l}$ und die y-Axe in $\mathfrak{m}'$.

Betrachten wir zunächst das Ellipsoid vom zweiten Tripel; der durch S parallel mit der yz-Ebene gehende Centralschnitt desselben ist eine Ellipse, deren Halbaxen $=\sqrt{\gamma}$ und $\sqrt{\beta}$ und parallel mit der z- und y-Axe sind. Die Coordinaten von S sind x, y, z, also ist $x\sqrt{\beta}\sqrt{\gamma}=\sqrt{\lambda\mu\nu}=\mathfrak{p}$, somit $\mathfrak{L}=\frac{\beta}{x}$, $\mathfrak{L}'=\frac{\gamma}{x}$. Beim einmantligen Hyperboloid hat der mit der zx-Ebene parallele Centralschnitt die Halbaxen $\sqrt{\beta}$ und $\sqrt{\beta-\gamma}$ und beim zweimantligen sind $\sqrt{-\gamma}$, $\sqrt{\beta-\gamma}$ die imaginären Halbaxen des mit der xy-Ebene parallelen Centralschnittes; somit hat man folgende Zusammenstellung:

$$25)\qquad \mathfrak{L}=\frac{\beta}{x},\qquad \mathfrak{L}'=\frac{\gamma}{x},$$

$$26)\qquad \mathfrak{M}=\frac{\gamma-\beta}{y},\qquad \mathfrak{M}'=-\frac{\beta}{y},$$

$$27)\qquad \mathfrak{N}=\frac{\gamma}{z},\qquad \mathfrak{N}'=\frac{\gamma-\beta}{z}.$$

Hieraus leitet man weiter ab:

$$28)\qquad \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{L}'}=\frac{\beta}{\gamma},\qquad \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}'}=-\frac{\gamma-\beta}{\beta},\qquad \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}'}=\frac{\gamma}{\gamma-\beta},$$

$$29)\qquad \frac{x}{y}=-\frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{L}},\qquad \frac{y}{z}=\frac{\mathfrak{N}'}{\mathfrak{M}},\qquad \frac{z}{x}=\frac{\mathfrak{L}'}{\mathfrak{N}}$$

Man kann nun zwei Fälle unterscheiden: Erstens die Krümmungshalbmesser $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{M}$, ... sind gegeben, welche drei orthogonalen Flächen angehören F, F', F''; F berührt die yz-Ebene, F' die zx- und F'' die xy-Ebene je in O. Dann sind nach 29) die Verhältnisse $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ bestimmt, also auch die Richtung der Directrix OS, auf welcher die Mittelpunkte aller Confocalentripel liegen, welche F, F', F'' in O osculiren, und es lässt sich auf diese Tripel Alles anwenden, was in § 1 gesagt wurde. Da die Gleichungen 28) nur die Verhältnisse $\frac{\beta}{\gamma}$, $\frac{\gamma-\beta}{\beta}$ nicht diese Grössen selbst bestimmen, so entspricht jedem Punkte S auf der Directrix, dessen Coordinaten x, y, z gegeben sind, ein anderes Confocalensystem mit dem Mittelpunkt O, dessen Focalcurven durch die Relationen $\beta = x\mathfrak{L}$, $\gamma = x\mathfrak{L}'$ ebenfalls gegeben sind.

Zweitens: β und γ, also auch $\gamma - \beta$ sind gegeben, d. h. die drei Focalcurven des Systems von Confocalen mit O als Mittelpunkt sind bestimmt. In diesem Falle sind nach 28) nur die Verhältnisse von je zwei in einer Richtung liegenden Krümmungshalbmessern, also nicht diese selbst gegeben; die Richtung der Geraden OS ist zufolge 29) unbestimmt. Die Mittelpunkte S der Confocalentripel, welche in O mit F, F', F'' in dem beschränkten Sinne eine Berührung höherer Ordnung haben, als das Verhältniss von je zwei in gleicher Richtung liegenden Krümmungshalbmessern gleich demjenigen der entsprechenden Krümmungshalbmesser von F, F', F'' ist, können also beliebig im Raume angenommen werden. Es gehen mithin in diesem Falle durch O unendlich viele Gerade OS, auf welchen die Punkte S angenommen werden können; nach 29) ist das Verhältniss von zwei in verschiedenen Richtungen liegenden Krümmungshalbmessern des Tripels für jede Gerade OS ein anderes. Sollen aber die sechs Krümmungsradien des Tripels einzeln denjenigen von F, F', F'' gleich sein, dann giebt es nur Eine Gerade OS, und auf derselben nur Einen Punkt S, da nun auch β und γ gegeben sind, welche der Bedingung genügen.

Das Vorhergehende lässt sich in folgenden Satz zusammenfassen:

Wenn ein System von Confocalen (durch seine Focalcurven) gegeben ist, sowie drei sich im Mittelpunkte O rechtwinklig schneidende Flächen F, F', F'', deren Krümmungshalbmesser den Bedingungen 28) genügen, so lässt sich jeder Punkt S des Raumes als Centrum eines Confocalentripels ansehen, welches mit den Flächen in O eine Berührung zweiter Ordnung hat insofern, als das Verhältniss von je zwei in gleicher Richtung liegenden Krümmungsradien des Tripels gleich demjenigen der entsprechenden Krümmungsradien der Flächen ist. Die Hauptebenen des Tripels sind

die Tangentialebenen der drei durch S gehenden Confocalen und berühren drei Parabeln $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$, deren Directricen die Projectionen von OS auf den Hauptebenen des ersten Systems sind.

Ein System von Confocalen ist durch zwei Constante β, γ definirt, man kann es deshalb mit (β, γ) bezeichnen. Nimmt man im Raume einen Punkt S oder (x, y, z) an, so sind nach 25)—27) auch die Grössen $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$, ... und somit die drei Parabeln $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$ bestimmt, d. h. jedem Punkte entspricht ein besonderes oder ihm conjugirtes Parabeltripel; alle diese Tripel haben jedoch eine gemeinsame Eigenschaft, welche durch die Relationen 28) ausgedrückt ist. Bewegt sich der Punkt auf einer durch O gezogenen Geraden, so haben die Parabeln dieselben Directricen, nämlich die Projectionen der Geraden auf den Hauptebenen. Je weiter sich der Punkt S von O entfernt, um so mehr ziehen sich die Parabeln seines conjugirten Tripels gegen O zusammen und umgekehrt [25)—27)]. In einem gegebenen System (β, γ) giebt es nur Einen Punkt S, welchem gegebene Werthe der Grössen $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$, ... entsprechen. Hierin liegt eine neue Eigenschaft der Confocalensysteme, welche sich in dem Satz ausdrücken lässt:

In jedem System von Confocalen berühren die drei Normalebenen eines Punktes drei ihm conjugirte Parabeln, deren Directricen die Projectionen des nach dem Punkte gezogenen Radius auf den Hauptebenen sind. Jede dieser drei Parabeln berührt zugleich drei Axen des Systems.

Die Theorie der Confocalen steht in enger Verbindung mit der Theorie der Trägheitsmomente; wenn O der Schwerpunkt eines Körpers ist und $a > b > c$ die Quadrate der Hauptträgheitsradien von O sind, so construire man das Grundellipsoid $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1$ und setze $\beta=a-b$, $\gamma=a-c$, $\gamma-\beta=b-c$, so ist (β, γ) oder $(a-b,\ a-c)$ das durch das Grundellipsoid bestimmte Confocalensystem.

Die Hauptträgheitsaxen von irgend einem Punkte S des Körpers sind die Normalen der drei durch S gehenden Confocalen des Systems; ihre Ebenen tangiren also drei Parabeln, welche durch die Gleichungen 25) – 27) bestimmt sind, wenn man darin $\beta=a-b$, $\gamma=a-c$ setzt:

Die Ebenen der Hauptträgheitsaxen irgend eines Punktes im Innern eines Körpers berühren drei demselben conjugirte Parabeln, deren Directricen die Projectionen des vom Schwerpunkte aus nach dem Punkte gezogenen Radius auf die Ebenen der drei Hauptträgheitsaxen des Schwerpunktes sind. Jede dieser drei Parabeln berührt zugleich zwei Hauptträgheitsaxen des Schwerpunktes.

Um ein specielles Beispiel zu wählen, seien $\mathfrak{a} > \mathfrak{b} > \mathfrak{c}$ die Kantenlängen eines rechtwinkligen Parallelepipeds, so ist $\frac{x^2}{\mathfrak{b}^2+\mathfrak{c}^2} + \frac{y^2}{\mathfrak{c}^2+\mathfrak{a}^2} + \frac{z^2}{\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2} = \frac{1}{12}$ das Grundellipsoid, mithin $\beta = \frac{\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2}{12}$, $\gamma = \frac{\mathfrak{a}^2-\mathfrak{c}^2}{12}$, $\gamma - \beta = \frac{\mathfrak{b}^2-\mathfrak{c}^2}{12}$. Setzt man nun diese Werthe in 25)—27) ein, so erhält man für jeden Punkt S oder (x, y, z) des Körpers die Grössen $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$, ..., d. h. die Abstände der Berührungspunkte $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{m}$, ... der conjugirten Parabeln vom Schwerpunkte; diese Berührungspunkte liegen paarweise auf den Hauptträgheitsaxen des Schwerpunktes. Die Gleichungen 29) bestimmen die zugehörigen Directricen.

§ 4.

Zum Schlusse folgt nun noch eine Anwendung der vorgetragenen Sätze auf ebene Curven, indem die Beziehungen der centrischen Kegelschnitte untersucht werden, welche zwei beliebige sich in einem Punkte rechtwinklig schneidende Curven osculiren. Diese Untersuchungen stehen mit der Theorie von der Krümmung der Flächen insofern in Verbindung, als sie sich auf die Normalebenen der Confocalentripel direct übertragen lassen.

Zwei beliebige Curven C und C' schneiden sich in einem Punkte S rechtwinklig, auf der Normale von C liegt der Krümmungsmittelpunkt l', auf der Normale von C' der Krümmungsmittelpunkt n. Welches sind die Beziehungen confocaler Kegelschnittspaare, wovon die Ellipsen E die Curve C und die Hyperbeln H die Curve C' in S osculiren, deren Krümmungsmittelpunkte also l' und n sind? Hierbei gehen wir von dem Satze aus: Die Tangente und Normale von einem Punkte S einer Ellipse E, deren Mittelpunkt O, bestimmen mit den beiden Axen von E im Ganzen vier rechtwinklige Dreiecke, deren umbeschriebene Kreise sich in einem Punkte F schneiden, welcher der Brennpunkt einer Parabel ist, die sowohl beide Axen, als auch die Tangente und Normale, erstere im Krümmungsmittelpunkte n der durch S gehenden confocalen Hyperbel H, letztere im Krümmungsmittelpunkte l' der Ellipse E berührt. (Man vergleiche hierüber den Aufsatz von Zimmermann in dieser Zeitschrift 1883, S. 56.) Einen Theil dieses Satzes hat Mannheim angegeben (Nouv. Annales 1857, S. 328): Wenn eine Parabel die Axen einer Ellipse, sowie auch die Tangente und Normale eines ihrer Punkte berührt, so ist der Berührungspunkt auf der Normale Krümmungsmittelpunkt der Ellipse. Die Construction des Brennpunktes beruht darauf, dass die Brennpunkte der Berührungsparabeln eines Dreiecks auf dem umbeschriebenen Kreise liegen und ihre Directricen durch den Höhendurchschnitt gehen. Da nun nach der Aufgabe die Punkte S, l' und n fest sind, also auch die Parabel und ihre Directrix OS, so darf man nur auf letzterer den Punkt O

sich bewegen lassen und die beiden sich in O schneidenden Parabeltangenten, um Mittelpunkt und Axenrichtung aller confocalen Kegelschnittspaare zu bekommen, welche die gegebenen Curven C und C' in S osculiren.

Bezeichnet man die beiden Krümmungshalbmesser, wie in § 1 mit L' und N und die Abstände eines Punktes O von der Normale und Tangente mit p'' und p, so ist

$$30)\qquad \frac{p''}{p} = \frac{L'}{N}$$

die Gleichung der Directrix. Die Abstände des Brennpunktes von der Normale und Tangente sind $\frac{L'^2 N}{L'^2 + N^2}$ und $\frac{L' N^2}{L'^2 + N^2}$. Die Brennpunkte f und f_0 von E und H bestimmen ein System von confocalen Ellipsen und Hyperbeln. Die Polaren von allen diesen Confocalen, deren gemeinschaftlicher Pol S ist, sind Tangenten der Parabel; jede Polare schneidet ihre Confocale in zwei Punkten f' und f'_0 oder f'' und f''_0 u. s. w. Die Mitten dieser Sehnen liegen auf der Directrix OS; zieht man in den Endpunkten einer Sehne, also z. B. f' und f'_0, die Normalen der Confocalen, auf der sie liegen, so sind letztere ebenfalls Tangenten der Parabel. Nun sind f' und f'_0 oder f'' und f''_0 u. s. w. die Brennpunkte je von einem Paar confocaler Kegelschnitte, welche die Curven C und C' in S osculiren; also liegen diese Brennpunkte auf der Fusspunktencurve einer Parabel, wenn die Perpendikel auf die Tangenten von einem Punkte S der Directrix gefällt werden. Sie ist eine Curve dritten Grades und wurde von Quetelet unter dem Namen *focale à noeud* untersucht. Das Vorhergehende lässt sich in dem Satze ausdrücken:

Die Mittelpunkte aller confocalen Kegelschnittspaare, welche zwei sich senkrecht im Punkte S schneidende Curven osculiren, liegen auf einer Geraden OS, welche durch die Gleichung 30) bestimmt ist. Ihre Axen sowohl, als die in den Brennpunkten auf den nach S gezogenen Brennstrahlen errichteten Perpendikel berühren eine Parabel; also liegen die Brennpunkte auf der Fusspunktencurve einer Parabel, wenn die Perpendikel auf die Tangenten von einem Punkte S der Directrix gefällt werden. Die Endpunkte der dem Halbmesser OS conjugirten Durchmesser liegen bei den Ellipsen auf einer reellen und bei den Hyperbeln auf einer imaginären Parabel.

Reutlingen, Januar 1883.

VIII.

Ueber Differentialgleichungen, welche durch hypergeometrische Functionen integrirt werden können.

Von

Woldemar Heymann

in Plauen i. V.

Es soll im ersten Theile dieser Arbeit diejenige lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung behandelt werden, der genügt wird durch das hypergeometrische Integral dritter Ordnung

$$y=\int_g^h (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-a_3)^{b_3-1}(u-x)^{\mu}\,du.$$

Herr L. Pochhammer hat diejenige lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung aufgestellt, welche durch hypergeometrische Integrale n^{ter} Ordnung integrirt werden kann.* Im Falle $n=3$ kann man derselben folgende Form ertheilen:

$$x_1x_2x_3\frac{d^3z}{dx^3}+\left\{\begin{array}{l}(1-\mu-b_1)x_2x_3\\+(1-\mu-b_2)x_3x_1\\+(1-\mu-b_3)x_1x_2\end{array}\right\}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}+\mu\left\{\begin{array}{l}(1-\mu-b_2-b_3)x_1\\+(1-\mu-b_3-b_1)x_2\\+(1-\mu-b_1-b_2)x_3\end{array}\right\}\cdot\frac{dz}{dx}$$
$$+(1+\mu)\mu\{1-\mu-b_1-b_2-b_3\}z=0,$$

und ihr genügt particulär

$$z=\int_g^h u_1^{b_1-1}u_2^{b_2-1}u_3^{b_3-1}(u-x)^{\mu+1}\,du,$$

wobei

$$x_k=x-a_k,\quad u_k=u-a_k$$

und g und h irgend zwei der Zahlen a_1, a_2, a_3 bedeuten.

Setzt man die Bedingung

$$1-\mu-(b_1+b_2+b_3)=0$$

fest und schreibt y statt $\frac{dz}{dx}$, so lautet die letzte Differentialgleichung

---

* Pochhammer, Ueber hypergeometrische Functionen höherer Ordnung, 71. Bd. des Journals für die reine und angewandte Mathematik. — Vergl. auch S. Spitzer, Neue Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen (Schluss), Wien 1883.

1) $$x_1 x_2 x_3 \frac{d^2 y}{dx^2} + \{(b_2+b_3)x_2 x_3 + (b_3+b_1)x_1 x_3 + (b_1+b_2)x_1 x_2\} \frac{dy}{dx} - \mu\{b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3\} y = 0$$

und das Integral

2) $$y = \int_g^h u_1^{b_1-1} u_2^{b_2-1} u_3^{b_3-1} (u-x)^\mu \, du.$$

Dass diese Gleichung die einzige der verlangten Art ist, welcher durch das aufgestellte Integral genügt wird, geht durch die folgende Untersuchung hervor. Man verlangt, dass der Ausdruck

$$y = \int_g^h \zeta (u-x)^\mu \, du,$$

wobei ζ durch die Differentialgleichung

a) $$u_1 u_2 u_3 \frac{d\zeta}{du} - \{(b_1-1) u_2 u_3 + (b_2-1) u_3 u_1 + (b_3-1) u_1 u_2\} \zeta = 0$$

gegeben ist, einer Gleichung zweiter Ordnung

$$X_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + X_1 \frac{dy}{dx} + X_0 y = 0$$

genüge. Nach dem Vorgange von Euler und Jacobi* muss nun

$$\int \zeta (u-x)^{\mu-2} \{\mu(\mu-1) X_2 - \mu X_1 (u-x) + X_0 (u-x)^2\} du = \mu\, u_1 u_2 u_3\, \zeta (u-x)^{\mu-1},$$

und hieraus folgt unter Berücksichtigung der Gleichung a)

$$\mu(\mu-1) X_2 - \mu X_1 (u-x) + X_0 (u-x)^2 = \mu(\mu-1)\, u_1 u_2 u_3 + \mu\{b_1 u_2 u_3 + b_2 u_3 u_1 + b_3 u_1 u_2\}(u-x).$$

Differenzirt man diese Gleichung dreimal hintereinander nach u, so entsteht

$$-\mu X_1 + 2 X_0 (u-x) = \mu \left\{ \begin{matrix} (\mu-1+b_1) u_2 u_3 \\ +(\mu-1+b_2) u_3 u_1 \\ +(\mu-1+b_3) u_1 u_2 \end{matrix} \right\} + \mu (u-x) \left\{ \begin{matrix} b_1 (u_2+u_3) \\ +b_2 (u_3+u_1) \\ +b_3 (u_1+u_2) \end{matrix} \right\},$$

$$2 X_0 = \mu \left\{ \begin{matrix} (\mu-1+2b_1)(u_2+u_3) \\ +(\mu-1+2b_2)(u_3+u_1) \\ +(\mu-1+2b_3)(u_1+u_2) \end{matrix} \right\} + 2\mu (u-x)(b_1+b_2+b_3),$$

$$0 = 6\mu(\mu-1+b_1+b_2+b_3),$$

und da alle diese Gleichungen identisch stattzufinden haben, also auch für $u = x$, so ergiebt sich mit Benutzung der Bedingung

b) $$\mu - 1 + b_1 + b_2 + b_3 = 0:$$

---

* Jacobi, Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe, 56. Bd. des Journ. f. d. reine u. angew. Mathematik.

$$X_2 = x_1 x_2 x_3, \quad X_1 = (b_2+b_3) x_2 x_3 + (b_3+b_1) x_3 x_1 + (b_1+b_2) x_1 x_2,$$
$$X_0 = -\mu (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3).$$

Da nun wegen a)

$$\zeta = u_1^{b_1-1} u_2^{b_2-1} u_3^{b_3-1},$$

so hat man

$$X_2 y'' + X_1 y' + X_0 y = \mu\, u_1^{b_1} u_2^{b_2} u_3^{b_3} (u-x)^{\mu-1},$$

und dies verschwindet für $u_k = a_k$, vorausgesetzt, dass die b positive Zahlen sind oder solche complexe Zahlen, deren reeller Theil positiv ist. Mithin genügt das angenommene Integral der Differentialgleichung 1), falls es zwischen den erwähnten Grenzen genommen wird.

Differenzirt man die Gleichung

$$1)\quad x_1 x_2 x_3 \frac{d^2 y}{dx^2} + \{(b_2+b_3) x_2 x_3 + (b_3+b_1) x_3 x_1 + (b_1+b_2) x_1 x_2\} \frac{dy}{dx}$$
$$- \mu \{b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3\} y = 0$$

n-mal und beachtet b), so entsteht

$$3)\quad x_1 x_2 x_3 y^{(n+2)} + \left\{ \begin{matrix} (b_2+b_3+n) x_2 x_3 \\ + (b_3+b_1+n) x_3 x_1 \\ + (b_1+b_2+n) x_1 x_2 \end{matrix} \right\} y^{(n+1)} + (n-\mu) \left\{ \begin{matrix} (b_1+n) x_1 \\ + (b_2+n) x_2 \\ + (b_3+n) x_3 \end{matrix} \right\} y^{(n)}$$
$$+ n(n-\mu)(n-\mu-1) y^{(n-1)} = 0.$$

Für $n = \mu$ folgt hieraus

$$x_1 x_2 x_3 y^{(\mu+2)} - \{(b_1-1) x_2 x_3 + (b_2-1) x_3 x_1 + (b_3-1) x_1 x_2\} y^{(\mu+1)} = 0,$$

und von dieser Gleichung ist

$$4)\quad y = \frac{d^{-\mu-1}}{dx^{-\mu-1}} \{x_1^{b_1-1} x_2^{b_2-1} x_3^{b_3-1}\}$$

ein particuläres Integral, falls μ eine ganze negative Zahl ist.

Der letzte Ausdruck genügt aber auch der vorgelegten Differentialgleichung 1). Diese Herleitung des Integrals ist nicht frei von Einwürfen; man kann sich aber leicht von der Richtigkeit desselben auf directem Wege überzeugen und überdies sind derartige Integrationen seit Liouville genugsam bekannt.

Wählt man in Gleichung 3) $n = \mu + 1$ und setzt $y^{(\mu+1)} = s$, so lautet dieselbe

$$x_1 x_2 x_3 \frac{d^2 s}{dx^2} + \left\{ \begin{matrix} (2-b_1) x_2 x_3 \\ + (2-b_2) x_3 x_1 \\ + (2-b_3) x_1 x_2 \end{matrix} \right\} \frac{ds}{dx} + \left\{ \begin{matrix} (2-b_2-b_3) x_1 \\ + (2-b_3-b_1) x_2 \\ + (2-b_1-b_2) x_3 \end{matrix} \right\} s = 0,$$

und diese Gleichung wird befriedigt durch $s = y^{(\mu+1)}$, also wegen 4)

$$s = x_1^{b_1-1} x_2^{b_2-1} x_3^{b_3-1}.$$

Die beiden Integrale 2) und 4) der Differentialgleichung 1) lassen eine merkwürdige Reduction zu. Führt man nämlich in das Integral

$$y = \int_g^h (u-a_1)^{b_1-1} (u-a_2)^{b_2-1} (u-a_3)^{b_3-1} (u-x)^{\mu}\, du$$

die gebrochenen Substitutionen*

* Auch die reciproken Substitutionen sind brauchbar.

$$u=\frac{v}{1+\lambda v}, \quad x=\frac{\xi}{1+\lambda\xi}$$

ein, so entsteht

$$y=\int_g^h \frac{\{(1-\lambda a_1)v-a_1\}^{b_1-1}\{(1-\lambda a_2)v-a_2\}^{b_2-1}\{(1-\lambda a_3)v-a_3\}^{b_3-1}(v-\xi)^\mu}{(1+\lambda v)^{\mu-1+b_1+b_2+b_3}(1+\lambda\xi)^\mu}\,dv.$$

Setzt man noch

$$y=\frac{\eta}{(1+\lambda\xi)^\mu}$$

und beachtet die Bedingung b), so hat man

$$\eta=\int_g^h \{(1-\lambda a_1)v-a_1\}^{b_1-1}\{(1-\lambda a_2)v-a_2\}^{b_2-1}\{(1-\lambda a_3)v-a_3\}^{b_3-1}(v-\xi)^\mu\,dv.$$

Nun kann man aber über λ so verfügen, dass das vorstehende hypergeometrische Integral dritter Ordnung in eines der zweiten Ordnung übergeht. Wählt man etwa $\lambda=\frac{1}{a_3}$, so vereinfacht sich das vorige Integral zu

$$\eta=\int_g^h (v-\alpha_1)^{b_1-1}(v-\alpha_2)^{b_2-1}(v-\xi)^\mu\,du,$$

wobei

$$\alpha_1=\frac{a_1 a_3}{a_3-a_1}=g, \quad \alpha_2=\frac{a_2 a_3}{a_3-a_2}=h$$

und der vor das Integral tretende constante Factor stets unterdrückt werden darf.

In analoger Weise lässt der Ausdruck

$$4)\qquad y=\frac{d^{-\mu-1}}{dx^{-\mu-1}}\{(x-a_1)^{b_1-1}(x-a_2)^{b_2-1}(x-a_3)^{b_3-1}\}$$

für

$$x=\frac{\xi}{1+\lambda\xi}$$

unter Anwendung der Formel*

$$\frac{d^n\zeta}{\left\{d\frac{\xi}{1+\lambda\xi}\right\}^n}=(1+\lambda\xi)^{n+1}\frac{d^n\{\zeta(1+\lambda\xi)^{n-1}\}}{d\xi^n} \quad (n=-\mu-1)$$

folgende Umgestaltung zu:

$$y=(1+\lambda\xi)^{-\mu}\frac{d^{-\mu-1}}{d\xi^{-\mu-1}}\frac{\{(1-\lambda a_1)\xi-a_1\}^{b_1-1}\{(1-\lambda a_2)\xi-a_2\}^{b_2-1}\{(1-\lambda a_3)\xi-a_3\}^{b_3-1}}{(1+\lambda\xi)^{\mu-1+b_1+b_2+b_3}}$$

oder für

* O. Schlömilch, Zeitschrift f. Math. u. Physik III, S. 65. — S. Spitzer, Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen, VII. Abschn. S. 50.

$$y = \frac{\eta}{(1+\lambda\xi)^\mu}$$

und wegen b)

$$\eta = \frac{d^{-\mu-1}}{d\xi^{-\mu-1}} \left\{(1-\lambda a_1)\xi - a_1\right\}^{b_1-1} \left\{(1-\lambda a_2)\xi - a_2\right\}^{b_2-1} \left\{(1-\lambda a_3)\xi - a_3\right\}^{b_3-1}.$$

Auch hier gewinnt man bei specieller Wahl des λ, etwa $\lambda = \frac{1}{a_3}$, einen Ausdruck

$$\eta = \frac{d^{-\mu-1}}{d\xi^{-\mu-1}} (\xi - \alpha_1)^{b_1-1} (\xi - \alpha_2)^{b_2-1},$$

welcher, falls μ ganz und negativ ist, einer Differentialgleichung genügt, die sonst mit hypergeometrischen Integralen zweiter Ordnung zu integriren ist. Die α haben die vorige Bedeutung.

Da sich die Integrale der Differentialgleichung 1) durch gebrochene Substitutionen von der dritten Ordnung auf die zweite erniedrigen lassen, so wird sich auch die Differentialgleichung selbst in entsprechender Weise reduciren lassen.

In der That, transformirt man die Gleichung

$$\begin{aligned} 1)\quad x_1 x_2 x_3 \frac{d^2 y}{dx^2} + \left\{(b_2+b_3)x_2x_3 + (b_3+b_1)x_3x_1 + (b_1+b_2)x_1x_2\right\} \frac{dy}{dx} \\ - \mu \left\{b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3\right\} y = 0 \end{aligned}$$

mittelst

$$x = \frac{\xi}{1+\lambda\xi}, \quad y = \frac{\eta}{(1+\lambda\xi)^\mu},$$

so ist

$$\frac{dy}{dx} = (1+\lambda\xi)^{1-\mu} \left\{(1+\lambda\xi)\frac{d\eta}{d\xi} - \lambda\mu\eta\right\},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (1+\lambda\xi)^{2-\mu} \left\{(1+\lambda\xi)^2 \frac{d^2\eta}{d\xi^2} - 2\lambda(\mu-1)(1+\lambda\xi)\frac{d\eta}{d\xi} + \lambda^2\mu(\mu-1)\eta\right\},$$

und man bekommt, nachdem geordnet und die Bedingung b) berücksichtigt worden ist,

$$\begin{aligned} (1+\lambda\xi)^2 \xi_1\xi_2\xi_3 \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + (1+\lambda\xi) \left\{\begin{matrix} (b_2+b_3)(1+\lambda\xi_1)\xi_2\xi_3 \\ + (b_3+b_1)(1+\lambda\xi_2)\xi_3\xi_1 \\ + (b_1+b_2)(1+\lambda\xi_3)\xi_1\xi_2 \end{matrix}\right\} \frac{d\eta}{d\xi} \\ - \mu \left\{\begin{matrix} b_1(1+\lambda\xi_2)(1+\lambda\xi_3)\xi_1 \\ + b_2(1+\lambda\xi_3)(1+\lambda\xi_1)\xi_2 \\ + b_3(1+\lambda\xi_1)(1+\lambda\xi_2)\xi_3 \end{matrix}\right\} \eta = 0. \end{aligned}$$

Hierbei dient zur Abkürzung

$$\xi_k = (1-\lambda a_k)\xi - a_k.$$

Beachtet man, dass

$$1 + \lambda\xi_k = 1 + \lambda\left\{(1-\lambda a_k)\xi - a_k\right\} = (1-\lambda a_k)(1+\lambda\xi),$$

so geht die letzte Differentialgleichung über in

$$\xi_1\xi_2\xi_3\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+\left\{\begin{array}{l}(b_2+b_3)(1-\lambda a_1)\xi_2\xi_3\\+(b_3+b_1)(1-\lambda a_2)\xi_3\xi_1\\+(b_1+b_2)(1-\lambda a_3)\xi_1\xi_2\end{array}\right\}\frac{d\eta}{d\xi}$$
$$-\mu\left\{\begin{array}{l}b_1(1-\lambda a_2)(1-\lambda a_3)\xi_1\\+b_2(1-\lambda a_3)(1-\lambda a_1)\xi_2\\+b_3(1-\lambda a_1)(1-\lambda a_2)\xi_3\end{array}\right\}\eta=0.$$

Setzt man jetzt, wie früher, durchweg

$$\lambda=\frac{1}{a_3},\quad \frac{a_1a_3}{a_3-a_1}=\alpha_1,\quad \frac{a_2a_3}{a_3-a_2}=\alpha_2,$$

so wird die letzte Gleichung durch ξ_3 theilbar und es entsteht

$$(\xi-\alpha_1)(\xi-\alpha_2)\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+\left\{(b_2+b_3)(\xi-\alpha_2)+(b_3+b_1)(\xi-\alpha_1)\right\}\frac{d\eta}{d\xi}-\mu b_3\eta=0,$$

wie zu erwarten war.

Es kann daher einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit algebraischen Coefficienten nicht durch eigentliche hypergeometrische Integrale dritter Ordnung genügt werden. Denn die hier in Frage kommenden Integrale sind wohl der Form nach von der dritten Ordnung; sie lassen sich aber durch gebrochene Substitutionen auf die zweite Ordherabdrücken. — Obschon man bei wirklicher Durchführung einer numerischen Rechnung immer auf die letzte Differentialgleichung zurückgehen wird, so bleibt doch das Integral 2) der Gleichung 1) formell interessant und verdient bei allgemeiner Darstellung wegen der Symmetrie den Vorzug, weil in demselben keiner der singulären Punkte a_1, a_2, a_3 ausgezeichnet ist.

Da sich die beiden particulären Integrale der gewöhnlichen hypergeometrischen Differentialgleichung zweiter Ordnung in den Grenzen nicht unterscheiden, so muss es möglich sein, auch für die Differentialgleichung 1) ein zweites particuläres Integral herzuleiten, welches dieselben Grenzen besitzt, als das Integral 2). Hierzu dient folgende Transformation.* Man substituire in die Gleichung 1)

$$y=x_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2}x_3^{\nu_3}w,$$

dann kommt

---

* Es giebt noch andere derartige Transformationen, insbesondere wenn eine oder zwei der Grössen ν gleich Null genommen werden, und man könnte leicht eine vollständige Analyse der Gleichung 1) geben, wobei die Untersuchungen über die Differentialgleichung der gewöhnlichen hypergeometrischen Reihe massgebend wären und auch vollständig ausreichten. Wir haben die obige Umformung deswegen herausgegriffen, weil sie sehr allgemein ist und noch zu anderen Zwecken dient. Vergl. S. 105 flgg.

$$5)\qquad (x_1x_2x_3)^2\frac{d^2w}{dx^2}+(x_1x_2x_3)\left\{\begin{array}{l}(2\nu_1+b_2+b_3)x_2x_3\\+(2\nu_2+b_3+b_1)x_3x_1\\+(2\nu_3+b_1+b_2)x_1x_2\end{array}\right\}\frac{dw}{dx}$$

$$+\left\{(x_1x_2x_3)\left[\begin{array}{l}(\nu_2+\nu_3-\mu b_1)x_1\\+(\nu_3+\nu_1-\mu b_2)x_2\\+(\nu_1+\nu_2-\mu b_3)x_3\end{array}\right]+\left[\begin{array}{l}\nu_1x_2x_3\\+\nu_2x_3x_1\\+\nu_3x_1x_2\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}(\nu_1-1+b_2+b_3)x_2x_3\\+(\nu_2-1+b_3+b_1)x_3x_1\\+(\nu_3-1+b_1+b_2)x_1x_2\end{array}\right]\right\}w=0.$$

Wählt man die ν derartig, dass

$$\nu_1-1+b_2+b_3=0,\quad \nu_2-1+b_3+b_1=0,\quad \nu_3-1+b_1+b_2=0$$

und beachtet hierbei die Bedingung

$$\mu-1+b_1+b_2+b_3=0,$$

so vereinfacht sich die Differentialgleichung 5) zu

$$x_1x_2x_3\frac{d^2w}{dx^2}+\left\{\begin{array}{l}(2-b_2-b_3)x_2x_3\\+(2-b_3-b_1)x_3x_1\\+(2-b_1-b_2)x_1x_2\end{array}\right\}\frac{dw}{dx}+(\mu+1)\left\{\begin{array}{l}(1-b_1)x_1\\+(1-b_2)x_2\\+(1-b_3)x_3\end{array}\right\}w=0.$$

Eine Gleichung mit denselben Coefficienten erhält man jedoch auch, wenn man in

$$1)\quad x_1x_2x_3\frac{d^2y}{dx^2}+\left\{(b_2+b_3)x_2x_3+(b_3+b_1)x_3x_1+(b_1+b_2)x_1x_2\right\}\frac{dy}{dx}$$
$$-\mu\left\{b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3\right\}y=0$$

an Stelle von $\qquad b_1 \qquad b_2 \qquad b_3 \qquad \mu$

die Verbindungen $\qquad 1-b_1 \qquad 1-b_2 \qquad 1-b_3 \qquad -(\mu+1)$

setzt. Bezeichnet man sonach das frühere Integral 2) oder 4) der Gleichung 1) durch

$$y=f(b_k,x_k),$$

so ist ein zweites Integral dieser Gleichung

$$y_1=x_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2}x_3^{\nu_3}f(1-b_k,x_k).$$

Das allgemeine Integral lautet daher *in extenso*

$$6)\quad y=\left\{\begin{array}{l}C_1\int\limits_g^h u_1^{b_1-1}u_2^{b_2-1}u_3^{b_3-1}(u-x)^{1-b_1-b_2-b_3}du\\+C_2x_1^{1-b_2-b_3}x_2^{1-b_3-b_1}x_3^{1-b_1-b_2}\int\limits_g^h u_1^{-b_1}u_2^{-b_2}u_3^{-b_3}(u-x)^{b_1+b_2+b_3-2}du,\end{array}\right.$$

wobei die b positive echte Brüche sein müssen oder solche complexe Zahlen, deren reeller Theil positiv und echt gebrochen ist.

In dem speciellen Falle, wo

$$b_1=b_2=b_3=\tfrac{1}{2},$$

sind die beiden particulären Integrale von einander nicht verschieden. Nimmt man zunächst

$$b_1=b_2=b_3=b,$$

so haben dieselben folgende Gestalt:

$$y = \int_g^h (u_1 u_2 u_3)^{b-1} (u-x)^{1-3b} du,$$

$$y_1 = (x_1 x_2 x_3)^{1-2b} \int_g^h (u_1 u_2 u_3)^{-b} (u-x)^{3b-2} du.$$

Nun genügt der Gleichung 1) offenbar auch

$$y_0 = \frac{y-y_1}{1-2b} = \int_g^h (u_1 u_2 u_3)^{b-1} (u-x)^{1-3b} \frac{1 - \left\{ \frac{x_1 x_2 x_3 u_1 u_2 u_3}{(u-x)^3} \right\}^{1-2b}}{1-2b} du$$

oder für $b = \frac{1}{2}$

$$y_0 = \int_g^h \frac{du}{\sqrt{u_1 u_2 u_3 (u-x)}} \log \frac{x_1 x_2 x_3 u_1 u_2 u_3}{(u-x)^3}.$$

Mithin lautet in diesem Specialfalle das vollständige Integral

$$y = \int_g^h \frac{du}{\sqrt{u_1 u_2 u_3 (u-x)}} \left\{ C_1 + C_2 . \log \frac{x_1 x_2 x_3 u_1 u_2 u_3}{(u-x)^3} \right\}.$$

Vertauscht man in der angezeigten Weise die Buchstaben auch in dem Ausdrucke

$$4) \qquad y = \frac{d^{-\mu-1}}{dx^{-\mu-1}} \left\{ x_1^{b_1-1} x_2^{b_2-1} x_3^{b_3-1} \right\},$$

so erhält man

$$y_1 = x_1^{1-b_2-b_3} x_2^{1-b_3-b_1} x_3^{1-b_1-b_2} \frac{d^\mu}{dx^\mu} \left\{ x_1^{-b_1} x_2^{-b_2} x_3^{-b_3} \right\},$$

welcher Werth ein Integral der Gleichung 1) ist, so lange μ eine ganze positive Zahl incl. Null bedeutet. Ist sonach μ, also auch $b_1 + b_2 + b_3$ überhaupt eine ganze Zahl, so genügt stets einer der oben angegebenen höheren Differentialquotienten.

Es mögen nun zwei lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung Erwähnung finden, welche Specialfälle der Gleichung 5) sind und daher durch hypergeometrische Functionen integrirt werden können.

Die Gleichung 5) hat die Form

$$7) \quad (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3)^2 \frac{d^2 w}{dx^2} + (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3)(\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2) \frac{dw}{dx} + (\alpha_0 + \beta_0 x + \gamma_0 x^2 + \delta_0 x^3 + \varepsilon_0 x^4) w = 0.$$

Vergleicht man die Coefficienten dieser Gleichung mit den entsprechenden der Gleichung 5), so erhält man ein Gleichungssystem zur Bestimmung der neun Grössen a_k, b_k und ν_k. Da aber elf Gleichungen zu befriedigen sind, so bleiben zwischen den Coefficienten der Gleichung 7) zwei Bedingungen übrig.

Werden die Coefficienten δ_0 und ε_0 entwickelt, so findet man

$$\delta_0:\delta = -(\nu-\mu)\left\{\begin{array}{l}(2\nu+1-\mu+b_1-2\nu_1)a_1\\+(2\nu+1-\mu+b_2-2\nu_2)a_2\\+(2\nu+1-\mu+b_3-2\nu_3)a_3\end{array}\right\},$$

$$\varepsilon_0:\delta=(\nu-\mu)(\nu+1-\mu),$$

wobei zur Abkürzung

$$\nu_1+\nu_2+\nu_3=\nu$$

gesetzt wurde. Man erkennt, dass beide Coefficienten verschwinden, wenn $\nu=\mu$, und dass ausserdem in diesem Falle

$$\gamma_1:\delta=2(\nu+b_1+b_2+b_3)=2(\nu+1-\mu)=2.$$

Mithin ist die Differentialgleichung

$$\text{7a)}\quad (\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)^2\frac{d^2w}{dx^2}+(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)(\alpha_1+\beta_1 x+\gamma_1 x^2)\frac{dw}{dx}$$
$$+(\alpha_0+\beta_0 x+\gamma_0 x^2)w=0$$

mit Hilfe der Substitution

$$w=(x-a_1)^{-\nu_1}(x-a_2)^{-\nu_2}(x-a_3)^{-\nu_3}y$$

auf die Gleichung 1) zurückführbar, wenn nur die eine Bedingung

$$\gamma_1=2\delta$$

besteht, ν_1, ν_2, ν_3 gewisse zu bestimmende Zahlen sind und a_1, a_2, a_3 die Wurzeln der Gleichung

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3=0$$

bedeuten. — Im zweiten Theile dieser Arbeit wird sich zeigen, dass auf die letzte Differentialgleichung 7a) eine bemerkenswerthe Gleichung erster Ordnung zurückgeführt werden kann.*

Der Coefficient ε_0 verschwindet auch, falls $\nu=\mu-1$, und dann ist

$$\delta_0:\delta=-\left\{\begin{array}{l}(2\nu_1+b_2+b_3)a_1\\+(2\nu_2+b_3+b_1)a_2\\+(2\nu_3+b_1+b_2)a_3\end{array}\right\}.$$

Wählt man, um δ_0 zum Verschwinden zu bringen,

$$\nu_1=-\tfrac{1}{2}(b_2+b_3),\quad \nu_2=-\tfrac{1}{2}(b_3+b_1),\quad \nu_3=-\tfrac{1}{2}(b_1+b_2),$$

so annulliren sich gleichzeitig die Coefficienten α_1, β_1 und γ_1, und es bleibt die Gleichung

$$\text{7b)}\qquad (\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)^2\frac{d^2w}{dx^2}+(\alpha_0+\beta_0 x+\gamma_0 x^2)w=0,$$

in welcher die Coefficienten keiner Bedingung mehr unterliegen.** Um aus diesen Coefficienten die Parameter a_k und b_k des Integrals zu finden, hat man zunächst

---

* Vergl. S. 155.

** Hierbei wurden die ν unabhängig von den drei Wurzelwerthen a bestimmt. Verfährt man weniger speciell, so kann man die ν auch so wählen, dass folgende Gleichung erscheint:

$$(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)^2\frac{d^2w}{dx^2}+\alpha_1(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)\frac{dw}{dx}+(\alpha_0+\beta_0 x+\gamma_0 x^2)w=0,$$

deren Integration wir aber bereits bei anderer Gelegenheit erörtert haben.

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 = \delta (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3).$$

Die Zahlen α_0, β_0, γ_0 bestimmt man so, dass man der Reihe nach $x = a_1$, a_2, a_3 setzt und den Coefficienten von w in Gleichung 5) ins Auge fasst. Man erhält auf diese Weise

$$\nu_1(\nu_1 - 1 + b_2 + b_3)(a_1 - a_2)^2 (a_1 - a_3)^2 = (\alpha_0 + \beta_0 a_1 + \gamma_0 a_1^2) : \delta^2 \text{ etc.}$$

oder, weil

$$\nu_1 = -\tfrac{1}{2}(b_2 + b_3) \text{ etc.},$$

$$-\tfrac{1}{2}(b_2 + b_3)[\tfrac{1}{2}(b_2 + b_3) - 1][(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)]^2 = (\alpha_0 + \beta_0 a_1 + \gamma_0 a_1^2) : \delta^2 \text{ etc.}$$

Es ergeben sich also die b aus drei gleichartig gebauten quadratischen Gleichungen, von denen die erste folgendermassen lautet:

$$(b_2 + b_3)^2 - 2(b_2 + b_3) + 4[\alpha_0 + \beta_0 a_1 + \gamma_0 a_1^2] : [\delta (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)]^2 = 0.$$

Nach diesen Rechnungen hat man wegen $w = x_1^{-\nu_1} x_2^{-\nu_2} x_3^{-\nu_3} y$ und mit Hinzuziehung der früher gewonnenen Integralform 6) für die Differentialgleichung

$$\text{7b)} \qquad (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3)^2 \frac{d^2 w}{dx^2} + (\alpha_0 + \beta_0 x + \gamma_0 x^2) w = 0$$

folgendes vollständige Integral:

$$w = \begin{cases} C_1 x_1^{\frac{b_2+b_3}{2}} x_2^{\frac{b_3+b_1}{2}} x_3^{\frac{b_1+b_2}{2}} \int_g^h u_1^{b_1-1} u_2^{b_2-1} u_3^{b_3-1} (u-x)^{1-b_1-b_2-b_3} du \\ + C_2 x_1^{1-\frac{b_2+b_3}{2}} x_2^{1-\frac{b_3+b_1}{2}} x_3^{1-\frac{b_1+b_2}{2}} \int_g^h u_1^{-b_1} u_2^{-b_2} u_3^{-b_3} (u-x)^{b_1+b_2+b_3-2} du, \end{cases}$$

die b als positive echte Brüche oder als complexe Zahlen gedacht, deren reeller Theil positiv echt gebrochen ist.

Sollte $b_1 + b_2 + b_3$ eine ganze Zahl sein, so genügt der letzten Differentialgleichung auch stets einer der Ausdrücke

$$w = x_1^{\frac{b_2+b_3}{2}} \; x_2^{\frac{b_3+b_1}{2}} \; x_3^{\frac{b_1+b_2}{2}} \; \frac{d^{b_1+b_2+b_3-2}}{dx^{b_1+b_2+b_3-2}} \left\{ x_1^{b_1-1} x_2^{b_2-1} x_3^{b_3-1} \right\},$$

$$w_1 = x_1^{1-\frac{b_2+b_3}{2}} \; x_2^{1-\frac{b_3+b_1}{2}} \; x_3^{1-\frac{b_1+b_2}{2}} \; \frac{d^{1-b_1-b_2-b_3}}{dx^{1-b_1-b_2-b_3}} \left\{ x_1^{-b_1} x_2^{-b_2} x_3^{-b_3} \right\}.$$

Im zweiten Abschnitte dieser Arbeit mögen einige Differentialgleichungen erster Ordnung Erwähnung finden, welche auf die früher betrachteten Gleichungen zurückgeführt werden können und denen sonach hypergeometrische Integrale genügen.

Vorgelegt sei die dem Connex (1, 2) entsprechende Differentialgleichung

$$K_1\,dx + K_2\,dy + K_3\,(x\,dy - y\,dx) = 0,$$

wo

$$K_i = A_i x^2 + B_i y^2 + C_i xy + D_i x + E_i y + F_i\,.$$

Verlangt man, dass dieser Gleichung drei durch einen Punkt gehende Gerade particulär genügen, und verlegt der Einfachheit halber diesen Punkt in den Coordinatenanfang, so muss die Gleichung für

$$y = \mu x$$

identisch erfüllt sein; das heisst, es muss

$$\left.\begin{array}{l} A_1 x^2 + B_1 \mu^2 x^2 + C_1 \mu x^2 + D_1 x + E_1 \mu x + F_1 \\ + (A_2 x^2 + B_2 \mu^2 x^2 + C_2 \mu x^2 + D_2 x + E_2 \mu x + F_2 \mu \end{array}\right\} \text{ identisch } 0$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} \left\{A_1 + (A_2 + C_1)\mu + (B_1 + C_2)\mu^2 + B_2 \mu^3\right\} x^2 \\ + \left\{D_1 + (D_2 + E_1)\mu + E_2 \mu^2\right\} x + F_1 + F_2 \mu \end{array}\right\} \text{ identisch } 0.$$

Annullirt man den Factor von x^2 so, dass man für μ jede der drei Wurzeln der betreffenden cubischen Gleichung zulässt, so gehört zur Identität, dass

$$D_1 = D_2 + E_1 = E_2 = F_1 = F_2 = 0,$$

und lässt man noch die überflüssigen Grösseen D_3 und E_3 fort, dann resultirt als Normalform der vorgelegten Differentialgleichung

$$8)\quad \left.\begin{array}{l} (A_1 x^2 + B_1 y^2 + C_1\,xy)\,dx + (A_2 x^2 + B_2 y^2 + C_2\,xy)\,dy \\ \qquad + (A_3 x^2 + B_3 y^2 + C_3\,xy + F_3)(x\,dy - y\,dx) \end{array}\right\} = 0.$$

Setzt man hierin

$$x = \frac{1}{v}, \quad y = \frac{u}{v},$$

so entsteht eine Riccati'sche Gleichung

$$\Phi \frac{dv}{du} - F_3 v^2 - \Psi v - \Omega = 0,$$

in welcher

$$\left.\begin{array}{l} \Phi = A_1 + (A_2 + C_1)u + (B_1 + C_2)u^2 + B_2 u^3 \\ \Psi = A_2 + C_2 u + B_2 u^2 \\ \Omega = A_3 + C_3 u + B_3 u^2 \end{array}\right\},$$

und F_3 seinen Werth beibehalten hat.

Der Uebergang zu einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung wird nun durch die Substitution

$$v = -\frac{\Phi}{F_3}\,\frac{\frac{dw}{du}}{w} \,{}^*$$

vermittelt; man erhält

* Wenn $F_3 = 0$, so ist diese Substitution unbrauchbar, aber auch überflüssig, weil Gleichung 8) in diesem Falle homogene Coefficienten hat.

$$\Phi^2 \frac{d^2 w}{d u^2} + \Phi(\Phi' - \Psi) \frac{d w}{d u} + F_3 \Omega w = 0$$

und diese Gleichung ist von der Form

$$7a)\quad (\alpha + \beta u + \gamma u^2 + \delta u^3)^2 \frac{d^2 w}{d u^2} + (\alpha + \beta u + \gamma u^2 + \delta u^3)(\alpha_1 + \beta_1 u + \gamma_1 u^2) \frac{d w}{d u}$$
$$+ (\alpha_0 + \beta_0 u + \gamma_0 u^2) w = 0,$$

wobei insbesondere

$$\delta = B_2, \quad \gamma_1 = 3 B_2 - B_3,$$

sonach

$$\gamma_1 = 2\delta.$$

Unter dieser Bedingung kann aber die obige Gleichung durch hypergeometrische Functionen integrirt werden, wie im ersten Abschnitt gezeigt worden ist. Mit Gleichung 7a) ist auch Gleichung 8) integrirt, ohne dass dabei eine particuläre Lösung dieser Gleichung ausgezeichnet worden wäre. Denn die Richtungscoefficienten der drei Geraden, welche der Gleichung 8) particulär genügen, sind die singulären Punkte der Differentialgleichung zweiter Ordnung, auf welche man durch die Transformation schliesslich geführt wird.*

Man kann noch einen andern Specialfall der Gleichung

$$K_1\, dx + K_2\, dy + K_3\, (x\, dy - y\, dx) = 0,$$
$$K_i = A_i x^2 + B_i y^2 + C_i xy + D_i x + E_i y + F_i$$

mittelst hypergeometrischer Functionen integriren, der vielleicht an dieser Stelle erwähnt werden darf.

Die vorliegende Differentialgleichung sei geometrisch dadurch ausgezeichnet, dass derselben eine Hyperbel sammt ihren Asymptoten particulär genüge, und man wähle, um die Rechnung einfacher zu gestalten, die Asymptoten als Coordinatenaxen. Die Gleichung der Hyperbel lautet dann $xy = k$ und die der Asymptoten $x = 0$, resp. $y = 0$. Soll der gegebenen Gleichung $x = 0$ und $y = 0$ genügen, so müssen K_1 und K_2 nachstehende Form haben:

$$K_1 = (a_1 x + b_1 y + c_1) y, \quad K_2 = (a_2 x + b_2 y + c_2) x,$$

während K_3 stets in folgender Gestalt vorausgesetzt werden darf:

$$K_3 = a_3 x^2 + b_3 y^2 + c_3 x y,$$

da alle anderen Glieder in K_1 und K_2 eingehen.

Soll nun noch die Hyperbel $xy = k$ genügen, so muss wegen

$$x\, dy + y\, dx = 0$$

$(a_1 x + b_1 y + c_1) - (a_2 x + b_2 y + c_2) - 2(a_3 x^2 + b_3 y^2 + c_3 xy)$ identisch 0

oder

$(a_1 - a_2) x + (b_1 - b_2) y + (c_1 - c_2) - 2(a_3 x^2 + b_3 y^2 + c_3 k)$ identisch 0.

Hieraus folgt

* Eine andere Behandlungsweise der Differentialgleichung 8) findet man im XXVIII. Bande dieser Zeitschrift, S. 54.

$$a_2 = a_1, \quad b_2 = b_1, \quad a_3 = 0, \quad b_3 = 0, \quad c_1 - c_1 - 2c_3 k = 0,$$

so dass die Differentialgleichung einfach lautet

$$9) \quad (a_1 y + b_1 y + c_1) y\, dx + (a_1 x + b_1 y + c_2) x\, dy + c_3\, xy\, (x\, dy - y\, dx) = 0.$$

Aus geometrischen Gründen liegt die Substitution $xy = u$ sehr nahe; denn der Hyperbel $xy = k$ entspricht dann $u = k$, und den Asymptoten $xy = 0$ — als Linienpaar aufgefasst — entspricht $u = 0$. Die neue Differentialgleichung mit den Variabeln u und y wird daher dadurch ausgezeichnet sein, dass ihr zwei parallele Gerade particulär genügen, nämlich die y-Axe und eine im Abstande $k = \frac{c_1 - c_2}{2 c_3}$ von dieser Axe gezogene Parallele. Thatsächlich geht die Gleichung 9), welche auch folgendermassen geschrieben werden kann:

$$(a_1 x + b_1 y)(x\, dy + y\, dx) + c_1 y\, dx + c_2 x\, dy + c_3\, xy\, (x\, dy - y\, dx) = 0,$$

für $xy = u$ über in

$$2 c_3 u (u - k) \frac{dy}{du} + b_1 y^2 - c_3\, uy + a_1 u + c_1 y = 0,$$

und da dieses ein Specialfall von

$$(a + bu + cu^2) \frac{dy}{du} + Au^2 + By^2 + Cuy + Du + Ey + F = 0$$

ist, so kann die vorletzte Gleichung in die Differentialgleichung der Gauss'schen hypergeometrischen Reihe übergeführt werden.*

Genügt also der Differentialgleichung

$$K_1\, dx + K_2\, dy + K_3 (x\, dy - y\, dx)$$

eine Hyperbel mit ihren Asymptoten, so kann man sie durch lineare Substitutionen, d. h. durch eine Verlegung des Coordinatensystems stets auf die Form

$$9) \quad (a_1 x + b_1 y)(x\, dy + y\, dx) + c_1 y\, dx + c_2 x\, dy + c_3\, xy (x\, dy - y\, dx) = 0$$

bringen und dann durch hypergeometrische Functionen integriren.

Am Schlusse dieser Untersuchungen soll noch gezeigt werden, dass auch die Differentialgleichung

$$10) \quad (\alpha + \beta \xi + \gamma \xi^2 + \delta \xi^3) \frac{d\eta}{d\xi} + (\alpha_1 + \beta_1 \xi) \eta^2 + (\alpha_2 + \beta_2 \xi) \eta + (\alpha_3 + \beta_3 \xi) = 0$$

in die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe transformirt werden kann.

Ausgehend von der anfangs betrachteten Gleichung

$$1) \quad x_1 x_2 x_3 \frac{d^2 y}{dx^2} + \left\{ (b_2 + b_3) x_2 x_3 + (b_3 + b_1) x_1 x_3 + (b_1 + b_2) x_1 x_2 \right\} \frac{dy}{dx} - \mu \left\{ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 \right\} y = 0,$$

in welcher

* Vergl. hierüber die Aufsätze des Verfassers im 1. und 6. Heft des XXVII. Jahrganges dieser Zeitschrift.

$$x_k = x - a_k, \quad \mu = 1 - (b_1 + b_2 + b_3),$$

bemerkt man, dass aus dieser in sehr einfacher Weise eine Differentialgleichung erster Ordnung abgeleitet werden kann, wenn man setzt

$$y = e^{\int \frac{\mu\, dx}{\mu + x}} \quad \text{oder} \quad \frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{\mu}{\eta + x}.$$

Es entsteht

$$x_1 x_2 x_3 \left(\frac{d\eta}{dx} + 1 - \mu\right) - \left\{(b_2 + b_3) x_2 x_3 + (b_3 + b_1) x_3 x_1 + (b_1 + b_2) x_1 x_2\right\} (\eta + x)$$
$$+ \left\{b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3\right\} (\eta + x)^2 = 0$$

oder nach gehöriger Reduction

$$x_1 x_2 x_3 \frac{d\eta}{dx} + \left\{\begin{matrix} b_1 x_1 \\ + b_2 x_2 \\ + b_3 x_3 \end{matrix}\right\} \eta^2 + \left\{\begin{matrix} (a_2 + a_3) b_1 x_1 \\ + (a_3 + a_1) b_2 x_2 \\ + (a_1 + a_2) b_3 x_3 \end{matrix}\right\} \eta + \left\{\begin{matrix} a_2 a_3 b_1 x_1 \\ + a_3 a_1 b_2 x_2 \\ + a_1 a_2 b_3 x_3 \end{matrix}\right\} = 0,$$

und dieser Gleichung genügt

$$\eta = \mu \frac{\frac{dy}{dx}}{y} - x,$$

unter y das Integral der Gleichung 1) verstanden.

Die zuletzt aufgestellte Differentialgleichung ist noch sehr speciell; allein man erkennt durch successive Zusammenstellung der Substitutionen, welche für die Integration in Betracht kommen, dass die Gleichung auch dann noch auf die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe zurückgeführt werden kann, wenn die Coefficienten allgemein sind, wie in Gleichung 10).

Am schnellsten überzeugt man sich hiervon auf folgende Weise. Man führe in die Gleichung

$$10) \quad (\alpha + \beta \xi + \gamma \xi^2 + \delta \xi^3) \frac{d\eta}{d\xi} + (\alpha_1 + \beta_1 \xi) \eta^2 + (\alpha_2 + \beta_2 \xi) \eta + (\alpha_3 + \beta_3 \xi) = 0$$

die gebrochenen Substitutionen

$$\xi = \frac{1 + \lambda u}{u}, \quad \eta = \frac{1 + \varkappa v}{v}$$

ein, dann entsteht

$$\left\{\alpha u^3 + \beta u^2 (1 + \lambda u) + \gamma u (1 + \lambda u)^2 + \delta (1 + \lambda u)^3\right\} \frac{dv}{du}$$
$$+ \left\{\begin{matrix} [\alpha_1 u + \beta_1 (1 + \lambda u)](1 + \varkappa v)^2 \\ + [\alpha_2 u + \beta_2 (1 + \lambda u)](1 + \varkappa v) v \\ + [\alpha_3 u + \beta_3 (1 + \lambda u)] v^2 \end{matrix}\right\} = 0,$$

und hierin ist der Factor von u^3

$$\alpha + \beta \lambda + \gamma \lambda^2 + \delta \lambda^3$$

und der Factor von $u v^2$

$$(\alpha_1 + \beta_1 \lambda) \varkappa^2 + (\alpha_2 + \beta_2 \lambda) \varkappa + (\alpha_3 + \beta_3 \lambda).$$

Man sieht, dass durch passende Wahl der Grössen λ und $\varkappa$ diese Factoren annullirt werden können, so dass eine Gleichung von der Form

$$(a+bu+cu^2)\frac{dv}{du}+Au^2+Bv^2+Cuv+Du+Ev+F=0$$

zurückbleibt, die, wie bereits auf S. 156 erwähnt, durch hypergeometrische Functionen integrirt werden kann.

Die Gleichung 10) bleibt der Gestalt nach unverändert, d. h., es tritt in derselben nur eine gewisse Vertauschung der Coefficienten unter sich ein, wenn man an Stelle von ξ oder η die reciproken Werthe $\frac{1}{\xi}$ oder $\frac{1}{\eta}$ setzt. Man kann daher bei der Transformation auch die Substitutionen

$$\xi=\frac{u}{1+\lambda u},\quad \eta=\frac{v}{1+\varkappa v}$$

benutzen, und das ist besonders dann angezeigt, wenn in der Gleichung

$$(\alpha_1+\beta_1\lambda)\varkappa^2+(\alpha_2+\beta_2\lambda)\varkappa+(\alpha_3+\beta_3\lambda)=0$$

die Coefficienten der Unbekannten verschwinden, so dass für $\varkappa$ kein endlicher Werth gefunden wird.

Liegt die einfachere Gleichung

$$(\alpha_0+\beta_0\xi)\frac{d\eta}{d\xi}+(\alpha_1+\beta_1\xi)\eta^2+(\alpha_2+\beta_2\xi)\eta+(\alpha_3+\beta_3\xi)=0$$

vor, auf welche übrigens auch der Specialfall von Gleichung 10), in welchem

$$\alpha+\beta\xi+\gamma\xi^2+\delta\xi^3=(\alpha_0+\beta_0\xi)(\alpha'+\beta'\xi)^2,$$

führt, so lässt man zweckmässig eine Modification in der Transformation eintreten. Man substituire, wie früher,

$$\eta=\frac{1+\varkappa v}{v},$$

so dass entsteht

$$-(\alpha_0+\beta_0\xi)\frac{dv}{d\xi}+(\alpha_1+\beta_1\xi)(1+\varkappa v)^2+(\alpha_2+\beta_2\xi)(1+\varkappa v)v+(\alpha_3+\beta_3\xi)v^2=0,$$

und hier ist der Factor von v^2

$$(\alpha_1+\beta_1\xi)\varkappa^2+(\alpha^2+\beta^2\xi)\varkappa+(\alpha_3+\beta_3\xi).$$

Um die letzte Differentialgleichung direct in eine lineare zweiter Ordnung zu verwandeln, bestimme man $\varkappa$ und einen constanten Proportionalitätsfactor so, dass

$$(\alpha_1+\beta_1\xi)\varkappa^2+(\alpha_2+\beta_2\xi)\varkappa+(\alpha_3+\beta_3\xi)=\varrho(\alpha_0+\beta_0\xi).$$

Diese Gleichung zerfällt in

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1\varkappa^2+\alpha_2\varkappa+\alpha_3&=\alpha_0\varrho\\ \beta_1\varkappa^2+\beta_2\varkappa+\beta_3&=\beta_0\varrho\end{aligned}\right\},$$

mithin nach Elimination von ϱ

$$(\alpha_1\beta_0-\alpha_0\beta_1)\varkappa^2+(\alpha_2\beta_0-\alpha_0\beta_2)\varkappa+(\alpha_3\beta_0-\alpha_0\beta_3)=0.$$

Hieraus ergiebt sich $\varkappa$ und aus einer der vorigen Gleichungen ϱ.

Nunmehr lautet die Differentialgleichung

$$(\alpha_0+\beta_0\xi)\left(-\frac{dv}{d\xi}+\varrho v^2\right)+\Big\{(\alpha_1+\beta_1\xi)2\varkappa+(\alpha_2+\beta_2\xi)\Big\}v$$
$$+(\alpha_1+\beta_1\xi)=0$$

und geht für

$$v=-\frac{1}{\varrho}\,\frac{\frac{dw}{d\xi}}{w}$$

über in

$$(\alpha_0+\beta_0\xi)\frac{d^2w}{d\xi^2}-\Big\{(2\alpha_1\varkappa+\alpha_2)+(2\beta_1\varkappa+\beta_2)\xi\Big\}\frac{dw}{d\xi}$$
$$+\varrho(\alpha_1+\beta_1\xi)w=0.$$

Aus dem Integral dieser sehr bekannten Gleichung* kann man das der vorgelegten Gleichung construiren; man findet für dasselbe unter Berücksichtigung der verwendeten Substitutionen folgenden Ausdruck:

$$\eta=\frac{w'}{\varkappa w'-\varrho w}.$$

Auf weitere Specialfälle der Gleichung 10) gehen wir nicht ein, denn dieselben decken sich mit den Sonderfällen der linearen Gleichungen zweiter Ordnung, auf welche man zurückkommt und welche schon oft ausführlich discutirt worden sind.

---

* Vergl. O. Schlömilch, Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd V, und S. Spitzer, Studien über die Integration linearer Differentialgl. (Wien 1860).

IX.

Einige Sätze über Kegelschnitte.

Von

H. Schroeter

in Breslau.

Hierzu Taf. V Fig. 2 — 5.

Ist ein Dreieck $\mathfrak{ABC}$ und ein Punkt $\mathfrak{M}$ gegeben, so giebt es bekanntlich drei Kegelschnitte, welche $\mathfrak{M}$ zum Mittelpunkt haben und von denen der erste dem Dreieck $\mathfrak{ABC}$ umbeschrieben, der zweite demselben einbeschrieben ist und der dritte das Dreieck zu einem selbstconjugirten hat; nennen wir diese drei Kegelschnitte $\mathfrak{K}_u$, $\mathfrak{K}_i$, $\mathfrak{K}_e$ und bestimmen für jeden das Product der Potenzen der Involutionen auf den beiden Hauptaxen (das Product der Quadrate der Hauptaxen), welche entsprechend P_u, P_i, P_e heissen mögen, so ist bekanntlich, wie **Steiner** angegeben hat*:

$$P_e = 2\, p_1 p_2 p_3\, r,$$
$$P_i = 4\, \pi_1 \pi_2 \pi_3\, r,$$
$$P_u = \frac{p_1^2 p_2^2 p_3^2}{\pi_1 \pi_2 \pi_3}\, r,$$

wo $p_1 p_2 p_3$ die Perpendikel aus $\mathfrak{M}$ auf die Seiten des Dreiecks $\mathfrak{ABC}$, r der Radius des demselben Dreieck umschriebenen Kreises und $\pi_1 \pi_2 \pi_3$ die Perpendikel aus $\mathfrak{M}$ auf die Seiten desjenigen Dreiecks abc bedeuten, dessen Ecken die Mitten der Seiten $\mathfrak{BC}$, $\mathfrak{CA}$, $\mathfrak{AB}$ sind, woraus beiläufig folgt:

$$P_e^2 = P_u \,.\, P_i\,.$$

Es lässt aber das Verhältniss

$$\frac{p_1 p_2 p_3}{\pi_1 \pi_2 \pi_3}$$

verschiedene geometrische Deutungen zu, wenn man zu dem Mittendreieck abc die Polarfiguren aufsucht in Bezug auf die Kegelschnitte

* J. Steiner, Teoremi relativi alle coniche inscritte e circonscritte, in Crelle's Journal f. Math., Bd. XXX S. 97. — Die Beweise dieser Sätze habe ich in dem Anhange der ersten Auflage meiner „Theorie der Kegelschnitte" (Leipzig 1867) gegeben.

$\mathfrak{K}_u$, $\mathfrak{K}_i$, $\mathfrak{K}_e$, welche drei neue Dreiecke bilden. Zwischen den Flächen dieser Dreiecke, der Fläche des gegebenen Dreiecks und der Fläche des von den Berührungspunkten des einbeschriebenen Kegelschnitts gebildeten Dreiecks bestehen nämlich sehr einfache Beziehungen, auf welche Herr G. Fazzari* aufmerksam gemacht und die er durch analytisch-geometrische Rechnungen abgeleitet hat.

Diese und andere Beziehungen ergeben sich unmittelbar aus der Figur durch elementare synthetische Betrachtungen, welche ich mir erlaube, im Folgenden mitzutheilen.

1. Ist ein Dreieck $\mathfrak{ABC}$ und ein Punkt $\mathfrak{M}$ beliebig gegeben, so wird der Kegelschnitt $\mathfrak{K}_c$ eindeutig bestimmt sein, für welchen $\mathfrak{M}$ der Mittelpunkt und $\mathfrak{ABC}$ ein selbstconjugirtes Dreieck ist; von dem Strahle $|\mathfrak{AB}|$ ist $\mathfrak{C}$ der Pol, von dem Strahle $|\mathfrak{AC}|$ ist $\mathfrak{B}$ der Pol, von dem Strahle $|\mathfrak{AM}|$ ist der unendlich entfernte Punkt von $|\mathfrak{BC}|$ der Pol in Bezug auf diesen Kegelschnitt; ist daher $\mathfrak{a}$ die Mitte von $\mathfrak{BC}$, so wird, weil von vier harmonischen Punkten die Polaren allemal vier harmonische Strahlen sind, die Polare von $\mathfrak{a}$ der vierte harmonische Strahl zu $|\mathfrak{AB}|$, $|\mathfrak{AC}|$ und $|\mathfrak{AM}|$ sein.

Ziehen wir daher $|\mathfrak{AM}|$, $|\mathfrak{BM}|$, $|\mathfrak{CM}|$ und construiren zu jedem dieser Strahlen den zugeordneten vierten harmonischen Strahl, so bilden diese ein neues Dreieck $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$, welches die Polarfigur ist des Mittendreiecks $\mathfrak{abc}$ in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{K}_c$.

Das Verhältniss der Flächen der beiden Dreiecke $\mathfrak{ABC}$ und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ zu einander bestimmt sich in folgender Weise.

Seien die Schnittpunkte (Fig. 2):

$$(\mathfrak{AM}, \mathfrak{BC}) = \mathfrak{z}, \quad (\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1, \mathfrak{BC}) = \mathfrak{S},$$

so ist nach bekannten harmonischen Beziehungen

$$\frac{2}{\mathfrak{SA}} = \frac{1}{\mathfrak{SB}_1} + \frac{1}{\mathfrak{SC}_1}$$

und, wenn wir durch $(\mathfrak{ABC})$ die Fläche des Dreiecks $\mathfrak{ABC}$ bezeichnen,

$$\frac{2}{(\mathfrak{ABC})} = \frac{1}{(\mathfrak{B}_1\mathfrak{BC})} + \frac{1}{(\mathfrak{C}_1\mathfrak{BC})};$$

nun verhalten sich aber

$$\frac{(\mathfrak{B}_1\mathfrak{BC})}{(\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{C})} = \frac{\mathfrak{BA}_1}{\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1}, \quad \frac{(\mathfrak{C}_1\mathfrak{BC})}{(\mathfrak{C}_1\mathfrak{BB}_1)} = \frac{\mathfrak{CA}_1}{\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1},$$

$$\frac{(\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{C})}{(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1)} = \frac{\mathfrak{CB}_1}{\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1}, \quad \frac{(\mathfrak{C}_1\mathfrak{BB}_1)}{(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1)} = \frac{\mathfrak{BC}_1}{\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1};$$

* Alcuni Teoremi sulle coniche, pel Dott. Gaetano Fazzari (Napoli 1884).

$$\frac{(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}\mathfrak{C})}{(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1)}=\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{A}_1.\mathfrak{C}\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1.\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1},\quad \frac{(\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}\mathfrak{C})}{(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1)}=\frac{\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1.\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1.\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1},$$

$$\frac{2(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1)}{(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C})}=\frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1.\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}.\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}}+\frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1.\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}.\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}}.$$

Aus dem Dreieck $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}$, welches von der Transversale $|\mathfrak{C}\mathfrak{M}\mathfrak{C}_1|$ geschnitten wird, folgt

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1.\mathfrak{B}\mathfrak{M}.\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}=\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}.\mathfrak{B}_1\mathfrak{M}.\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1$$

und aus dem Dreieck $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}$, welches von der Transversale $|\mathfrak{B}\mathfrak{M}\mathfrak{B}_1|$ geschnitten wird, folgt

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1.\mathfrak{C}\mathfrak{M}.\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1=\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}.\mathfrak{C}_1\mathfrak{M}.\mathfrak{A}_1\mathfrak{B},$$

folglich

$$\frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1.\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}.\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}}=\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{B}_1.\mathfrak{M}\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{M}\mathfrak{B}.\mathfrak{M}\mathfrak{C}}$$

und hieraus

$$\frac{2(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1)}{(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C})}=\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{B}_1.\mathfrak{M}\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{M}\mathfrak{B}.\mathfrak{M}\mathfrak{C}}\left\{\frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}}+\frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}}\right\}.$$

Bezeichnen wir nun für den Augenblick die Abstände der Punkte $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}$ von $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ durch $a_1 b_1 c_1 a$, so haben wir

$$\frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}}=\frac{a_1}{c_1},\quad \frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}}=\frac{a_1}{b_1},$$

$$\frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}}+\frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}}=a_1\left\{\frac{1}{b_1}+\frac{1}{c_1}\right\}=\frac{2a_1}{a}=2\cdot\frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{Z}}{\mathfrak{A}\mathfrak{Z}};$$

bemerken wir aber, dass $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{A}_1$ die Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{Z}$ harmonisch trennen und aus bekannten harmonischen Beziehungen folgt

$$2\cdot\frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{Z}}{\mathfrak{A}\mathfrak{Z}}=\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{M}\mathfrak{A}},$$

so ergiebt sich endlich

$$\frac{2(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1)}{(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C})}=\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{A}_1.\mathfrak{M}\mathfrak{B}_1.\mathfrak{M}\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{M}\mathfrak{A}.\mathfrak{M}\mathfrak{B}.\mathfrak{M}\mathfrak{C}},$$

d. h.:

Die Producte aus den Abständen der Ecken des Dreiecks $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ und des mit ihm perspectiv liegenden Dreiecks $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ von dem Perspectivitätscentrum $\mathfrak{M}$ stehen in demselben Verhältniss zu einander, wie die doppelte Fläche des Dreiecks $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ zu der Fläche von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$.

Dies Verhältniss gestattet nach bekannten harmonischen Beziehungen noch eine andere Ausdrucksweise:

Bezeichnen wir, da $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{Z}$ durch $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{A}_1$ harmonisch getrennt werden, für den Augenblick mit $\mathfrak{m}$ die Mitte zwischen den zugeordneten Punkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{Z}$, so ist

$$\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{M}\mathfrak{A}}=\frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{Z}}{\mathfrak{A}\mathfrak{m}}=\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{Z}}{\mathfrak{M}\mathfrak{m}},$$

d. h., wenn wir das Mittendreieck $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ herstellen:

$$\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{M}\mathfrak{A}} = \frac{p_1}{\pi_1},$$

wo p_1 und π_1 die Abstände des Punktes $\mathfrak{M}$ von den Dreiecksseiten $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ und $|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$ bedeuten. Hieraus folgt:

$$\frac{2(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1)}{(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C})} = \frac{p_1 p_2 p_3}{\pi_1 \pi_2 \pi_3}$$

oder nach dem Obigen

$$\frac{(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1)}{(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C})} = \frac{P_e}{P_i} = \frac{P_u}{P_e}.$$

2. Ist ein Dreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und ein Punkt $\mathfrak{M}$ beliebig gegeben, so wird der Kegelschnitt $\mathfrak{K}_u$ eindeutig bestimmt sein, welcher dem Dreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ umschrieben ist und $\mathfrak{M}$ zum Mittelpunkt hat. Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die Mitten der Seiten $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und man zieht $\mathfrak{M}\mathfrak{a}$, so ist $\mathfrak{M}\mathfrak{a}$ ein Durchmesser des Kegelschnitts und zu der Richtung der Sehne $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ conjugirt. Bezeichnen wir die Schnittpunkte (Fig. 3) mit

$$(\mathfrak{M}\mathfrak{a}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \mathfrak{z}, \quad (\mathfrak{M}\mathfrak{a}, \mathfrak{A}\mathfrak{C}) = \mathfrak{y}, \quad (\mathfrak{B}\mathfrak{y}, \mathfrak{C}\mathfrak{z}) = \mathfrak{D},$$

so wird in dem vollständigen Viereck $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ das Dreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{D}\mathfrak{a}$ das Diagonaldreieck sein, folglich muss $\mathfrak{A}\mathfrak{D}$ durch den zu $\mathfrak{a}$ zugeordneten vierten harmonischen Punkt gehen, und da $\mathfrak{a}$ die Mitte von $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ ist, so muss $\mathfrak{A}\mathfrak{D}$ parallel zu $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ sein, und $\mathfrak{M}\mathfrak{a}$ muss auch $\mathfrak{A}\mathfrak{D}$ halbiren, folglich muss der Kegelschnitt $\mathfrak{K}_u$ durch den vierten Punkt $\mathfrak{D}$ gehen, und da er dem Viereck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ umschrieben ist, so ist das Diagonaldreieck dieses Vierecks ein selbstconjugirtes Dreieck; folglich sind $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ ein Paar conjugirter Punkte auf dem Durchmesser $\mathfrak{M}\mathfrak{a}$, also $\mathfrak{M}\mathfrak{y}.\mathfrak{M}\mathfrak{z}$ die Potenz der Punktinvolution auf diesem Durchmesser. Zu der Sehne $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ ist auch die Gerade $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ parallel; der Pol von $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{K}_u$ liegt also auf dem Durchmesser $\mathfrak{M}\mathfrak{a}$ und zwar in demjenigen Punkte $\mathfrak{A}_2$, für welchen das Rechteck

$$\mathfrak{M}\mathfrak{A}_2 . \mathfrak{M}\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{M}\mathfrak{y} . \mathfrak{M}\mathfrak{z}$$

wird, wo $\mathfrak{a}_2 = (\mathfrak{b}\mathfrak{c}, \mathfrak{M}\mathfrak{a})$ bedeutet.

Nun ergiebt aber die Figur unmittelbar die Verhältnisse aus der ähnlichen Lage

$$\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{y}}{\mathfrak{M}\mathfrak{a}} = \frac{p_2}{\pi_2}, \quad \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{z}}{\mathfrak{M}\mathfrak{a}} = \frac{p_3}{\pi_3}, \quad \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{a}}{\mathfrak{M}\mathfrak{a}_2} = \frac{p_1}{\pi_1},$$

folglich

$$\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{y} . \mathfrak{M}\mathfrak{z}}{\mathfrak{M}\mathfrak{a} . \mathfrak{M}\mathfrak{a}_2} = \frac{p_1 p_2 p_3}{\pi_1 \pi_2 \pi_3} = \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{M}\mathfrak{a}}.$$

Sind daher $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_2$ die Pole der Seiten $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ des Mittendreiecks $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, so liegen dieselben auf den Strahlen $\mathfrak{M}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{M}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{M}\mathfrak{c}$ in solchen Abständen, dass

$$\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{M}\mathfrak{a}} = \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{M}\mathfrak{b}} = \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{M}\mathfrak{c}} = \frac{p_1 p_2 p_3}{\pi_1 \pi_2 \pi_3}$$

ist; das Polardreieck $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2$ des Mittendreiecks $\mathfrak{abc}$ in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{K}_u$ ist also ähnlich und ähnlich-liegend mit $\mathfrak{abc}$, folglich, wie unmittelbar einleuchtet, auch mit dem ursprünglichen Dreieck $\mathfrak{ABC}$, und es verhalten sich die Flächen dieser Dreiecke, wie die Quadrate ähnlich-liegender Strecken. Hieraus folgt

$$\frac{(\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2)}{(\mathfrak{ABC})} = \frac{1}{4}\cdot\frac{p_1^2 p_2^2 p_3^2}{\pi_1^2 \pi_2^2 \pi_3^2} = \frac{P_u}{P_i},$$

also in Worten:

Wird einem Dreieck $\mathfrak{ABC}$ ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}_u$ umschrieben und bestimmt man zu den Mitten der Seiten die Polaren, so bilden diese ein neues Dreieck $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2$, welches mit dem Mittendreieck $\mathfrak{abc}$ ähnlich ist und rücksichtlich des Kegelschnittmittelpunktes $\mathfrak{M}$ als Aehnlichkeitscentrum ähnlich liegt. Das constante Verhältniss analoger Strecken der beiden ähnlichen Dreiecke wird ausgedrückt durch das Verhältniss der Producte aus den drei Abständen des Mittelpunktes $\mathfrak{M}$ von den Seiten des ursprünglichen Dreiecks und denen des Mittendreiecks.

Vergleichen wir dieses Resultat mit dem vorigen in 1), so folgt:

$$(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1)^2 = (\mathfrak{ABC}).(\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2),$$

d. h.:

Ist ein Dreieck $\mathfrak{ABC}$ und ein Punkt $\mathfrak{M}$ gegeben, so giebt es einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}_c$, für welchen $\mathfrak{M}$ der Mittelpunkt und $\mathfrak{ABC}$ ein selbstconjugirtes Dreieck ist, und einen zweiten Kegelschnitt $\mathfrak{K}_u$, für welchen $\mathfrak{M}$ der Mittelpunkt und $\mathfrak{ABC}$ ein einbeschriebenes Dreieck ist; sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die Mitten der Dreiecksseiten $\mathfrak{BC}$, $\mathfrak{CA}$, $\mathfrak{AB}$ und bestimmt man die Polaren von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ in Bezug auf die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{K}_c$ und $\mathfrak{K}_u$, so erhält man zwei neue Dreiecke $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2$; die Fläche des Dreiecks $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ ist das geometrische Mittel aus den Flächen der beiden Dreiecke $\mathfrak{ABC}$ und $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2$.

3. Ist ein Dreieck $\mathfrak{ABC}$ und ein Punkt $\mathfrak{M}$ gegeben, so wird der Kegelschnitt $\mathfrak{K}_i$ eindeutig bestimmt sein, welcher $\mathfrak{M}$ zum Mittelpunkt hat und die Seiten des Dreiecks $\mathfrak{ABC}$ berührt. Die Berührungspunkte dieses Kegelschnitts mit den Dreiecksseiten lassen sich auf folgende Weise finden.

Seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die Mitten der Dreiecksseiten $\mathfrak{BC}$, $\mathfrak{CA}$, $\mathfrak{AB}$; zieht man $\mathfrak{Ma}$ und nennt die Schnittpunkte

$$(\mathfrak{Ma}, \mathfrak{bc}) = \mathfrak{m}, \quad (\mathfrak{Am}, \mathfrak{BC}) = \mathfrak{A}',$$

so ist $\mathfrak{A}'$ der gesuchte Berührungspunkt auf der Seite $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und analog findet man die übrigen.

Denn bekanntlich durchschneiden alle Paare paralleler Tangenten eines Kegelschnitts irgend eine feste Tangente $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ desselben in Punktepaaren einer Involution, deren Mittelpunkt der Berührungspunkt von $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ mit dem Kegelschnitt ist. Projicirt man diese Involution von $\mathfrak{A}$ aus auf die Gerade $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, welche mit $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ parallel läuft, so erhält man auf $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ eine Involution, deren Mittelpunkt die Projection des Mittelpunktes der vorigen Involution ist. (Fig. 4.) Die Tangente $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ des Kegelschnitts und die zu ihr parallele treffen $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ in Punkten, welche von $\mathfrak{A}$ aus auf $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ projicirt die Punkte $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}'$ liefern, und es ist wegen der Parallelität:

$$\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{c}}{\mathfrak{m}\mathfrak{b}'}=\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}\mathfrak{M}};$$

die Tangente $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ des Kegelschnitts und die mit ihr parallele treffen $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ in Punkten, welche, von $\mathfrak{A}$ aus auf $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ projicirt, die Punkte $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}'$ liefern, und es ist wegen der Parallelität:

$$\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{b}}{\mathfrak{m}\mathfrak{c}'}=\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}\mathfrak{M}},$$

folglich

$$\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{c}}{\mathfrak{m}\mathfrak{b}'}=\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{b}}{\mathfrak{m}\mathfrak{c}'} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{m}\mathfrak{c}.\mathfrak{m}\mathfrak{c}'=\mathfrak{m}\mathfrak{b}.\mathfrak{m}\mathfrak{b}',$$

also $\mathfrak{m}$ der Mittelpunkt einer Involution, von welcher $\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{c}\mathfrak{c}'$ zwei Paare conjugirter Punkte sind; mithin wird die Projection von $\mathfrak{m}$ auf $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, d. h. der Punkt $\mathfrak{A}'$ der Mittelpunkt der Involution auf $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, also der gesuchte Berührungspunkt sein.

Da $\mathfrak{m}$ die Mitte von $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ ist, so können wir, sobald ein Kegelschnitt, ein ihm umschriebenes Dreiseit und die Berührungspunkte desselben gegeben sind, den Mittelpunkt des Kegelschnitts folgendermassen finden:

Wird einem Dreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ ein Kegelschnitt einbeschrieben, welcher die Seiten $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ in den Punkten $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ berührt, und sind die Punkte:

$\mathfrak{a}$	*die Mitte von* $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$,	$\mathfrak{a}'$	*die Mitte von* $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$,
$\mathfrak{b}$	„ „ „ $\mathfrak{C}\mathfrak{A}$,	$\mathfrak{b}'$	„ „ „ $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$,
$\mathfrak{c}$	„ „ „ $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$,	$\mathfrak{c}'$	„ „ „ $\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$,

so schneiden sich die drei Verbindungslinien

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}',\ \mathfrak{b}\mathfrak{b}',\ \mathfrak{c}\mathfrak{c}'$$

in dem Mittelpunkte $\mathfrak{M}$ des Kegelschnitts.

Dass auch die drei Verbindungslinien

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}',\ \mathfrak{B}\mathfrak{B}',\ \mathfrak{C}\mathfrak{C}'$$

sich in einem Punkte $\mathfrak{O}$ schneiden, ist zwar bekannt, folgt aber auch hier unmittelbar; denn die Verbindungslinien der Ecken des Dreiecks $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ mit dem Punkte $\mathfrak{M}$ treffen die Gegenseiten in $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$, folglich ist

$$\frac{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}'\mathfrak{c}} \cdot \frac{\mathfrak{b}'\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}'\mathfrak{a}} \cdot \frac{\mathfrak{c}'\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}'\mathfrak{b}} = -1,$$

mithin wegen der Parallelität

$$\frac{\mathfrak{A}'\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}'\mathfrak{B}} \cdot \frac{\mathfrak{B}'\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}'\mathfrak{C}} \cdot \frac{\mathfrak{C}'\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}'\mathfrak{A}} = -1,$$

woraus folgt, dass $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$ sich in einem Punkte $\mathfrak{D}$ schneiden müssen.

Bemerken wir nun (Fig. 5) die Beziehung, welche das von der Transversale $|\mathfrak{D}\mathfrak{B}\mathfrak{B}'|$ geschnittene Dreieck $\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ liefert:

$$\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}' . \mathfrak{C}\mathfrak{B} . \mathfrak{A}'\mathfrak{D}}{\mathfrak{C}\mathfrak{B}' . \mathfrak{A}'\mathfrak{B} . \mathfrak{A}\mathfrak{D}} = +1,$$

woraus folgt

$$1) \qquad \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{A}}{\mathfrak{D}\mathfrak{A}'} = \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{b}'}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}'} \cdot \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}'\mathfrak{c}}$$

und die Beziehung, welche das von der Transversale $|\mathfrak{M}\mathfrak{b}\mathfrak{b}'|$ geschnittene Dreieck $\mathfrak{c}\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$ liefert:

$$\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}' . \mathfrak{c}\mathfrak{b} . \mathfrak{a}'\mathfrak{M}}{\mathfrak{c}\mathfrak{b}' . \mathfrak{a}'\mathfrak{b} . \mathfrak{a}\mathfrak{M}} = 1$$

oder

$$2) \qquad \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{a}}{\mathfrak{M}\mathfrak{a}'} = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}'}{\mathfrak{c}\mathfrak{b}'} \cdot \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}}.$$

Aus 1) und 2) folgt aber durch Division

$$\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{A}}{\mathfrak{D}\mathfrak{A}'} \cdot \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{a}'}{\mathfrak{M}\mathfrak{a}} = -\frac{\mathfrak{c}\mathfrak{b}' . \mathfrak{c}\mathfrak{b}' . \mathfrak{a}'\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}' . \mathfrak{a}\mathfrak{b}' . \mathfrak{a}'\mathfrak{c}} = \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{b}' . \mathfrak{b}\mathfrak{c}'}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}' . \mathfrak{a}\mathfrak{c}'},$$

also durch Fortsetzung und Multiplication

$$\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{A} . \mathfrak{D}\mathfrak{B} . \mathfrak{D}\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}\mathfrak{A}' . \mathfrak{D}\mathfrak{B}' . \mathfrak{D}\mathfrak{C}'} \cdot \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{a}' . \mathfrak{M}\mathfrak{b}' . \mathfrak{M}\mathfrak{c}'}{\mathfrak{M}\mathfrak{a} . \mathfrak{M}\mathfrak{b} . \mathfrak{M}\mathfrak{c}} = \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{b}' . \mathfrak{b}\mathfrak{c}' . \mathfrak{a}\mathfrak{c}' . \mathfrak{c}\mathfrak{a}' . \mathfrak{b}\mathfrak{a}' . \mathfrak{a}\mathfrak{b}'}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}' . \mathfrak{a}\mathfrak{c}' . \mathfrak{b}\mathfrak{c}' . \mathfrak{b}\mathfrak{a}' . \mathfrak{c}\mathfrak{a}' . \mathfrak{c}\mathfrak{b}'} = 1,$$

folglich

$$\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{A} . \mathfrak{D}\mathfrak{B} . \mathfrak{D}\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}\mathfrak{A}' . \mathfrak{D}\mathfrak{B}' . \mathfrak{D}\mathfrak{C}'} = \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{a} . \mathfrak{M}\mathfrak{b} . \mathfrak{M}\mathfrak{c}}{\mathfrak{M}\mathfrak{a}' . \mathfrak{M}\mathfrak{b}' . \mathfrak{M}\mathfrak{c}'}.$$

Bemerken wir aber, dass, wenn $p_1 p_2 p_3$ die Abstände des Punktes $\mathfrak{M}$ von den Seiten des Dreiecks $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und $\pi_1 \pi_2 \pi_3$ die Abstände des Punktes $\mathfrak{M}$ von den Seiten des Mittendreiecks $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ bedeuten,

$$\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{a}}{\mathfrak{M}\mathfrak{a}'} = \frac{p_1}{\pi_1}, \quad \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{b}}{\mathfrak{M}\mathfrak{b}'} = \frac{p_2}{\pi_2}, \quad \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{c}}{\mathfrak{M}\mathfrak{c}'} = \frac{p_3}{\pi_3}$$

ist, so folgt

$$\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{A} . \mathfrak{D}\mathfrak{B} . \mathfrak{D}\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}\mathfrak{A}' . \mathfrak{D}\mathfrak{B}' . \mathfrak{D}\mathfrak{C}'} = \frac{p_1 p_2 p_3}{\pi_1 \pi_2 \pi_3},$$

und da nach 1. das Verhältniss

$$\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{A} . \mathfrak{D}\mathfrak{B} . \mathfrak{D}\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}\mathfrak{A}' . \mathfrak{D}\mathfrak{B}' . \mathfrak{D}\mathfrak{C}'} = \frac{2(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C})}{(\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}')}$$

ist, d. i. gleich dem Verhältniss der doppelten Fläche des Dreiecks $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ zur Fläche des Dreiecks $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$, so folgt

$$\frac{2(\mathfrak{ABC})}{(\mathfrak{A'B'C'})} = \frac{p_1 p_2 p_3}{\pi_1 \pi_2 \pi_3},$$

d. h.:

Wird einem Dreieck $\mathfrak{ABC}$ ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}_i$ einbeschrieben, welcher die Seiten des Dreiecks in den Punkten $\mathfrak{A'B'C'}$ berührt, so verhält sich die doppelte Fläche des Dreiecks $\mathfrak{ABC}$ zur Fläche des Dreiecks $\mathfrak{A'B'C'}$ wie das Product aus den Abständen des Mittelpunktes des Kegelschnitts von den Dreiecksseiten $\mathfrak{BC}$, $\mathfrak{CA}$, $\mathfrak{AB}$ zu dem Product aus den Abständen des Mittelpunktes von den Seiten desjenigen Dreiecks, welches die Mitten der Seiten des Dreiecks $\mathfrak{ABC}$ zu Ecken hat.

Nach der früheren Bezeichnung folgt

$$\frac{(\mathfrak{ABC})}{(\mathfrak{A'B'C'})} = \frac{P_c}{P_i} = \frac{P_u}{P_c}$$

und der Vergleich dieses Resultats mit dem in 1. ergiebt

$$(\mathfrak{ABC})^2 = (\mathfrak{A'B'C'})(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1),$$

d. h.:

Ist ein Dreieck $\mathfrak{ABC}$ und ein Punkt $\mathfrak{M}$ gegeben, so giebt es einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}_c$, für welchen $\mathfrak{M}$ der Mittelpunkt und $\mathfrak{ABC}$ ein selbstconjugirtes Dreieck ist, und einen zweiten Kegelschnitt $\mathfrak{K}_i$, der $\mathfrak{M}$ zum Mittelpunkt hat und die Seiten des Dreiecks $\mathfrak{ABC}$ berührt. Sind $\mathfrak{A'B'C'}$ die Berührungspunkte, $\mathfrak{abc}$ die Mitten der Seiten des Dreiecks $\mathfrak{ABC}$, und nimmt man die Polaren von $\mathfrak{abc}$ in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{K}_c$, so erhält man ein neues Dreieck $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$; die Fläche des Dreiecks $\mathfrak{ABC}$ ist das geometrische Mittel aus den Flächen der beiden Dreiecke $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{A'B'C'}$.

Ebenso leicht lässt sich die aus den vorigen beiden Beziehungen hervorgehende:

$$\frac{(\mathfrak{ABC})}{(\mathfrak{A'B'C'})} = \frac{(\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2)}{(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1)}$$

in Worte kleiden.

4. In Bezug auf den dem Dreieck $\mathfrak{ABC}$ einbeschriebenen Kegelschnitt $\mathfrak{K}_i$, der den Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ hat und die Dreiecksseiten in den Punkten $\mathfrak{A'B'C'}$ berührt, kann man leicht die Pole von den Seiten des Mittendreiecks $\mathfrak{abc}$ finden; denn $\mathfrak{MA'}$ ist ein Durchmesser dieses Kegelschnitts und $\mathfrak{BC}$ die Tangente in einem Endpunkte $\mathfrak{A'}$ dieses Durchmessers; ferner läuft $\mathfrak{bc}$ dieser Tangente $\mathfrak{BC}$ parallel; folglich liegt der Pol $\mathfrak{A}_3$ der Geraden $\mathfrak{bc}$ auf dem Durchmesser $\mathfrak{MA'}$ in einem solchen Abstande von $\mathfrak{M}$, dass $(\mathfrak{MA'})^2$ gleich ist dem Rechteck aus $\mathfrak{MA}_3$ und dem Stück, welches $\mathfrak{bc}$ auf $\mathfrak{MA'}$ von $\mathfrak{M}$ aus abschneidet. Bezeichnen wir also für den Augenblick diesen Schnittpunkt mit

$$(\mathfrak{M}\mathfrak{A}', \mathfrak{b}\mathfrak{c}) = \mathfrak{z},$$

so wird

$$\mathfrak{M}\mathfrak{A}' . \mathfrak{M}\mathfrak{A}' = \mathfrak{M}\mathfrak{A}_3 . \mathfrak{M}\mathfrak{z};$$

nun verhält sich aber

$$\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{A}'}{\mathfrak{M}\mathfrak{z}} = \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{a}}{\mathfrak{M}\mathfrak{a}'} = \frac{p_1}{\pi_1},$$

folglich wird

$$\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{M}\mathfrak{A}'} = \frac{p_1}{\pi_1}$$

und wir erhalten

$$\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{A}_3 . \mathfrak{M}\mathfrak{B}_3 . \mathfrak{M}\mathfrak{C}_3}{\mathfrak{M}\mathfrak{A}' . \mathfrak{M}\mathfrak{B}' . \mathfrak{M}\mathfrak{C}'} = \frac{p_1 p_2 p_3}{\pi_1 \pi_2 \pi_3}.$$

Wir erkennen aber noch eine zweite Eigenschaft des Punktes $\mathfrak{A}_3$, nämlich des Poles von $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{K}_i$; denken wir uns noch durch $\mathfrak{A}$ eine Parallele zu $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ gezogen, so muss der Pol derselben auf dem Durchmesser $\mathfrak{M}\mathfrak{A}'$ liegen, und weil $\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ die Polare von $\mathfrak{A}$ ist, so muss derselbe Pol auch auf $\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ liegen; er ist also der Schnittpunkt

$$(\mathfrak{M}\mathfrak{A}', \mathfrak{B}'\mathfrak{C}').$$

Wir haben nunmehr drei Gerade durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{A}'$ parallel zu $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und nehmen die unendlich entfernte Gerade g_∞ als vierte hinzu; weil $\mathfrak{a}'$ die Mitte zwischen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ ist, so bilden diese vier Geraden ein harmonisches Parallelstrahlenbüschel, folglich die vier Pole dieser Geraden in Bezug auf $\mathfrak{K}_i$ vier harmonische Punkte auf dem Durchmesser $\mathfrak{M}\mathfrak{A}'$; diese Pole sind:

$$(\mathfrak{M}\mathfrak{A}', \mathfrak{B}'\mathfrak{C}'), \quad \mathfrak{A}', \quad \mathfrak{A}_3, \quad \mathfrak{M},$$

und zwar die beiden ersten einander zugeordnet, wie die beiden letzten; wir können demnach den Punkt $\mathfrak{A}_3$ auch so construiren, dass wir auf dem Strahle $\mathfrak{M}\mathfrak{A}'$ den vierten harmonischen, zu $\mathfrak{M}$ zugeordneten Punkt $\mathfrak{A}_3$ aufsuchen, während $\mathfrak{A}'$ und der Schnittpunkt mit $\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ das andere Paar zugeordneter Punkte ist. Bei dieser Construction ergiebt sich infolge des Resultates von 1. das Verhältniss:

$$\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{A}_3 . \mathfrak{M}\mathfrak{B}_3 . \mathfrak{M}\mathfrak{C}_3}{\mathfrak{M}\mathfrak{A}' . \mathfrak{M}\mathfrak{B}' . \mathfrak{M}\mathfrak{C}'} = \frac{2(\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3)}{(\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}')},$$

und wenn wir dieses oben substituiren:

$$\frac{2(\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3)}{(\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}')} = \frac{p_1 p_2 p_3}{\pi_1 \pi_2 \pi_3}.$$

Der Vergleich dieses mit dem in 3. erlangten Resultat zeigt

$$(\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3) = (\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}),$$

d. h.:

Wird einem Dreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ ein Kegelschnitt einbeschrieben und nimmt man von den Mitten der Dreiecksseiten

die Polaren in Bezug auf denselben, so bilden diese ein neues Dreieck $\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3$, welches mit dem ursprünglichen inhaltsgleich ist.

Anmerkung. Verlegt man den Punkt $\mathfrak{M}$ in die Unendlichkeit, so werden die drei Kegelschnitte $\mathfrak{K}_u$, $\mathfrak{K}_i$, $\mathfrak{K}_c$ Parabeln und das Verhältniss $\frac{p_1 p_2 p_3}{\pi_1 \pi_2 \pi_3}$ reducirt sich auf die Einheit, folglich wird das Dreieck $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ doppelt so gross als das Dreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, das Dreieck $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ halb so gross als das Dreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, das Dreieck $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2$ ein Viertel von der Fläche des Dreiecks $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und das Dreieck $\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3$ bleibt, wie im Allgemeinen, mit dem Dreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ inhaltsgleich.

Nimmt man die vier Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{M}$ gleichberechtigt als die Ecken eines vollständigen Vierecks an, so treten sämmtliche oben angestellten Betrachtungen viermal auf und es ergeben sich je vier Kegelschnitte $\mathfrak{K}_c\mathfrak{K}_u\mathfrak{K}_i$, zwischen denen mannigfache Beziehungen obwalten; z. B. ergiebt sich folgende Eigenschaft eines vollständigen Vierecks, die auch *a posteriori* auf elementarem Wege leicht verificirt werden kann:

Sind die drei Diagonalpunkte eines vollständigen Vierecks $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$:

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{C}, \mathfrak{A}\mathfrak{D}) = \mathfrak{x}, \quad (\mathfrak{C}\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\mathfrak{D}) = \mathfrak{y}, \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{C}\mathfrak{D}) = \mathfrak{z},$$

so gilt die metrische Relation:

$$\frac{(\mathfrak{x}\mathfrak{B}.\mathfrak{x}\mathfrak{C} - \mathfrak{x}\mathfrak{A}.\mathfrak{x}\mathfrak{D})(\mathfrak{x}\mathfrak{C}.\mathfrak{x}\mathfrak{A} - \mathfrak{x}\mathfrak{B}.\mathfrak{x}\mathfrak{D})(\mathfrak{x}\mathfrak{A}.\mathfrak{x}\mathfrak{B} - \mathfrak{x}\mathfrak{C}.\mathfrak{x}\mathfrak{D})}{\mathfrak{x}\mathfrak{A}.\mathfrak{x}\mathfrak{B}.\mathfrak{x}\mathfrak{C}.\mathfrak{x}\mathfrak{D}}$$
$$= \frac{(\mathfrak{y}\mathfrak{B}.\mathfrak{y}\mathfrak{C} - \mathfrak{y}\mathfrak{A}.\mathfrak{y}\mathfrak{D})(\mathfrak{y}\mathfrak{C}.\mathfrak{y}\mathfrak{A} - \mathfrak{y}\mathfrak{B}.\mathfrak{y}\mathfrak{D})(\mathfrak{y}\mathfrak{A}.\mathfrak{y}\mathfrak{B} - \mathfrak{y}\mathfrak{C}.\mathfrak{y}\mathfrak{D})}{\mathfrak{y}\mathfrak{A}.\mathfrak{y}\mathfrak{B}.\mathfrak{y}\mathfrak{C}.\mathfrak{y}\mathfrak{D}}$$
$$= \frac{(\mathfrak{z}\mathfrak{B}.\mathfrak{z}\mathfrak{C} - \mathfrak{z}\mathfrak{A}.\mathfrak{z}\mathfrak{D})(\mathfrak{z}\mathfrak{C}.\mathfrak{z}\mathfrak{A} - \mathfrak{z}\mathfrak{B}.\mathfrak{z}\mathfrak{D})(\mathfrak{z}\mathfrak{A}.\mathfrak{z}\mathfrak{B} - \mathfrak{z}\mathfrak{C}.\mathfrak{z}\mathfrak{D})}{\mathfrak{z}\mathfrak{A}.\mathfrak{z}\mathfrak{B}.\mathfrak{z}\mathfrak{C}.\mathfrak{z}\mathfrak{D}}.$$

In den speciellen Fällen eines Kreisvierecks oder eines aus einem Dreieck und seinem Höhenpunkte bestehenden Vierecks zeigt diese Relation bekannte Resultate.

Breslau, den 6. April 1884.

Kleinere Mittheilungen.

VIII. Lineare Construction einer Fläche zweiten Grades aus neun gegebenen Punkten.

(Hierzu Taf. VI Fig. 1—4.)

1.

Eine Fläche zweiten Grades sei durch neun Punkte — 1, 2, ... 9 — gegeben. Durch acht dieser Punkte wird bekanntlich ein Büschel von Flächen zweiten Grades bestimmt, dessen Grundcurve — C^4 — von der vierten Ordnung ist. Wir erhalten die Tangente in einem Punkte P dieser Curve, indem wir in P an zwei Flächen des Büschels die Tangentialebenen construiren und ihre Schnittlinie zeichnen. Diese, als Tangente an C^4 im Punkte P, muss auf allen Tangentialebenen liegen, welche wir in P an die Flächen des Büschels construiren können, also auch auf der Tangentialebene an die Fläche, welche durch die gegebenen neun Punkte geht.

Gehen wir nun aus von den Flächenbüscheln durch die Punkte 1 bis 8 und 2 bis 9 und seien ihre Grundcurven C_{18}^4 und C_{29}^4. Zeichnen wir an letztere in den Punkten 2 und 3 die resp. Tangenten, so bestimmen diese die Tangentialebenen an unsere Fläche in diesen Punkten. Damit kennen wir in jeder Ebene durch 2, 3 und einen weiteren Punkt der Fläche einen Kegelschnitt derselben und zwar durch drei Punkte und die Tangenten in zweien. Letztere sind die Schnittlinien der Ebene mit den erwähnten Tangentialebenen.

Die Durchführung dieser Gedanken erledigt die Construction der Fläche.

2.

Zur Construction der Tangenten in Punkten der Durchdringungscurve zweier Flächen zweiten Grades — F, F^* — bemerken wir Folgendes:

Liegen auf der Sehne g zwei solche Punkte — P und Q — und construiren wir zu g die conjugirten Geraden h, h^* in Bezug auf F, F^*, so sind diese die Schnittlinien der Tangentialebenen in P und Q an F resp. F^*. Nun haben wir oben erwähnt, dass diese Tangentialebenen sich in den Tangenten von Punkten der Durchdringungscurve beider

Flächen schneiden. Folglich sind diese Tangenten die Transversalen aus P und Q zu h und h^*. Wir drücken dies dahin aus:

Die Tangenten in zwei Punkten der Durchdringungscurve zweier Flächen zweiten Grades sind die Transversalen durch diese Punkte zu den Linien, welche der Verbindungslinie beider Punkte in Bezug auf die zwei Flächen conjugirt sind.

Die Linien h, h^* werden im Allgemeinen zu einander windschief sein. Wie leicht zu sehen, treffen sie sich nur dann, wenn g durch eine Ecke des gemeinsamen Quadrupels von Pol und Polarebenen der beiden Flächen geht.

3.

Obige Erörterungen führen zu folgender rein linearer Construction der Fläche zweiten Grades aus neun Punkten:

Wir gehen aus von dem Flächenbüschel durch die Punkte 1 bis 8 und bestimmen zwei Hyperboloide — H, H^* — desselben. Auf H liege die Gerade, welche die Punkte 67 verbindet, auf H^* die Gerade durch die Punkte 7 und 8. Damit sind beide Hyperboloide gegeben. Suchen wir nun in den Punkten 2, 3 — deren Verbindungslinie g sei — die Tangentialebenen an die durch neun Punkte gegebene Fläche zweiten Grades, so haben wir zunächst zu g die conjugirten h, h^* in Bezug auf H, H^* zu construiren.

Zu diesem Zwecke ziehen wir durch 1 die Transversale zu g und $\overline{67}$. Sie treffe g in A_1 und $\overline{67}$ in B_1. Bestimmen wir sodann zu A_1 den vierten harmonischen C_1 in Bezug auf 2, 3 und den vierten harmonischen D_1 in Bezug auf B_1 und 1, so ist die Linie $C_1 D_1$ — sagen wir t_1 — die conjugirte zu $A_1 B_1$ in Bezug auf H (Fig. 2).

Indem wir auf analoge Weise die Transversalen durch 4, 5, 8 zu g und 67 construiren und ihre conjugirten in Bezug auf H, also die Linien t_4, t_5, t_8 bestimmen, erhalten wir drei weitere Gerade von der Beschaffenheit, dass durch eine jede derselben eine Polarebene eines Punktes von g in Bezug auf H geht. Da alle diese Polarebenen ein Büschel bilden, dessen Scheitelkante die zu g conjugirte Gerade h ist, so muss letztere die vier Geraden t_1, t_4, t_5, t_8 schneiden. Diese werden von g getroffen. Es giebt zu ihnen eine zweite Transversale, welche bekanntlich auf lineare Weise construirt werden kann. Diese Transversale ist h.

Eine analoge Construction müssen wir ausführen, um h^* zu erhalten. Wir benutzen dazu das Hyperboloid H^* und ziehen durch 1, 4, 5, 6 die Transversalen zu g und $\overline{78}$. Dann bestimmen wir ihre conjugirten t_1^*, t_4^*, t_5^*, t_6^* in Bezug auf h^*. Letztere Geraden werden — ausser von g — noch von einer zweiten Linie geschnitten. Diese ist h^*. Nun gehen wir über zum Flächenbüschel durch 2 bis 9 und wiederholen für dasselbe die eben durchgeführte Construction. Wir setzen ein Hyperboloid

— R — des Büschels so fest, dass auf ihm 67 liege. Auf einem zweiten — R^* — befinde sich 78.

Dann haben wir durch 4, 5, 8, 9 die Transversalen zu g und 67 zu ziehen und ihre conjugirten in Bezug auf R zu bestimmen. Von letzteren kennen wir bereits t_4, t_5, t_8; es bleibt uns also nur noch t_9 zu construiren. Die Gerade, welche — ausser g — die vier Linien t_4, t_5, t_8, t_9 schneidet, ist r, die conjugirte zu g in Bezug auf R.

Wenden wir uns zum Hyperboloid R^*, so müssen wir die Transversalen durch 4, 5, 6, 9 zu g und $\overline{78}$ und ihre conjugirten in Bezug auf R^* construiren. Zu letzteren gehören die bereits bekannten Geraden t_4^*, t_5^*, t_6^*. Indem wir noch t_9^* bestimmen, so ist r^* die Transversale zu t_4^*, t_5^*, t_9^*, welche nicht mit g zusammenfällt.

Ziehen wir endlich durch 2, resp. 3 zu hh^* und rr^* die Transversalen e_2^h, f_2^r und e_3^h, f_3^r, so bestimmen diese die gesuchten Tangentialebenen in 2 und 3 an unsere Fläche.

In Fig. 1 ist diese Construction für Grund- und Aufriss durchgeführt. Dabei ist die Ebene durch 1, 2, 3 als Aufrissebene angenommen und die Grundrissebene geht durch 7 und steht senkrecht zu 23. Es hat dies den Vortheil, dass die Grundrisse der Geraden t in den Linien aus $2'$ nach $1'$, $4'$, ... liegen. Nachdem wir sodann die Aufrisse der t — nach der in Fig. 2 gegebenen Skizze — construirt, zeichnen wir die Geraden h, r. Wie dies geschieht, ist in Fig. 4 dargestellt, wo die vier Geraden t_1, t_4, t_5, t_8 gegeben und h gesucht wird. Wir nehmen zu diesem Zwecke auf t_4 zwei Punkte A, B an und ziehen durch sie die Transversalen zu $t_1 t_5$, welche t_5 in A_1 resp. B_1 schneiden sollen. Dann construiren wir die Transversalen durch A und B zu t_8, t_5, sowie ihre Schnittpunkte A_8, B_8 mit t_5. Damit sind auf t_5 zwei projectivische Reihen bestimmt, für welche G, der Schnittpunkt von g mit t_5, ein Doppelelement ist. Entsprechende Paare der Reihen sind $A_1 A_5$ und $B_1 B_5$. Construiren wir ihren zweiten Doppelpunkt H, so geht durch ihn h. Analoge Reihen ergeben auf t_5 die Punkte R, H^*, R^*, durch welche die resp. Geraden r, h^*, r^* gehen. Die Tangentialebenen T_2, T_3 endlich in 2 und 3 an unsere Fläche schneiden die Aufrissebene in t_2, t_3. Diese Linien sind Tangenten in 2 und 3 an den Kegelschnitt K^2 unserer Fläche, der in der Aufrissebene liegt. Somit ist dieser Kegelschnitt bestimmt und seine weiteren Punkte können auf bekannte Weise gefunden werden.

4.

Veranschaulichen wir uns nun die gegenseitige Lage der Constructionslinien.

Wir haben zehn Transversalen t zu g. Unter ihnen liegen t_1, t_1^* in einer Ebene durch 1 und g. Weiter befinden sich in Ebenen durch

g die Geraden t_4, t_4^* und der Punkt 4, ferner t_5, t_5^*, 5; t_9, t_9^*, 9; t_8, 8 und endlich t_6^*, 6.

h ist eine Transversale zu $t_1 t_4 t_5 t_8$, r eine solche zu $t_4 t_5 t_8 t_9$. Die Linien $t_4 t_5 t_8$, welche im Allgemeinen zu einander windschief sind, bestimmen ein Hyperboloid, auf dem g liegt. t_1 resp. t_9 schneiden dieses Hyperboloid — ausser in g — noch in je einem Punkte. Die Transversalen durch diese Punkte zu $t_4 t_5 t_8$ sind die Geraden h und r. Folglich sind dies ebenfalls Erzeugende des erwähnten Hyperboloids. Daraus schliessen wir, dass h und r zu einander windschief sind und dass bei jeder beliebigen Projectionsmethode die Projectionen von g, t_4, t_5, t_8, h, r einen Kegelschnitt umhüllen.

Ein analoger Gedankengang ergiebt, dass g, t_4^*, t_5^*, t_6^*, h^*, r^* auf einem Hyperboloid liegen. Also sind auch $h^* r^*$ zu einander windschief und die Projectionen obiger sechs Linien sind Tangenten eines Kegelschnittes.

Tritt bei Durchführung der Construction der Fall ein, dass hh^* oder rr^* sich schneiden, so befinden sich nach der Schlussbemerkung von 2. die Hyperboloide HH^* oder RR^* in Bezug auf g in specieller Lage, ohne dass dies auf die allgemeine Lage der Punkte der gegebenen Fläche Einfluss hätte.

Anders ist dies, wenn h und r sich schneiden. Dann müssen durch ihren Schnittpunkt S zwei der Geraden t_4, t_5, t_8 gehen. Daraus schliessen wir, dass diese zwei Geraden mit g in einer Ebene liegen, in der sich auch die dem Index der t correspondirenden Punkte der Fläche zweiten Grades befinden.

Sind speciell t_4, t_5 die Geraden, welche sich in S treffen, so wissen wir, dass diese mit g und t_4^* resp. t_5^* in einer Ebene liegen. Also werden letztere Geraden sich ebenfalls in der Ebene Sg befinden und durch ihren Schnittpunkt S^* müssen h^* und r^* gehen.

Treffen sich in S die drei Geraden t_4, t_5, t_8, so folgt, dass diese und also auch die Punkte 4, 5, 8 mit 23 in einer Ebene liegen.

Finden wir, dass h, r und h^*, r^* sich in einem Punkte S schneiden, so gehen durch ihn und 2 resp. 3 die Geraden e_2^h, e_2^r und e_3^h, e_3^r. Daraus schliessen wir, dass sich sämmtliche t und t^* in S treffen müssen. Es liegen daher die Punkte 4, 5, 6, 8 mit 23 in einer Ebene. Aus der ersteren — sagen wir 4, 5, 6 — können wir S bestimmen. Soll dann auch t_8 durch S gehen, so muss sich 8 mit 2, 3, 4, 5, 6 auf einem Kegelschnitt befinden. Für denselben ist S Pol und g die zugehörige Polare.

Wir fassen das Erörterte dahin zusammen:

Schneidet h die Gerade r oder h^* r^*, so deutet dies darauf hin, dass die gegebenen neun Punkte der Fläche sich nicht in allgemeiner Lage befinden.

5.

Wir wollen nun hervorheben, wie die allgemeine Construction sich in einigen speciellen Fällen gestaltet.

a) Nehmen wir an, dass von den neun gegebenen Punkten vier in einer Ebene P liegen. Indem wir die oben eingeführte Bezeichnungsweise beibehalten, benennen wir die erwähnten vier Punkte mit 2, 3, 4, 5 und bestimmen die Tangentialebene in 2. Dabei ergiebt sich, dass $t_4 t_5$, $t_4^* t_5^*$, also auch ihre resp. Schnittpunkte S, S^* in P liegen. Kennen wir dieselben, so haben wir aus S die Transversalen zu $t_1 t_8$ und zu $s_8 s_6$ zu ziehen. Dies sind die Linien h und r. h^* und r^* aber erhalten wir als Transversalen aus S^* zu $t_1^* t_6^*$ und zu $t_8^* t_9^*$. Ziehen wir dann $e_2^h e_2^r$, so schneidet die Ebene dieser Geraden p in einer Tangente des Kegelschnittes durch 2345. Damit ist dieser Kegelschnitt bestimmt und die Construction der Fläche ist auf Bekanntes zurückgeführt.

b) Sei insbesondere die gegebene Fläche ein Hyperboloid und kennen wir von demselben eine Gerade l und sechs Punkte, so führen wir die Construction auf die vorhergehende zurück. Wir legen durch l und einen der sechs Punkte — sagen wir 2 — eine Ebene P und bestimmen in 2 die Tangentialebene an die Fläche. Sie schneidet P in einer zweiten Geraden derselben. Wir wählen also auf l die Punkte 3, 4, 5 und bestimmen S, S^*. Wir können nun über diese Wahl so bestimmen, dass SS^* ein harmonisches Paar in Bezug auf 23 ist. Wir erreichen dies auf folgende Weise. Seien B_6, B_8 die Schnittpunkte von 67 und 78 mit der Ebene P. Wir ziehen $\overline{2B_6}$ und $\overline{2B_8}$, welche Linien l in L_6 und L_8 treffen sollen. Der Schnittpunkt der Verbindungslinien $L_6 B_8$ und $L_8 B_6$ sei E. Dann nehmen wir $\overline{E2}$ als die Verbindungslinie von 2 und 3 an, so dass 3 im Schnittpunkt von $\overline{E2}$ mit l liegt. Setzen wir dann S' auf 23 beliebig fest, bestimmen wir daraus 4, 5 in l, so finden wir weiter, dass S^* der vierte harmonische zu S in Bezug auf 23 ist (Fig. 3). Nun construiren wir weiter, wie im Falle *a)*.

c) Geben wir von der Fläche zweiten Grades die Tangentialebene T in einem ihrer Punkte — etwa in 3 — und ausserdem noch sieben Punkte, so construiren wir nach der allgemeinen Methode die Tangentialebene in einem der letzteren Punkte. Eine Vereinfachung der Construction ergiebt sich dabei durch folgende Bemerkung: Haben wir h bestimmt, so wissen wir, dass e_3^h von h und h^* geschnitten wird. Nun liegt e_3^h in T, geht durch Punkt 3 und den Schnittpunkt von h mit T. Wir können e_3^h also leicht construiren und finden dann h^* als eine Transversale zu e_3^h und zu dreien der t^* — sagen wir zu t_4^*, t_5^*, t_6^*.

In analoger Weise werden wir aus r und T die Gerade e_3^r bestimmen und erhalten r^* als die Transversale zu e_3^r, $t_4^* t_5^* t_6^*$. Wir brauchen also s_1' und s_9^* nicht zu construiren.

6.

Schliesslich wollen wir den Fall besprechen, in dem zwei der gegebenen neun Punkte der Fläche — etwa 2, 3 — imaginär sind und durch eine elliptische Involution $(x y x_1 y_1)$ auf g bestimmt werden.

Wir construiren die Tangentialebenen in 2 und 3. Dabei erhalten wir die t, h, r, h^* und r^* reell. Denn die bei Bestimmung der t auftretenden Punkte $A_1 C_1 \ldots$ sind harmonische Paare in Bezug auf 23, also Paare der Involution, durch welche uns 23 gegeben ist.

Es handelt sich mithin nur darum, die Transversalen $e_2^h e_2^r$, $e_3^h e_3^r$ richtig zu interpretiren. Bleiben wir zunächst bei der Construction von $e_2^h e_3^h$. Wir legen dazu durch h und h^* Ebenen nach 2 und 3. Diese schneiden sich in den erwähnten Transversalen. Da aber 2 und 3 imaginär sind, so werden auch die Ebenen aus h und h^* nach 2 und 3 imaginär sein. Wir bestimmen sie durch die elliptischen Ebeneninvolutionen aus h und h^* über der Involution $(x y x_1 y_1)$. Die durch 2 und 3 gehenden Schnittlinien dieser Ebenen sind rein imaginäre Gerade und wir suchen von ihnen weitere Punktepaare auf reellen Geraden anzugeben.

Die Ebeneninvolutionen aus h und h^* schneiden letztere Geraden in je vier Punkten, deren Doppelverhältniss gleich dem von $(x y x_1 y_1)$ ist. Also bestimmt jede dieser Punktgruppen eine elliptische Involution und die Doppelpunkte dieser Involutionen liegen auf $e_2^h e_3^h$, d. h. es sind die Schnittpunkte letzterer Geraden mit h und h^*. Wir können dies auch so ausdrücken: Die Transversalen $t_{(xy\ldots)}$ aus $x y x_1 y_1$ zu h und h^* treffen h und h^* in je zwei Paaren von elliptischen Involutionen, durch deren Doppelpunkte $e_2^h e_3^h$ gehen müssen. Nun bestimmen g, h, h^* die eine Schaar eines Hyperboloids, zu dessen anderer Schaar die Transversalen $t_{(xy\ldots)}$ gehören. Letztere schneiden auf jeder weiteren Geraden der ersten Schaar eine Gruppe von vier Punkten aus, deren Doppelverhältniss gleich dem von $(x y x_1 y_1)$ ist. Also bestimmt jede solche Gruppe eine elliptische Involution, deren Doppelpunkte auf $e_2^h e_3^h$ liegen.

Auf analoge Weise finden wir, dass g, r, r^* Gerade einer Schaar eines Hyperboloids H^r sind, dessen andere Schaar die Transversalen aus $(x y x_1 y_1)$ zu $r r^*$ enthält. Es werden auf $r r^*$ und auf jeder weiteren Geraden der ersten Schaar durch diese vier Transversalen zwei Paare einer elliptischen Involution ausgeschnitten, welche zwei Punkte auf $f_2^r f_3^r$ bestimmt.

Nun können wir von $e_2^h e_3^h$ und von $f_2^r f_3^r$ beliebig viele Punktepaare bestimmen.

Wir brauchen aber Paare, welche in derselben Ebene liegen. Daher suchen wir zwei sich schneidende Gerade m und n, von denen eine der Schaar g des Hyperboloids H^h und die andere der Schaar g des Hyperboloids H^r angehört. Auf der einen liegt ein imaginäres Punktepaar der Geraden $e_2^h e_3^h$, auf der andern ein solches der Geraden $f_2^r f_3^r$. Verbinden wir die imaginären Punkte auf $e_2^h f_2^r$ und auf $e_3^h f_3^r$ mit einander, so werden diese Verbindungslinien durch eine elliptische Strahleninvolution mit reellem Scheitel S bestimmt. Zugleich sind sie die Schnittlinien der Ebene $\overline{mn}$ mit den Tangentialebenen in 2 und 3. Mithin ist S ein Punkt der Schnittlinie dieser Tangentialebenen.

Indem wir ein zweites sich schneidendes Paar von Geraden der Schaar g der Hyperboloide H^h resp. H^r construiren, erhalten wir einen zweiten Punkt S. Die Verbindungslinie s der zwei Punkte S ist die Schnittlinie der beiden imaginären Tangentialebenen. Sie ist eine gemeinsame Transversale zu den vier rein imaginären Geraden $e_2^h e_3^h$, $f_2^r f_3^r$ und die conjugirte zu g in Bezug auf unsere gegebene Fläche zweiten Grades.

Jede Ebene P durch g und einen Punkt der Fläche schneidet letztere in einem Kegelschnitte, für den der Schnittpunkt von P mit s der Pol zu g ist. Da wir überdies die Involution harmonischer Pole (xyx_1y_1) auf g kennen, so ist dieser Kegelschnitt bestimmt und die Construction der Fläche erledigt.

Zürich, den 15. Nov. 1883. Dr. C. Beyel.

IX. Ueber das gemischte Kegelschnittbüschel.

Die erste Andeutung über dasjenige Gebilde, welches im Folgenden gemischtes Büschel genannt wird und aus solchen Kegelschnitten besteht, welche durch drei Punkte gehen und eine Gerade berühren, findet man bei Steiner in der „Systematischen Entwickelung § 59: Ueber Abhängigkeit einiger Systeme verschiedenartiger Figuren von einander."

Doch geht Steiner nicht näher auf diesen Gegenstand ein, welcher sodann von Schröter wieder aufgenommen wurde in seiner „Theorie der Kegelschnitte".

Das Folgende ist eine Zusammenstellung der wenigen bisher über das gemischte Büschel bekannt gewordenen Sätze mit Hinzufügung einer Anzahl neuer.

I.

Um ein gemischtes Büschel zu construiren, dessen Grundgerade g und dessen Grundpunkte $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ sind, kann man zwei Netze annehmen, welche diese drei Punkte, von denen zwei nicht reell zu sein brauchen, zu Tripelpunkten haben.

Die conjugirten zu den Punkten $\mathfrak{p}$ der Geraden g bilden einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}'$, der durch die Tripelpunkte geht. Eine Tangente von $\mathfrak{K}'$ sei t'. Die zu ihren Punkten conjugirten bilden einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, welcher durch die Tripelpunkte geht und g berührt. Lassen wir t' auf $\mathfrak{K}'$ rollen, so durchläuft $\mathfrak{K}$ das gemischte Büschel.

II.

Anschaulicher als jene Erzeugungsart ist diese: Man wähle die Seiten des Grunddreiecks $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$, von denen zwei imaginär sein können, und die Gerade g zum Grundvierseit einer gewöhnlichen Kegelschnittschaar. Von einem Punkte $\mathfrak{p}$ der Geraden g ziehe man die zweiten Tangenten an alle Individuen der Schaar. Die Berührpunkte dieser Tangenten bilden einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, welcher durch die Punkte $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ geht und g in $\mathfrak{p}$ berührt. Bewegt sich $\mathfrak{p}$ auf g, so durchläuft $\mathfrak{K}$ das gemischte Büschel. Mithin:

III.

Die Individuen eines gemischten Büschels erfüllen dieselben bekannten Felder der Ebene, welche von derjenigen Kegelschnittschaar bestrichen werden, welche die Grundgerade g und die Seiten des Grunddreiecks berührt. Diese vier Geraden sollen zusammen das Grundvierseit des gemischten Büschels heissen.

IV.

Je nachdem man eine Seite eines Vierseits zur Grundgeraden und die Ecken des übrig bleibenden Dreiseits zu Grundpunkten wählt, erhält man vier verschiedene gemischte Büschel, welche dieselben Felder der Ebene erfüllen und conjugirt heissen sollen.

V.

Bekanntlich giebt es in einem gemischten Büschel zwei Individuen, welche durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{p}$ gehen. Die Reellität der beiden Individuen hängt nach III davon ab, ob der Punkt $\mathfrak{p}$ in einem Felde der Ebene liegt, welches von dem gemischten Büschel bestrichen wird, oder nicht.

Die Entscheidung über die Reellität der vier Individuen des gemischten Büschels, welche bekanntlich von einer beliebigen Geraden berührt werden, lässt sich hier nicht bequem geben, denn diese Frage gehört naturgemäss in die Betrachtung derjenigen Kegelschnitte, welche zwei Gerade berühren und durch zwei Punkte gehen.

VI.

In Bezug auf die Gattung der Kegelschnitte des gemischten Büschels ist bereits von Schröter a. a. O. das Wichtigste gesagt worden, nämlich: Es kommen im Allgemeinen zwei Gruppen Ellipsen und zwei

Gruppen Hyperbeln vor, deren Uebergänge durch vier Parabeln vermittelt werden. Ausserdem sind drei Linienpaare vorhanden, nämlich je eine Diagonale des Grundvierseits und diejenige Seite des Grunddreiecks, welche mit der Diagonale nicht durch denselben Grundpunkt geht. Ferner kommen noch zwei gleichseitige Hyperbeln vor.

Indessen lässt sich noch Folgendes hinzufügen:

1. Liegen die Grundpunkte auf verschiedenen Seiten der Grundgeraden, so besteht das gemischte Büschel nur aus Hyperbeln.

2. Liegen alle Grundpunkte auf derselben Seite der Grundgeraden und ist diese einer Seite des Grunddreiecks parallel, so fallen von den erwähnten vier Parabeln zwei zusammen; es müssten also im Ganzen eigentlich drei Parabeln vorhanden sein. Aber, indem jene beiden Parabeln coincidiren, arten sie zugleich in ein Paar paralleler Geraden aus, so dass im Ganzen nur zwei wirkliche Parabeln übrig bleiben. Gleichzeitig verschwindet die eine Gruppe Ellipsen, während die beiden Gruppen Hyperbeln erhalten bleiben. Auch fallen zwei von den Feldern der Ebene zusammen, welche von dem gemischten Büschel frei gelassen werden.

3. Die beiden gleichseitigen Hyperbeln decken einander, wenn die Grundgerade durch den Höhenpunkt des Grunddreiecks geht. Ist dieses nicht der Fall, so ist über die Reellität der beiden gleichseitigen Hyperbeln nach V zu entscheiden.

4. Ist die Grundgerade unendlich entfernt, so besteht das gemischte Büschel nur aus Parabeln.

VII.

Die Individuen des gemischten Büschels lassen sich in Paare ordnen, welche entweder

1. einander in einem Grundpunkte $\mathfrak{A}_1$ berühren, oder
2. deren vierter Schnittpunkt entweder auf einem beliebigen festen durch die drei Grundpunkte gehenden Kegelschnitte, oder
3. auf einer beliebigen festen durch einen Grundpunkt gehenden Geraden liegt.

Die Paare jeder dieser drei Anordnungen berühren die Grundgerade in conjugirten Punkten einer Involution.

VIII.

Ein festes Individuum $\mathfrak{K}$ des gemischten Büschels hat mit jedem Paare einer der in der vorigen Nummer genannten Anordnungen zwei Punkte gemein, deren Verbindungslinie durch einen festen Punkt $\mathfrak{P}$ geht.

IX.

Durchläuft der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ der vorigen Nummer das gemischte Büschel und nimmt man für die erste Anordnung der Paare in Nr. VII in Bezug auf jedes $\mathfrak{K}$ die Polare des entsprechenden Punktes $\mathfrak{P}$, so umhüllt diese einen Kegelschnitt, welcher die drei Diagonalen des Grund-

vierseits berührt, und zwar die nicht durch $\mathfrak{A}_1$ gehenden in ihren Schnittpunkten mit der Grundgeraden.

X.

Die Enveloppe der Verbindungslinie derjenigen beiden Punkte, in welchen ein Individuum des gemischten Büschels zwei feste Gerade l_1, l_2 trifft, die durch zwei Grundpunkte $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ gehen, ist ein Kegelschnitt K.

Wir wollen die Seiten des Grunddreiecks nach den Gegenecken durch a_1, a_2, a_3 bezeichnen, während die Diagonalen des Grundvierseits je nach dem Grundpunkt, durch welchen sie gehen, d_1, d_2, d_3 heissen sollen. Dann gehört der Grundpunkt $\mathfrak{A}_3$ dem Kegelschnitt K an und d_3 ist seine Tangente. Ferner sind

$$(l_1 d_2),\ (l_2 d_1);\quad (l_1 g),\ (l_2 g)$$

vier Punkte von K. Die Tangenten des ersten dieser beiden Punktepaare gehen bez. durch $(a_2 l_2)$, $(a_1 l_1)$. Hierdurch ist K mehr als bestimmt.

XI.

Ein durch zwei Grundpunkte $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ gehender fester Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ ist gegeben. Die Enveloppe der Geraden, welche die Schnittpunkte verbindet, die ein Individuum des gemischten Büschels auf $\mathfrak{K}$ markirt, ist ein Kegelschnitt K, welcher d_3 in $\mathfrak{A}_3$ berührt. Ferner geht K durch die Schnittpunkte von $\mathfrak{K}$ mit a_1, a_2. Die Tangenten dieser Punkte gehen durch diejenigen Punkte, in welchen $\mathfrak{K}$ bez. von d_2, d_1 getroffen wird. Ausserdem geht K durch die Schnittpunkte von g und $\mathfrak{K}$. Hierdurch ist K mehr als bestimmt.

XII.

Zwei von einem Grundpunkte $\mathfrak{A}_1$ ausgehende feste Gerade l, l' werden von den Individuen des gemischten Büschels in je zwei Punkten getroffen, deren Verbindungslinie eine Curve vierter Classe fünfter Ordnung umhüllt. Dieselbe hat die Geraden l, l' zu Doppeltangenten und a_1 zur Rückkehrtangente. Ausserdem berührt die Curve diejenigen beiden Diagonalen des Grundvierseits, welche nicht durch $\mathfrak{A}_1$ gehen.

Um die Curve näher zu charakterisiren, verbinde man $\mathfrak{A}_2$ mit dem Schnittpunkte $\mathfrak{l}$ von g und l, und $\mathfrak{A}_3$ mit dem Schnittpunkte $\mathfrak{l}'$ von g und l'. (Hier und im Folgenden kann man auch l und l' vertauschen.) Dann construire man denjenigen Kegelschnitt K, welcher die erhaltenen beiden Geraden und ausserdem a_1, l und l' berührt. Die Verbindungslinien von $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ bez. mit den Schnittpunkten von K und a_2, a_3 treffen die Doppeltangenten l', l in ihren Berührpunkten. Der Wendepunkt der Rückkehrtangente $\mathfrak{A}_1$ ist ihr Schnittpunkt mit der Grundgeraden. Die Grundpunkte $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ gehören der Curve an, und ihre Tangenten gehen bez. durch die Punkte, in welchen l, l' von K berührt werden. Die Doppeltangenten l, l' werden in den Punkten von der Curve geschnitten, wo sie bez. von $\mathfrak{A}_3\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{A}_2\mathfrak{l}$ getroffen werden.

XIII.

Die Polaren eines festen Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf die Individuen des gemischten Büschels umhüllen einen Kegelschnitt K. Die beiden Tangenten, welche sich von $\mathfrak{P}$ an K ziehen lassen, berühren in $\mathfrak{P}$ diejenigen beiden Individuen des gemischten Büschels, welche durch $\mathfrak{P}$ gehen. Drei weitere Tangenten von K ergeben sich mit Hilfe der Linienpaare des gemischten Büschels.

Befindet sich $\mathfrak{P}$ auf der Grundgeraden, so ist das Grunddreieck in Bezug auf K ein Tripeldreieck.

Liegt $\mathfrak{P}$ auf einer Seite a_1 des Grunddreiecks, so gehen die Polaren von $\mathfrak{P}$ durch den vierten harmonischen Punkt, welcher in Bezug auf $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ dem $\mathfrak{P}$ zugeordnet ist.

XIV.

Der Ort der Pole einer festen Geraden l in Bezug auf die Individuen des gemischten Büschels ist im Allgemeinen eine Curve vierter Ordnung sechster Classe, welche also drei Doppelpunkte hat. Construirt man auf einer Seite des Grunddreiecks zu dem Schnittpunkt derselben mit l und zu den beiden Grundpunkten als conjugirten den vierten harmonischen, so ist das ein Doppelpunkt der Curve. Es ist leicht, noch sieben Punkte derselben anzugeben. Nämlich die Curve geht durch diejenigen vier Punkte, in welchen l von Individuen des gemischten Büschels berührt wird, und durch die drei Schnittpunkte der Grundgeraden mit den Seiten des Grunddreiecks.

Geht die Gerade l durch einen Grundpunkt $\mathfrak{A}_1$, so bleibt die Curve von der vierten Ordnung und berührt l in $\mathfrak{A}_1$ von beiden Seiten. Ausserdem ist der zu dem Schnittpunkt von l und a_1 in Bezug auf $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ zugeordnete vierte harmonische Punkt ein Doppelpunkt der Curve mit stets reellen Tangenten. Die Curve geht noch durch die Schnittpunkte der Grundgeraden und der Seiten des Grunddreiecks.

Ist die Gerade l eine Diagonale des Grundvierseits, welche z. B. durch den Grundpunkt $\mathfrak{A}_1$ geht, so ist der Ort ihrer Pole eine Curve dritter Ordnung vierter Classe, welche l in $\mathfrak{A}_1$ berührt und durch den Schnittpunkt von l und a_1 geht. Der vierte harmonische zu diesem Schnittpunkt in Bezug auf die Grundpunkte $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ ist der Doppelpunkt der Curve und hat stets zwei reelle Tangenten. Die Curve geht noch durch die Schnittpunkte von g mit a_2, a_3.

Fällt die Gerade l mit einer Seite a_1 des Grunddreiecks zusammen, so ist der Ort ihrer Pole ein Kegelschnitt, welcher die Seiten des Grunddreiecks berührt und zwar a_2, a_3 in ihren Schnittpunkten mit der Grundgeraden g.*

* Vergl. Hearn, Researches on curves of the second order, London 1846, S. 39.

XV.

Von einem festen Punkte $\mathfrak{P}$ aus ziehe man einen beliebigen Strahl p, der die Grundgerade g des gemischten Büschels in einem Punkte $\mathfrak{g}$ treffen möge. In $\mathfrak{g}$ wird die Grundgerade von einem Kegelschnitt des gemischten Büschels berührt, welcher von p in einem zweiten Punkte $\mathfrak{p}$ geschnitten wird. Während sich p um $\mathfrak{P}$ dreht, beschreibt $\mathfrak{p}$ eine Curve dritter Ordnung vierter Classe, welche $\mathfrak{P}$ zum Doppelpunkt hat und durch die sechs Ecken des Grundvierseits geht. Mithin ist die Curve dieselbe für die vier conjugirten gemischten Büschel. Die Tangenten des Doppelpunktes gehen durch die Asymptotenpunkte desjenigen Punktsystems, welches auf g von demjenigen Kegelschnittbüschel fixirt wird, dessen Grundpunkte $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{P}$ sind.

XVI.

Von dem polar gegenüberstehenden Satze heben wir folgenden besondern Fall heraus, welchen Schläfli fand und Steiner* veröffentlichte. Man denke sich die Kegelschnitte, welche die Seiten eines Dreiecks berühren und durch den Höhenpunkt desselben gehen, und construire für jeden Kegelschnitt zu der Tangente des Höhenpunktes die parallele. Letztere umhüllt diejenige dreispitzige Hypocycloide, welche die Seiten und Höhen des Dreiecks berührt.

XVII.

Liegt der in Nr. XV erwähnte Punkt $\mathfrak{P}$ auf einer Seite des Grunddreiecks, z. B. auf a_1, so beschreibt $\mathfrak{p}$ einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, welcher a_1 in $\mathfrak{P}$ berührt und durch die Ecken des von a_2, a_3 und g gebildeten Dreiseits geht. Bewegt sich $\mathfrak{P}$ auf a_1, so durchläuft $\mathfrak{K}$ dasjenige conjugirte gemischte Büschel, welches a_1 berührt. Nimmt man statt a_1 die Geraden a_2, a_3, so erhält man die übrigen beiden der vier conjugirten Büschel.

XVIII.

Für ein Individuum $\mathfrak{K}$ des gemischten Büschels denke man sich in den Grundpunkten die Tangenten construirt. Die Verbindungslinien je eines Grundpunktes mit dem Schnittpunkt der Tangenten der beiden übrigen Grundpunkte mögen sich in $\mathfrak{p}$ treffen. Während $\mathfrak{K}$ das gemischte Büschel durchläuft, beschreibt $\mathfrak{p}$ einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}'$, welcher dem Grunddreieck einbeschrieben ist. Der Berührpunkt einer Seite des letztern ist der vierte harmonische zu ihrem Schnittpunkt mit g in Bezug auf die beiden auf ihr liegenden Grundpunkte.

---

* Ueber eine besondere Curve dritter Classe und vierten Grades, Crelle, Bd. 53 S. 231 flgg. Vergl. Cremona, Sur l'hypocycloïde etc. a. a. O. Bd. 64 S. 101 Nr. 31.

Besteht das gemischte Büschel aus lauter Parabeln, so ist $\mathfrak{K}'$ die grösste Ellipse $\mathfrak{E}$, welche dem Grunddreieck einbeschrieben werden kann. Ein beliebiger dem Grunddreieck umbeschriebener Kegelschnitt ist Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem für ihn der Punkt $\mathfrak{p}$ innerhalb, auf oder ausserhalb $\mathfrak{E}$ liegt.*

XIX.

Ein Individuum des gemischten Büschels sei $\mathfrak{K}$. Seine Tangenten in den Ecken des Grunddreiecks treffen die bez. Gegenseiten in drei Punkten, welche bekanntlich in einer Geraden l liegen. Während $\mathfrak{K}$ das gemischte Büschel durchläuft, umhüllt l eine Curve dritter Ordnung vierter Classe, welche die Seiten des Grunddreiecks in den Punkten, wo sie von der Grundgeraden g getroffen werden, berührt und schneidet. Die Curve hat einen Einsiedlerpunkt, welcher also der harmonische Pol der Grundgeraden in Bezug auf das Grunddreieck ist.

Wenn die Grundgerade einer Seite des Grunddreiecks parallel ist, so wird diese eine osculirende Asymptote der Curve, wo nicht, so nähert sich die Curve der reellen Asymptote auf verschiedenen Seiten.

XX.

Für das aus Parabeln bestehende gemischte Büschel hat die Curve die Seiten des Grunddreiecks zu osculirenden Asymptoten und seinen Schwerpunkt zum Einsiedlerpunkt. Die drei Zweige der Curve befinden sich in den Scheitelräumen der Dreieckswinkel; die den Asymptoten parallelen drei Tangenten haben ihre Berührpunkte auf den Mittellinien des Grunddreiecks und umschliessen ein Dreieck von neunmal so grossem Inhalt. Das von je zwei Asymptoten und der zur dritten parallelen Tangente gebildete Dreieck ist neunmal so klein als das Grunddreieck.

XXI.

In dem Falle, welcher zu Nr. XIX das polare Pendant bildet, treten Centralprojectionen der dreispitzigen Hypocycloide auf und als Besonderheit erhalten wir folgenden Satz: Man construire für eine Ellipse, welche einem gleichseitigen Dreieck einbeschrieben ist und durch den Schwerpunkt desselben geht, denjenigen Punkt $\mathfrak{p}$, in welchem sich die Verbindungslinien je einer Ecke des Dreiecks und des Berührpunktes der Gegenseite schneiden. Wiederholt man diese Construction bei allen Ellipsen der angegebenen Art, so bilden die erhaltenen Punkte $\mathfrak{p}$ diejenige dreispitzige Hypocycloide, welche die Ecken des gleichseitigen Dreiecks zu Rückkehrpunkten hat. —

---

* Für die Gattung der einem Dreieck ein- oder umbeschriebenen Kegelschnitte gab mit Berücksichtigung der Lage des Mittelpunktes ein Kriterium Steiner, Teoremi relativi alle coniche inscritte e circoscritte. Ges. Werke Bd. II S. 327.

Was die gemischte Schaar der Kegelschnitte anbetrifft, welche drei Gerade berühren und durch einen Punkt gehen, so findet man das, was nicht eine polare Uebertragung des Obigen ist, in dem bekannten Werke von Schröter.

Greifswald. H. E. M. O. Zimmermann, Stud. phil.

X. Das Zweieckschnittsverhältniss.

Neben dem Doppelschnittsverhältniss führt Möbius im barycentrischen Calcul S. 300 das Zweieckschnittsverhältniss ein. Während er es hier nur gelegentlich (z. B. S. 337) anwendet, nöthigt ihn Crelle IV S. 115 das D.-V. beim Uebergang zum Dreieck- und Vieleckschnittsverhältniss zu einer Inconsequenz resp. zu einem Zeichenwechsel und in der Theorie der Kreisverwandtschaften (Abh. d. math.-phys. Cl. d. königl. sächs. Ges. d. Wiss., Bd. II, 1855, S. 530) geht er deshalb vom Zweieckschnittsverhältniss aus, benutzt aber für dasselbe den Namen Doppelverhältniss. Da letzterer jetzt allgemein für Doppelschnittsverhältniss gebraucht wird, ist es nöthig, für das dem Werthe nach dem D.-V. allerdings gleiche, der Form und zum Theil den Eigenschaften nach aber verschiedene Zweieckschnittsverhältniss zum ersten Namen zurückzukehren. Die Beobachtungen, welche Möbius dort am Kreise macht, lassen sich auf die Gerade übertragen und unterscheiden sich hier von den für das D.-V. bekannten Erscheinungen durch cyklische Anordnung der Elemente, Uebertragbarkeit auf Dreieck- und Vieleckschnittsverhältnisse und einige besondere Verwendungen (Crelle IV S. 121).

Sind A, B, C drei Punkte einer Geraden, so sind AB und BC die Theile der Strecke AC, und $AB:BC$ heisse demnach das Schnittverhältniss von AC in B, welches positiv bei innerer, negativ bei äusserer Theilung ist (vgl. Joachimsthal, Anal. Geom. S. 121). Das Schnittverhältniss des Zweiecks AC, CA durch B und D ist das Product der Schnittverhältnisse

$$\overparen{ABCD} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DA};$$

dasselbe ist seinem Werthe nach gleich dem D.-V. $(ABCD)$ und theilt dessen Eigenschaften mit entsprechenden Abänderungen.

I. Durch Umkehrung wird das Z.-V. nicht geändert, $\overparen{ABCD} = \overparen{DCBA}$.

II. Durch eine cyklische Vertauschung erhält das Z.-V. den reciproken Werth $\overparen{ABCD} = \frac{1}{\overparen{BCDA}}$.

III. Vertauscht man das zweite und dritte oder vierte und erste Element, so ergänzen sich die Z.-V. zu 1 $\overline{ABCD}+\overline{ACBD}=1$, $\overline{ABCD}+\overline{DBCA}=1$.

IV. Vertauscht man das erste und zweite oder dritte und vierte Element, so ergänzen sich die reciproken Werthe der Z.-V. zu 1. $1:\overline{ABCD}+1:\overline{BACD}=1$.

Während I und II aus der Definition folgen, liegt der Beweis für III und IV in der bekannten Identität $AB.CD+AC.DB+AD.BC=0$. Die 24 Permutationen liefern demnach die 6 bekannten Werthe

$$x,\quad \frac{1}{x},\quad 1-x;\quad \frac{1}{1-x},\quad \frac{x-1}{x},\quad \frac{x}{x-1}.$$

Soll eine cyklische Vertauschung den Werth des Z.-V. nicht ändern, so erhält man $x^2=1$, d. h. D fällt auf B oder es ist $AB:BC=-AD:DC$ und $\overline{ABCD}=-1$ stellt auch hier die harmonische Theilung dar. Es ist dann $\overline{ACDB}=2$, $\overline{ABDC}=\frac{1}{2}$. Verlangt man, dass nur zwei verschiedene Werthe auftreten sollen, so muss $\overline{ABCD}=\overline{ADBC}=\overline{ACDB}$ sein, woraus die Werthe

$$\tfrac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}),\quad \tfrac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$$

folgen, d. h. nicht alle Punkte können dann reell sein. Vergl. Cremona, Curve piane, 27. (Aequianharmonisches Verhältniss.)

V. Das Z.-V. von vier Punkten einer Geraden wird aus den Z.-V. zu drei Grundpunkten dieser Geraden durch entsprechende cyklische Anordnung der Differenzen gefunden

$$\overline{DEFG}=\frac{\overline{ABCD}-\overline{ABCE}}{\overline{ABCE}-\overline{ABCF}}\cdot\frac{\overline{ABCF}-\overline{ABCG}}{\overline{ABCG}-\overline{ABCD}}.$$

Denn es ist zunächst

$$\overline{ABCE}.\overline{ABCD}.\overline{ADCE}=1$$

oder, da $\overline{AECB}.\overline{ABCE}=1$:

$$\overline{ADCE}=\overline{ABCE}:\overline{ABCD},$$

ebenso

$$\overline{AFCE}=\overline{ABCE}:\overline{ABCF}$$

und endlich

$$\overline{ADEF}=\overline{ACED}:\overline{ACEF}=\frac{\overline{ABCE}-\overline{ABCF}}{\overline{ABCE}-\overline{ABCD}}.$$

Die drei Grundpunkte bilden demnach für die Gerade ein Coordinatensystem, welches in das übliche übergeht, wenn C der Nullpunkt, A unendlich fern und B der negative Einheitspunkt, da dann



$$\overline{ABCD} = CD : BC = OD.$$

Sind p, q, r, s die gemeinen Coordinaten von P, Q, R, S oder ihre Z.-V. mit ABC, so ist

$$\overline{PQRS} = \frac{p-q}{q-r} \cdot \frac{r-s}{s-p}.$$

VI. Das Z.-V. wird durch Projection nicht geändert.

$$\overline{ABCD} = \overline{A'B'C'D'},$$

wenn AA', BB', CC', DD' Geraden eines Büschels.

Denn sind O und Q die Schnittpunkte von $AA'|BB'$ und $AB|A'B'$, so ist

$$QA : AB = QA'O : A'BO \text{ und } QA' : A'B' = QA'O : A'B'O,$$

also

$$\frac{QA}{AB} : \frac{QA'}{A'B'} = \frac{B'O}{BO} = \frac{BC}{CQ} : \frac{B'C'}{C'Q}$$

oder

$$\overline{QABC} = \overline{QA'B'C'} \text{ und ebenso } \overline{QBCD} = \overline{QB'C'D'}.$$

Vier Strahlen eines Büschels theilen demnach jede büschelfremde Gerade nach demselben Z.-V. und dies heisst Z.-V. des Büschels. So ist ferner

$$^{O}\overline{ABCD} = \overline{ABCD} = {}^{O'}\overline{ABCD},$$

wenn A, B, C, D Punkte einer Geraden, O und O' beliebige Punkte der Ebene. Weitere Betrachtungen sind streng analog denen beim D.-V., so wenn O, P, Q, R, S Punkte einer Ebene, aber je verschiedener Geraden, so ist

$$^{O}\overline{PQRS} = \overline{OP, OQ, OR, OS} = \overline{OP, OQ, R, S} = \ldots$$

$$\ldots = \overline{P, OQ, R, OS} = \overline{P, Q, OR, OS},$$

wenn man unter dem letzten das Z.-V. versteht, welches OR und OS auf der Geraden PQ bilden.

Wendet man diese Sätze auf das Dreieck an, so findet man:

In jedem Dreieck theilen die Seiten, ein Transversalenbüschel und die Fusslinien dieses Büschels einander harmonisch.

Im Dreieck ABC seien durch O die Transversalen AA', BB', CC' gezogen; die Fusslinien $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ mögen die Seiten in D, E, F schneiden und von den Transversalen in A'', B'', C'' geschnitten werden. Dann ist nach VI

$$^{A}\overline{BA'CD} = \overline{C'A''B'D} = {}^{O}\overline{CA'BD};$$

da nun $\overline{BA'CD} \cdot \overline{CA'BD} = 1$ nach II, so ist

$$\overline{BA'CD} = \overline{CA'BD} = -1,$$

d. h. die Seiten sind harmonisch getheilt. Durch Projection von den Eckpunkten findet man die Fusslinien, durch Projection von den Fusspunkten die Transversalen harmonisch getheilt.

Die Schnittpunkte der Fusslinien und Seiten liegen auf einer Geraden.

Denn $\overline{BA'CD} = \overline{CB'AE} = \overline{AB'CE}$; da BA und $A'B'$ durch F gehen, muss auch DE durch F gehen.

Versteht man jetzt unter dem Dreieckschnittsverhältniss das Product aus den Schnittverhältnissen der Seiten eines Dreiecks (Möbius a. a. O.), d. h.

$$\overline{AC'BA'CB'} = \frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A},$$

so ergeben sich die unter den Namen Ceva und Menelaus in etwas anderer Form bekannten Sätze:

Das Dreieckschnittsverhältniss durch ein Transversalenbüschel ist 1.

Das Dreieckschnittsverhältniss durch eine Gerade ist −1.

Nach vorigem Satze ist

$$\overline{AC'BF} . \overline{BA'CD} . \overline{CB'AE} = -1,$$

d. i.

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = -\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA}.$$

Nun ist

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{ACO}{CBO}, \quad \frac{BA'}{A'C} = \frac{BAO}{ACO}, \quad \frac{CB'}{B'A} = \frac{CBO}{BAO},$$

also die linke Seite und damit die rechte Seite der Gleichung gleich 1. Andere Beweise Joachimsthal, Anal. Geometrie Cap. IX; Crelle IV (1829) S. 120.

Für das Dreieckschnittsverhältniss überhaupt gelten die entsprechenden Regeln wie für Z.-V., insbesondere erhält man durch Eine cyklische Vertauschung den reciproken Werth, durch Umkehrung denselben:

$$\overline{PQRSTU} = 1 : \overline{QRSTUP} = \overline{RSTUPQ}, \quad \overline{PQRSTU} = \overline{UTSRQP}.$$

Wie auf der Geraden, kann man auch auf anderen Linien von Z.-V. und Dr.-V. sprechen. Für den Kreis insbesondere ist diese Arbeit auch mit derselben Bezeichnung von Möbius a. a. O. geleistet. Für Kegelschnitte findet sich Entsprechendes Salmon, Conics, Art. 260. Erwähnt sei die Relation

$$\overline{PQRSTU} = \overline{PQRS} . \overline{PSTU},$$

welche das Dr.-V. auf das Z.-V. zurückführt.

Berlin, November 1883. A. Thaer.

XII. Erzeugung von Complexen ersten und zweiten Grades aus linearen Congruenzen.

(Hierzu Taf. VI Fig. 5 – 7.)

Diese Mittheilung bildet eine Ergänzung meiner früheren Abhandlung über diesen Gegenstand (diese Zeitschrift Bd. XVII S. 257). Ich habe nachträglich gefunden, dass für einzelne jener Complexe sich noch andere Erzeugungsweisen aus speciellen Congruenzen angeben lassen. Ferner erreicht man in einigen weiteren Fällen durch metrische Specialisirungen, dass der bezügliche Complex durch Rotation oder Parallelverschiebung einer Congruenz entsteht.

Wenn die Singularitätenfläche aus einer doppelt zählenden Fläche zweiten Grades besteht, so ergeben im Allgemeinen die Erzeugenden der einen Schaar in [2, 2]-deutiger Zuordnung die Directricenpaare der linearen Congruenzen des Complexes. Die Erzeugenden der transversalen Schaar, die Doppelgeraden des Complexes, sind hierbei die Brenncurven von besonderen Congruenzen zweiten Grades des Complexes: In jedem Punkte A einer solchen Transversalen t giebt es zwei Ebenen A_1, A_2 durch t, so dass die Büschel AA_1, AA_2 aus Complexgeraden bestehen. Die hieraus abgeleitete Zuordnung der Punkte A und Ebenen A von t ist offenbar [2, 2]-deutig (so dass u. A. für vier Punkte auf t ein Doppelbüschel auftritt). Diese Linien t sind also Directricen von „speciellen" Congruenzen zweiten Grades. Diese speciellen Congruenzen zerfallen jedoch bei [(111)(11)1] etc., d. h. wenn die [2, 2]- resp. [1, 2] deutige Zuordnung der Erzeugenden der ersten Schaar in projectivische Zuordnung übergeht.

1. Der Complex [(11)(11)11], Nr. 3, entsteht durch Rotation einer allgemeinen Congruenz, wie folgende Betrachtung zeigt.

Die zwei Flächen zweiten Grades F_1, F_2 (vergl. die gegebene Erzeugungsweise) seien hier einschalige Rotationshyperboloide mit derselben Axe a, so berühren sie sich in den imaginären Kreispunkten einer zu a senkrechten Ebene A. Jede der Flächen trifft a in zwei imaginären Punkten und wenn man für beide Flächen das nämliche Paar erhält, so findet in diesen Punkten ebenfalls Berührung beider Flächen statt. Die Flächen berühren sich nunmehr in vier Punkten und haben ein (imaginäres) windschiefes Vierseit gemeinsam. Sind m, n zwei (reelle) Erzeugende dieser Flächen, b und c ihre kürzesten Abstände von a, β und γ ihre Neigungswinkel gegen a, so müssen b, c in derselben zu a senkrechten Ebene liegen und es muss $b . tg\gamma = c . tg\beta$ sein, damit der genannte metrische Specialfall vorliegt. Sind dann endlich m, n mit Bezug auf a in demselben Sinne geneigt, so beschreibt die Congruenz m, n bei der Rotation um a den Complex.

2. Um den Complex [(111)(11)1], Nr. 4, zu erhalten, bringt man die Strahlen einer Regelschaar zweiten Grades in allgemeine projectivische Zuordnung. Jeder Strahl hat alsdann einen vor- und einen rückwärts entsprechenden. Für die Strahlen a, b, c der Schaar seien dieselben bezüglich a', b', c' und a'', b'', c'', so dass der Complex aus den Congruenzen $a''a$, ..., aa', ... zusammengesetzt ist. Eine beliebige Erzeugende t der transversalen Schaar werde von a, b, c, ... bezüglich in den Punkten A, B, C, ... geschnitten. Dann sind einerseits die Büschel Aa'', Bb'', Cc'', ..., andererseits ebenso die Büschel Aa', Bb', Cc', ... in ihrer Gesammtheit je eine specielle lineare Congruenz des Complexes von der gemeinsamen Directrix t.

Der Complex [(111)(11)1] kann auf eine Art aus allgemeinen und auf zwei Arten aus speciellen Congruenzen erzeugt werden.

Auf die Erzeugende durch Rotation einer allgemeinen Congruenz ist bereits hingewiesen worden. Es giebt auch zwei Erzeugungsweisen durch Rotation einer speciellen Congruenz. Es seien d eine Erzeugende eines Rotationshyperboloids H; a, b, c drei Erzeugende der andern Schaar auf H, welche d in den Punkten A, B, C schneiden. Dreht man a, b, c um die Axe von H um einen Winkel ϑ, so mögen sie übergehen in a', b', c'. Alsdann bestimmen die Büschel Aa', Bb', Cc' eine specielle Congruenz, welche durch Rotation um die Axe von H den Complex liefert. Und man erhält denselben Complex, wenn man bei der Construction der Congruenz um den Winkel ϑ rückwärts dreht.

Für $\vartheta = 180^0$ erhält man die Erzeugung eines linearen Complexes aus speciellen Congruenzen, deren Directricen eine Regelschaar zweiten Grades bilden. Jeder lineare Complex besitzt eine „Axe“ und man erkennt, dass jeder lineare Complex ohne Weiteres auf ∞^1 Arten in genannter Weise durch Rotation erzeugt werden kann.

3. Der Complex [(211)(11)], Nr. 14, besteht aus Congruenzen, deren Directricen zwei projectivische Büschel AA, BB bilden, wobei A und B in AB liegen.

Den Strahlen d, e, f von AA mögen d', e', f' von BB entsprechen (Fig. 5). Man wähle in A einen durch B gehenden Strahl x und bezeichne dessen Schnittpunkte mit d, e, f durch D, E, F. Alle Strahlen, welche d, d' und x schneiden, bilden nebst BA den Büschel Dd', dessen Ebene x enthält. So liefern die Congruenzen dd', ee', ... die Büschel Dd', Ee', ... von Complexstrahlen, welche x schneiden. Ihre Gesammtheit ist eine lineare Congruenz und weil x in einer Ausnahmeebene des Complexes durch einen Ausnahmepunkt desselben geht, so kann x nur die Directrix jener einen Congruenz sein. — Lässt man x den Büschel BA beschreiben, so ist damit eine Erzeugung des Complexes aus spe-

ciellen Congruenzen gegeben und es lässt sich diese Erzeugung leicht mit Hilfe von drei allgemeinen Congruenzen ausführen.

Die Strahlen des Büschels $\mathfrak{A}$B sind die Directricen einer zweiten Schaar solcher Congruenzen: der Complex ist im Ganzen auf drei Arten aus linearen Congruenzen erzeugbar.

Wird die Ausnahmeebene, z. B. B, als die unendlich ferne Ebene des Raumes gewählt, so sind auch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ unendlich fern. Die Drehung von x in A um $\mathfrak{B}$ bedeutet jetzt eine Parallelverschiebung und weil hierbei die zugehörige Congruenz unverändert bleibt, so folgt: Der Complex entsteht durch Parallelverschiebung einer speciellen Congruenz. — Geschieht jedoch die Parallelverschiebung in der asymptotischen Ebene der Congruenz, so entsteht der allgemeine lineare Complex. Denn es ist in diesem Falle die unendlich ferne Gerade $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ein selbstentsprechender Strahl der Büschel $\mathfrak{A}$A, $\mathfrak{B}$B.

4. Der Complex [(21)(111)], Nr. 15, ist ein directer Specialfall von [1(11)(111)]. Man bringt hier die Strahlen einer Regelschaar zweiten Grades so in projectivische Zuordnung, dass die beiden sich selbst entsprechenden vereinigt sind. Hierbei seien aa', bb', cc' drei der Paare von Directricen. Sie mögen von einer Geraden x der transversalen Regelschaar in $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$ geschnitten werden, so bestimmen die Büschel $\mathfrak{A}a'$, $\mathfrak{B}b'$, $\mathfrak{C}c'$ und andererseits $\mathfrak{A}'a$, $\mathfrak{B}'b$, $\mathfrak{C}'c$ je eine specielle Congruenz des Complexes: Der Complex kann in zweifacher Weise aufgefasst werden als eine Schaar von speciellen Congruenzen, deren Directricen dieselbe Regelschaar zweiten Grades bilden.

5. Es ist [(12)(12)], Nr. 28, ebenfalls ein Rotationscomplex, aber es können dann die Directricen der (allgemeinen) Congruenzen nicht mehr reell sein. Man wählt zwei Kegelschnitte, welche sich in einem (reellen oder imaginären) Scheitel osculiren, und rotirt sie um die gemeinsame Axe. So entstehen die früher genannten Flächen F_1, F_2. Wählt man auf jeder Fläche eine Erzeugende der zur Axe in gleichem Sinne geneigten Schaar, so bilden diese die Directricen einer Congruenz, die durch Rotation um jene Axe den Complex beschreibt.

6. Für [(11)(22)], Nr. 29, sind bereits drei Erzeugungen aus allgemeinen Congruenzen bekannt. Er enthält aber auch eine Schaar von speciellen Congruenzen, wie sich aus jeder der gegebenen Definitionen gleich einfach ergiebt.

Als Directricen habe man die projectivischen Büschel d, e, f, ... und d', e', f', ..., resp. $\mathfrak{A}$C und $\mathfrak{C}$B (Fig. 6). Ein Strahl x des Büschels $\mathfrak{C}$C ist Directrix einer zerfallenden Congruenz (bestehend aus $\mathfrak{C}$ und C) und einer speciellen, nicht zerfallenden. Sind nämlich D, E, F die Schnittpunkte von x mit d, e, f, so ist jene Congruenz bestimmt durch die Büschel Dd', Ee', Ff'. Dreht man x in C um $\mathfrak{C}$ und con-

struirt man je mit Hilfe von dreien der Congruenzen ee' (z. B. dd', ee', ff') die zugehörige Congruenz, so hat man die vierte Erzeugungsweise.

Ist speciell C senkrecht zu der Schnittlinie AB und sind A, B die unendlich fernen Kreispunkte in C, so bleibt der Complex durch Rotation um AB unverändert. Beachtet man, dass bei dieser Specialisirung AB unendlich fern ist und dass dem Schnittpunkt F von x mit AB die Ebene $xf' = \mathrm{C}$ entspricht, so erkennt man, dass x sich in der asymptotischen Ebene der Congruenz dreht. Ferner gehört zum Schnittpunkt von x mit AB die durch ebendiese Geraden gelegte Ebene: Der Complex entsteht durch Rotation einer speciellen Congruenz, wobei die Rotationsaxe die Directrix schneidet und senkrecht steht zu der asymptotischen Ebene der Congruenz und dem Schnittpunkt der Axe mit der Directrix innerhalb der Congruenz die Ebene dieser beiden Geraden entspricht. (Die Directricen der allgemeinen Congruenzen sind hier imaginär.)

Auf die Erzeugung des nämlichen Complexes durch Parallelverschiebung einer allgemeinen Congruenz ist bereits hingewiesen worden Bei der Erklärung geht man aus von den projectivischen Büscheln AA, BB. Ist C unendlich fern, so haben die in AB auftretenden projectivischen Reihen die Doppelpunkte im unendlich fernen Punkte dieser Geraden vereinigt, so dass entsprechende Punkte stets denselben Abstand zwischen sich haben müssen. — Liegt die Verschiebungsrichtung insbesondere in einer zu den Directricen parallelen Ebene, so entsteht der allgemeine lineare Complex durch eine derartige Verschiebung einer allgemeinen Congruenz, bei welcher die Directricen zwei parallele Ebenen durchlaufen (vergl. 3, Schlussbemerkung).

7. Zwei projectivische Büschel liefern stets die Directricenpaare von ∞^1 Congruenzen eines Complexes zweiten Grades. Liegen beide Büschel in einer Ebene und ist die Zuordnung eine allgemeine, so treffen sich die Directricenpaare in Punkten eines Kegelschnittes und es entsteht [(222)], (A). Haben dagegen die Büschel denselben Scheitel, so ergeben die Directricenpaare die Tangentialebenen eines Kegels und es entsteht [(222)], (B).

Beide Complexe entstehen auch auf andere Weise aus linearen (zerfallenden) Congruenzen. Für (A) z. B. wählt man einen Kegelschnitt K, darauf einen festen Punkt P, der mit den Punkten A, B, C, ... von K verbunden einen Büschel a, b, c, ... bestimmt. Alsdann sind a, b, c, ... und die in A, B, C, ... an K gezogenen Tangenten a', b', c', ... in der Zuordnung aa', bb', cc', ... die Directricenpaare. Diese Erzeugung ist je auf ∞^1 Arten ausführbar, die vorhergenannte ∞^2-mal.

8. Nach der früher mitgetheilten Erzeugungsweise bilden bei [(33)], Nr. 47, die Directricen der allgemeinen Congruenzen zwei projectivische Büschel $AB(d, e, f, \ldots)$ und $BA(d', e', f', \ldots)$, s. Fig. 7.

Ein Strahl x des Büschels AA treffe d', e', f' in D', E', F', so ist jedesmal durch die drei Büschel $D'd$, $E'e$, $F'f$ eine specielle Congruenz des Complexes von der Directrix x bestimmt. Daraus geht unmittelbar die Erzeugung des Complexes aus speciellen Congruenzen hervor.

Durch die vorstehenden Ergänzungen fallen die in der ersten Mittheilung gegebenen Zusammenstellungen als nicht ganz vollständig ausser Betracht.

Die Angabe der singulären Linien bei diesen aus linearen Congruenzen bestehenden Complexen ist hier nicht überall durchgeführt. Dagegen sind in einzelnen Fällen (z. B. bei [(11)1111], erste Mittheilung S. 261) hierüber Andeutungen gegeben, welche man auf die übrigen Fälle anwenden mag. — Bei [(111)111] bestehen u. A. die singulären Linien aus vier von den linearen Congruenzen des Complexes und die Construction des Complexes aus linearen Congruenzen zeigt, wie je die eine Directrix zwei zusammenfallende entsprechende Directricen hat, wenn ihre Linien singuläre sind. Jene eine Directrix der Congruenz liefert alsdann ebensowohl die singulären Punkte, als die singulären Ebenen; das Verhalten der beiden Directricen ist kein dualistisches.*

Hottingen-Zürich, im September 1882. Dr. A. Weiler.

XII. Bemerkungen über einige Complexe.

Die Complexe zweiten Grades, deren Strahlen Paare von Flächen zweiten Grades in conjugirt-harmonischen Punkten treffen, sind vor Kurzem Gegenstand eingehender Untersuchung geworden.** Diese Complexe treten auch dann noch auf, wenn die eine Fläche in einen Kegelschnitt oder einen Kegel ausartet.

Ist der Kegelschnitt der imaginäre Kugelkreis, so gehen aus den Complexgeraden an die verbleibende Fläche senkrechte Tangentialebenen und die singulären Linien sind zudem „Axen" der Fläche (welche ihre Polaren rechtwinklig kreuzen).

Wenn dagegen die eine Fläche zu der Punktkugel vom Mittelpunkt O wird, wobei O gegen die andere Fläche F erst in allgemeiner Lage sein soll, so gehen allemal aus O nach den Schnittpunkten einer Com-

---

* Hierauf hat neulich Herr Segre aufmerksam gemacht; vergl. „Note sur les complexes quadratiques etc.", Mathem. Annalen XXIII, S. 236.

** Vergl. Herren Segre und Loria, Mathem. Annalen Bd. XXIII.

plexgeraden mit F die Schenkel eines rechten Winkels; die Singularitätenfläche ist in diesem Falle ein Tetraedroid.

Ist O der Mittelpunkt von F, so ist die Singularitätenfläche eine Wellenfläche. (Von den Complexkegelschnitten in Ebenen, welche F in Kreisen schneiden, lassen sich zwei Brennpunkte sofort angeben: der eine ist der Mittelpunkt jenes Kreises, der zweite fällt in den Fusspunkt der aus O auf die Ebene gefällten Senkrechten. Eine singuläre Complexgerade S ist so gelegen, dass ihre Polare für F die in O auf der Ebene Os errichtete Senkrechte schneidet. — Für eine Rotationsfläche entsteht der Complex [(11)(11)11], für eine Kugel der Flächencomplex [(111)(111)].

Liegt O auf F selbst, so entsteht im Allgemeinen [222] (B), dessen Singularitätenfläche die Steiner'sche Fläche ist. — Die specielleren Fälle sind aus den Resultaten der Herren Segre und Loria abzulesen.

Der Complex [(111)(11)1] hat ähnliche Eigenschaften wie der tetraedrale. Die Directricen seiner linearen Congruenzen sind die Erzeugenden einer Regelschaar zweiten Grades, welche man in projectivische Zuordnung gebracht hat. Es seien $a = a'$ und $b = b'$ die sich selbst entsprechenden Erzeugenden. Eine beliebige Erzeugende t der transversalen Schaar (bestehend aus Complexdoppelgeraden) treffe a, b in A, B und bilde mit ihnen die Ebenen A, B. Endlich sei F die Fläche der zwei Regelschaaren. Dann gelten folgende Sätze: Die Complexgeraden schneiden F und jedes Ebenenpaar A, B unter constantem Doppelverhältniss. Die Ebenen aus jeder Complexgeraden nach F und nach den Punktepaaren A, B haben ebenfalls ein constantes Doppelverhältniss. Dieses Doppelverhältniss stimmt überein mit dem der projectivischen Zuordnung bei den Directricen.

Wie das Beispiel von zwei concentrischen Kugeln zeigt, entstehen auch Complexe zweiten Grades, wenn man zwei Flächen zweiten Grades, die sich längs eines Kegelschnittes berühren, unter constantem Doppelverhältniss schneidet.

Hottingen-Zürich, im März 1884. Dr. A. Weiler.

XIII. Erklärung.

Der Unterzeichnete fühlt sich zu der Erklärung verpflichtet, dass die von ihm als neu bezeichnete Erzeugungsweise der rationalen Curven vierter Ordnung (Heft 5 des Jahrgangs 1883 der Zeitschr. f. Math. u. Phys.) schon 1879 durch Herrn Ameseder in Wien geleistet und im LXXIX. Bande der Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften veröffentlicht worden ist — wie Unterzeichnetem erst nach Erscheinen seiner Arbeit bekannt wurde.

Der auf S. 296 mitgetheilte Satz dürfte indessen neu sein.

Jena, den 10. December 1883. Dr. Carl Hossfeld.

X.

Einführung unvollständiger Beobachtungen in die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von

W. Küttner

in Burgk bei Dresden.

Nicht immer ist es möglich, die Beobachtungen auf alle Ereignisse, die zur Ableitung eines Wahrscheinlichkeitswerthes *a posteriori* zu dienen haben, zu erstrecken, weil der Eintritt eines andern Ereignisses die Beobachtung unmöglich macht. Ist aber die Wahrscheinlichkeit bekannt, dass ein solches die Beobachtung verhinderndes Ereigniss eintritt, so gestatten diese Fälle eine besondere mathematische Behandlung, die den Gegenstand vorliegender Abhandlung bildet.

I.

Ein Ereigniss, dessen Eintritt mit der Wahrscheinlichkeit p beobachtet werden kann, ist a-mal beobachtet worden. Man verlangt die Wahrscheinlichkeit, dass es nicht weniger als ϱ_0-mal und nicht mehr als ϱ_1-mal stattgefunden hat.

Ueber die Anzahl von Malen, die das Ereigniss stattgefunden hat, können wir unendlich viele Hypothesen aufstellen. Nehmen wir an, sie sei x gewesen, so verleiht diese specielle Hypothese dem beobachteten Ereignisse *a priori* eine Wahrscheinlichkeit von

$$\frac{x!}{a!\,(x-a)!}\,p^a q^{x-a},$$

wenn $1-p=q$ gesetzt wird. Nach dem Satze von Bayes ist aber die Wahrscheinlichkeit ω_x, dass das beobachtete Ereigniss in der That der soeben aufgestellten Hypothese zuzuschreiben ist, gleich

$$1)\qquad \omega_x=\frac{\dfrac{x!}{a!\,(x-a)!}\,p^a q^{x-a}}{\dfrac{p^a}{a!}\displaystyle\sum_a^\infty \frac{x!\,q^{x-a}}{(x-a)!}}.$$

Die Entwickelung des Nenners giebt

$$\frac{p^a}{a!}\left[a! + \frac{(a+1)!}{1} q + \frac{(a+2)!}{2!} q^2 + \frac{(a+3)!}{3!} q^3 + \dots\right]$$
$$= p^a\left[1 + \frac{a+1}{1} q + \frac{(a+1)(a+2)}{2!} q^2 + \frac{(a+1)(a+2)(a+3)}{3!} q^3 + \dots\right]$$
$$= p^a (1-q)^{-(a+1)} = \frac{1}{p},$$

womit

$$2) \qquad \omega_x = \frac{x!}{a!\,(x-a)!} p^{a+1} q^{x-a}$$

folgt.

Für irgend einen Werth von x wird ω_x ein Maximum werden. Um letzteres zu finden, setzen wir in 2) für x einmal $x-1$ und das andere Mal $x+1$. Dadurch erhalten wir

$$3) \qquad \omega_{x-1} = \frac{(x-1)!}{a!\,(x-a-1)!} p^{a+1} q^{x-a-1} = \omega_x \frac{x-a}{q x}$$

und

$$4a) \qquad \omega_{x+1} = \frac{(x+1)!}{a!\,(x-a+1)!} p^{a+1} q^{x-a+1} = \omega_x \frac{(x+1) q}{x-a+1}.$$

Soll nun ω_x ein Maximum werden, so muss

$$\omega_x \frac{x-a}{q x} < \omega_x \quad \text{und} \quad \omega_x \frac{(x+1) q}{x-a+1} < \omega_x,$$

$$4b) \qquad x < \frac{a}{p} \quad \text{„} \quad x > \frac{a}{p} - 1$$

oder

$$x = \frac{a}{p} - \varepsilon$$

sein, wo ε einen von a und p abhängigen echten Bruch bezeichnet. Ist a sehr gross, so kann, wo es sich um Ermittelung des Maximalwerthes von ω_x handelt, für obigen Ausdruck

$$x = \frac{a}{p}$$

gesetzt werden. Im Uebrigen ist aber für x die zwischen

$$\frac{a}{p} - 1 \quad \text{und} \quad \frac{a}{p}$$

liegende ganze Zahl zu nehmen.

Unter der Voraussetzung, dass a sehr gross ist, können wir nun zur Lösung unserer Aufgabe ein Verfahren einschlagen, welches in der Regel bei Ableitung des Bernoulli'schen Theorems Anwendung findet. Bei einem sehr grossen a dürfen nämlich in 2) für $x!$, $a!$ und $(x-a)!$ die Werthe der Stirling'schen Näherungsformel für Factorielle eingeführt werden, in welchem Falle wir nach entsprechender Reduction

$$5) \qquad \omega_x = \left(\frac{(x-a) p}{a q}\right)^{-x+a-\frac{1}{2}} \left(\frac{p x}{a}\right)^{x+\frac{1}{2}} \frac{p}{\sqrt{2\pi a q}}$$

finden. Wird hierin für x der Werth $\frac{a}{p}$ substituirt, so folgt als Maximalwerth von ω_x

6) $$\omega_{\frac{a}{p}} = \frac{p}{\sqrt{2\pi a q}}.$$

Setzen wir weiter in 5) für x den Werth $\frac{a}{p}+x_1$, so folgt

7) $$\omega_{\frac{a}{p}+x_1} = \left(1+\frac{p x_1}{a q}\right)^{-\frac{aq}{p}-x_1-\frac{1}{2}} \left(1+\frac{p x_1}{a}\right)^{\frac{a}{p}+x_1+\frac{1}{2}} \frac{p}{\sqrt{2\pi a q}}.$$

Nun ist aber

$$l\cdot\left(1+\frac{p x_1}{a q}\right) = -\sum_1^\infty (-1)^i \frac{1}{i}\left(\frac{p x_1}{a q}\right)^i,$$

$$l\cdot\left(1+\frac{p x_1}{a}\right) = -\sum_1^\infty (-1)^i \frac{1}{i}\left(\frac{p x_1}{a}\right)^i,$$

folglich auch

$$\begin{aligned}\left(-\frac{aq}{p}-x_1-\tfrac{1}{2}\right) l\cdot\left(1+\frac{p x_1}{a q}\right) = - \; x_1 &+ \frac{p x_1^2}{2aq} - \frac{p^2 x_1^3}{3a^2q^2} + \dots \\ &- \frac{p x_1^2}{aq} + \frac{p^2 x_1^3}{2a^2q^2} - \dots \\ - \frac{p x_1}{2aq} &+ \frac{p^2 x_1^2}{4a^2q^2} - \frac{p^3 x_1^3}{6a^3q^3} + \dots\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{p}+x_1+\tfrac{1}{2}\right) l\cdot\left(1+\frac{p x_1}{a}\right) = + \; x_1 &- \frac{p x_1^2}{2a} + \frac{p^2 x_1^3}{3a^2} - \dots \\ &+ \frac{p x_1^2}{a} - \frac{p^2 x_1^3}{2a^2} + \dots \\ + \frac{p x_1}{2a} &- \frac{p^2 x_1^2}{4a^2} + \frac{p^3 x_1^3}{6a^3} - \dots\end{aligned}$$

Ist nun aq so gross, dass in vorstehenden Entwickelungen Glieder von der Ordnung $\frac{1}{a^2q^2}$ selbst für die Grenzwerthe von x vernachlässigt werden können, so wird man

$$l\cdot\left(1+\frac{p x_1}{a q}\right)^{-\frac{aq}{p}-x_1-\frac{1}{2}} \left(1+\frac{p x_1}{a}\right)^{\frac{a}{p}+x_1+\frac{1}{2}} = -\frac{p^2 x_1}{2aq} - \frac{p^2 x_1^2}{2aq}$$

setzen dürfen, womit sofort aus 7)

8) $$\omega_{\frac{a}{p}+x_1} = \frac{p}{\sqrt{2\pi a q}} e^{-\frac{p^2 x_1}{2aq} - \frac{p^2 x_1^2}{2aq}}$$

folgt, was auch mit Vernachlässigung der Glieder, die im Nenner aq in einer höheren als der ersten Potenz enthalten,

9) $$\omega_{\frac{a}{p}+x_1} = \frac{p}{\sqrt{2\pi a q}} e^{-\frac{p^2 x_1^2}{2aq}} \left[1 - \frac{p^2 x_1}{2aq}\right]$$

geschrieben werden kann. Aendert man jetzt das Vorzeichen von x und addirt den so erhaltenen Ausdruck zu 9), so findet man weiter

$$\omega_{\frac{a}{p}+x_1}+\omega_{\frac{a}{p}-x_1}=\frac{2p}{\sqrt{2\pi a q}}e^{-\frac{p^2 x_1^2}{2aq}}.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ω endlich, dass die fragliche Anzahl innerhalb der Grenzen $\varrho_0=\frac{a}{p}-x_1$ und $\varrho_1=\frac{a}{p}+x_1$ liegt, ist nach dem Princip der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}\omega&=\sum_{x=0}^{x=x_1}\left(\omega_{\frac{a}{p}-x}+\omega_{\frac{a}{p}+x}\right)-\omega_{\frac{a}{p}}\\&=\frac{2p}{\sqrt{2\pi a q}}\sum_{x=0}^{x=x_1}e^{-\frac{p^2x^2}{2aq}}-\frac{p}{\sqrt{2\pi a q}}.\end{aligned}$$

Wird jetzt der mit dem Summenzeichen Σ behaftete Ausdruck nach Euler's Formel

$$\sum_a^b \psi(x)=\frac{1}{\alpha}\int_a^b\psi(x)\,dx+\tfrac{1}{2}\left[\psi(b)+\psi(a)\right]+\alpha\frac{B_2}{2!}\left[\frac{d\psi(x)}{dx}\right]_a^b-\cdots$$

entwickelt, wobei $\alpha=1$ zu setzen ist und die Differentialquotienten, da sie $\frac{1}{aq}$ in einer höheren als der ersten Potenz enthalten, vernachlässigt werden können, so folgt:

$$\text{10)}\qquad \omega=\frac{2p}{\sqrt{2\pi a q}}\int_0^{x_1}e^{-\frac{p^2x^2}{2aq}}dx+\frac{p\,e^{-\frac{p^2x_1^2}{2aq}}}{\sqrt{2\pi a q}}$$

oder mit

$$\frac{p x_1}{\sqrt{2aq}}=\gamma$$

$$\text{11)}\qquad \omega=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\gamma}e^{-\gamma^2}d\gamma+\frac{\gamma}{x_1\sqrt{\pi}}e^{-\gamma^2}.$$

Die Anwendung dieser Formel wird durch die Bedingung, dass $\frac{x_1^3}{a^2q^2}$ nicht nur kleiner als 1, sondern überhaupt eine sehr kleine Grösse sein muss, empfindlich eingeschränkt. Auch darf nicht übersehen werden, dass x_1 nicht grösser als $\frac{aq}{p}$ genommen werden darf, weil die gesuchte Anzahl x nicht kleiner als a sein kann. Für die untere Grenze haben wir nämlich die Gleichung

$$\frac{a}{p}-x_1=a,$$

woraus

$$x_1 = \frac{aq}{p}$$

folgt.

Ist a nur klein oder q nahezu Null, so ist überhaupt die Formel 11) **unbrauchbar**. In diesem Falle ist es nöthig, eine andere Formel zur Berechnung von ω zu entwickeln.

Nach dem Princip der totalen Wahrscheinlichkeit lässt sich zufolge der Formel 1) ω durch

$$\frac{\sum_{\frac{a}{p}-n_0}^{\frac{a}{p}+n_1} \frac{x!}{a!\,(x-a)!} p^a q^{x-a}}{\sum_a^\infty \frac{x!}{a!\,(x-a)!} p^a q^{x-a}}$$

darstellen, wenn die gesuchte Anzahl x innerhalb der Grenzen $\frac{a}{p} - n_0$ und $\frac{a}{p} + n_1$ liegen soll. Hieraus folgt leicht

$$\omega = \frac{\sum_a^\infty \frac{x!}{a!\,(x-a)!} p^a q^{x-a} - \sum_a^{\frac{a}{p}-n_0-1} \frac{x!}{a!\,(x-a)!} p^a q^{x-a} - \sum_{\frac{a}{p}+n_1+1}^\infty \frac{x!}{a!\,(x-a)!} p^a q^{x-a}}{\sum_a^\infty \frac{x!}{a!\,(x-a)!} p^a q^{x-a}},$$

woraus man mit

$$\sum_a^\infty \frac{x!}{a!\,(x-a)!} p^a q^{x-a} = \frac{1}{p}$$

weiter

$$\text{12a)} \quad \omega = 1 - \sum_a^{\frac{a}{p}-n_0-1} \frac{x!}{a!\,(x-a)!} p^{a+1} q^{x-a} - \sum_{\frac{a}{p}+n_1+1}^\infty \frac{x!}{a!\,(x-a)!} p^{a+1} q^{x-a}$$

findet. Setzt man jetzt

$$\text{12b)} \qquad x = \frac{a}{p} + x_1 = \alpha + x_1, \quad x - a = \frac{a}{p} - a + x_1 = \beta + x_1,$$

so erhält man zunächst

$$\omega = 1 - \frac{p^{a+1}}{a!} \sum_{-\beta}^{-n_0-1} \frac{(\alpha+x_1)!}{(\beta+x_1)!} q^{\beta+x_1} - \frac{p^{a+1}}{a!} \sum_{n_1+1}^\infty \frac{(\alpha+x_1)!}{(\beta+x_1)!} q^{\beta+x_1},$$

woraus nach leichter Umformung

$$\text{13)} \quad \omega = 1 - \frac{(\alpha-n_0)!}{a!\,(\beta-n_0)!} p^{a+1} \sum_1^{\beta-n_0} \frac{(\beta-n_0)(\beta-n_0-1)\ldots(\beta-n_0-x_1+1)}{(\alpha-n_0)(\alpha-n_0-1)\ldots(\alpha-n_0-x_1+1)} q^{\beta-n_0-x_1}$$
$$- \frac{(\alpha+n_1)!}{a!\,(\beta+n_1)!} p^{a+1} \sum_1^\infty \frac{(\alpha+n_1+1)(\alpha+n_1+2)\ldots(\alpha+n_1+x_1)}{(\beta+n_1+1)(\beta+n_1+2)\ldots(\beta+n_1+x_1)} q^{\beta+n_1+x_1}$$

folgt.

Sei nun allgemein

$$y = \sum_{n=1}^{n=t} \frac{\mu(\mu \pm 1) \ldots (\mu \pm n \mp 1)}{\nu(\nu \pm 1) \ldots (\nu \pm n \mp 1)} x^{\lambda + n},$$

so erhält man, wenn mit $x^{-\lambda+\nu\mp 1}$ multiplicirt und sodann differentiirt wird,

$$\frac{d(yx^{-\lambda+\nu\mp 1})}{dx} = \sum_{n=2}^{n=t} \frac{\mu(\mu \pm 1) \ldots (\mu \pm n \mp 1)}{\nu(\nu \pm 1) \ldots (\nu \pm n \mp 2)} x^{\nu \pm n \mp 1 - 1} + \mu x^{\nu - 1}.$$

Wird jetzt weiter mit $x^{\mu-\nu}$ multiplicirt und sodann integrirt, so folgt

$$\int x^{\mu-\nu} d(yx^{-\lambda+\nu\mp 1}) = \sum_{n=2}^{n=t} \frac{\mu(\mu \pm 1) \ldots (\mu \pm n \mp 2)}{\nu(\nu \pm 1) \ldots (\nu \pm n \mp 2)} x^{\mu \pm n \mp 1} + x^{\mu} + C.$$

Nun ist aber offenbar

$$\sum_{n=2}^{n=t} \frac{\mu(\mu \pm 1) \ldots (\mu \pm n \mp 2)}{\nu(\nu \pm 1) \ldots (\nu \pm n \mp 2)} x^{\mu \pm n \mp 1} = x^{-\lambda+\mu} \left(y - \frac{\mu(\mu \pm 1) \ldots (\mu \pm t \mp 1)}{\nu(\nu \pm 1) \ldots (\nu \pm t \mp 1)} x^{\lambda \pm t} \right),$$

mithin auch, wenn

$$\frac{\mu(\mu \pm 1) \ldots (\mu \pm t \mp 1)}{\nu(\nu \pm 1) \ldots (\nu \pm t \mp 1)} = h$$

gesetzt wird,

$$\int x^{\mu-\nu} d(yx^{-\lambda+\nu\mp 1}) = x^{-\lambda+\mu} y - h x^{\mu \pm t} + x^{\mu} + C$$

und, wenn nochmals differentiirt wird,

$$(-\lambda + \nu \mp 1) x^{-\lambda+\mu\mp 1 - 1} y + x^{-\lambda+\mu\mp 1} \frac{dy}{dx}$$

$$= (-\lambda + \mu) x^{-\lambda+\mu-1} y + x^{-\lambda+\mu} \frac{dy}{dx} - (\mu \pm t) h x^{\mu \pm t - 1} + \mu x^{\mu - 1}.$$

Hieraus folgt

$$x^{-\lambda+\mu}(x^{\mp 1} - 1) \frac{dy}{dx} + [(-\lambda + \nu \mp 1) x^{\mp 1} + \lambda - \mu] x^{-\lambda+\mu-1} y$$

$$= \mu x^{\mu-1} - (\mu \pm t) h x^{\mu \pm t - 1},$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{(-\lambda + \nu \mp 1) x^{\mp 1} + \lambda - \mu}{(x^{\mp 1} - 1) x} y = \frac{\mu x^{\lambda - 1} - (\mu \pm t) h x^{\lambda \pm t - 1}}{x^{\mp 1} - 1}$$

und daraus endlich

$$14) \quad y = e^{-\int_0^x \frac{(-\lambda+\nu\mp 1)x^{\mp 1}+\lambda-\mu}{(x^{\mp 1}-1)x} dx} \left\{ \int_0^x \frac{\mu x^{\lambda-1} - (\mu \pm t) h x^{\lambda \pm t - 1}}{x^{\mp 1} - 1} \right.$$

$$\left. \times e^{\int_0^x \frac{(-\lambda+\nu\mp 1)x^{\mp 1}+\lambda-\mu}{(x^{\mp 1}-1)x} dx} dx + C \right\}.$$

Mit Hilfe der soeben gefundenen Formel summiren wir zunächst die Reihe

$$15)\qquad \sum_{1}^{\beta-n_0}\frac{(\beta-n_0)(\beta-n_0-1)\dots(\beta-n_0-x_1+1)}{(\alpha-n_0)(\alpha-n_0-1)\dots(\alpha-n_0-x_1+1)}q^{\beta-n_0-x_1}=y_0.$$

Zu diesem Behufe haben wir in 14) $\lambda=t=\mu=\beta-n_0$, $\nu=\alpha-n_0$ und $x=q$ zu setzen und durchgängig das untere Vorzeichen zu nehmen. Wir finden

$$y_0=e^{-\int_0^q\frac{\alpha-\beta+1}{q-1}dq}\left\{\int_0^q\frac{(\beta-n_0)q^{\beta-n_0-1}}{q-1}e^{\int_0^q\frac{\alpha-\beta+1}{q-1}dq}dq+C\right\}$$

$$=-(\beta-n_0)(1-q)^{-\alpha+\beta-1}\int_0^q q^{\beta-n_0-1}(1-q)^{\alpha-\beta}dq+(1-q)^{-\alpha+\beta-1}C.$$

Da für $q=0$ die obige Reihe 15) sich auf das einzige Glied

$$\frac{(\beta-n_0)!}{(\alpha-n_0)(\alpha-n_0-1)\dots(\alpha-\beta+1)}$$

reducirt, so haben wir zur Bestimmung der Constante C die Gleichung

$$\frac{(\beta-n_0)!}{(\alpha-n_0)(\alpha-n_0-1)\dots(\alpha-\beta+1)}=-(\beta-n_0)\int_0^0 q^{\beta-n_0-1}(1-q)^{\alpha-\beta}dq+C,$$

woraus

$$C=\frac{(\beta-n_0)!}{(\alpha-n_0)(\alpha-n_0-1)\dots(\alpha-\beta+1)}$$

folgt. Wir haben somit

$$16)\qquad y_0=\frac{(\beta-n_0)!}{(\alpha-n_0)(\alpha-n_0-1)\dots(\alpha-\beta+1)}p^{-\alpha-1}$$
$$-(\beta-n_0)p^{-\alpha-1}\int_0^q x^{\beta-n_0-1}(1-x)^{\alpha-\beta}dx.$$

Um die Summe der Reihe

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{(\alpha+n_1+1)(\alpha+n_1+2)\dots(\alpha+n_1+x_1)}{(\beta+n_1+1)(\beta+n_1+2)\dots(\beta+n_1+x_1)}q^{\beta+n_1+x_1}=y_1$$

zu erhalten, haben wir in 14) $t=\infty$, $\mu=\alpha+n_1+1$, $\nu=\beta+n_1+1$, $\lambda=\beta+n_1$ und $x=q$ zu setzen und durchgängig das obere Vorzeichen zu nehmen. Ferner ist, da innerhalb der Integrationsgrenzen $x<1$ bleibt, zufolge des Satzes, dass für $A>1$

$$\infty\cdot\left(\frac{1}{A}\right)^{\infty}=0,$$

auch

$$(\mu+\infty)hx^{\infty}=0$$

zu setzen. Wir finden

$$y_1 = (1-q)^{\beta-\alpha-1}\left\{\int_0^q (\alpha+n_1+1)\, q^{\beta+n_1}(1-q)^{\alpha-\beta}\,dq + C\right\}.$$

Da für $q=0$ auch $y_1=0$, so ist $C=0$ und mithin auch

$$17)\qquad y_1 = (\alpha+n_1+1)p^{-(\alpha+1)}\int_0^q x^{\beta+n_1}(1-x)^{\alpha-\beta}\,dx.$$

Substituiren wir jetzt die Ausdrücke 16) und 17) in 13), so folgt

$$18)\qquad \omega = \frac{(\alpha-n_0)!}{(\alpha-\beta)!\,(\beta-n_0-1)!}\int_0^q x^{\beta-n_0-1}(1-x)^{\alpha-\beta}\,dx$$

$$-\frac{(\alpha+n_1+1)!}{(\alpha-\beta)!\,(\beta+n_1)!}\int_0^q x^{\beta+n_1}(1-x)^{\alpha-\beta}\,dx.$$

In der Theorie der Gammafunctionen wird aber die Gleichung

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

bewiesen, so dass auch

$$\frac{(\alpha-\beta)!\,(\beta-n_0-1)!}{(\alpha-n_0)!} = \int_0^1 x^{\beta-n_0-1}(1-x)^{\alpha-\beta}\,dx$$

und

$$\frac{(\alpha-\beta)!\,(\beta+n_1)!}{(\alpha+n_1+1)!} = \int_0^1 x^{\beta+n_1}(1-x)^{\alpha-\beta}\,dx$$

gesetzt werden kann. Damit erhält man aber die bemerkenswerthe Relation

$$19)\qquad \omega = \frac{\int_0^q x^{\beta-n_0-1}(1-x)^{\alpha-\beta}\,dx}{\int_0^1 x^{\beta-n_0-1}(1-x)^{\alpha-\beta}\,dx} - \frac{\int_0^q x^{\beta+n_1}(1-x)^{\alpha-\beta}\,dx}{\int_0^1 x^{\beta+n_1}(1-x)^{\alpha-\beta}\,dx} = P_1 - P_2.$$

Man bemerkt leicht, dass unsere gesuchte Wahrscheinlichkeit die Differenz der Wahrscheinlichkeiten zweier Hypothesen ist, und zwar ist P_1 die Wahrscheinlichkeit für die Hypothese, dass die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, das bei $(\alpha-n_0-1)$ Beobachtungen $(\beta-n_0-1)$-mal eingetroffen ist, innerhalb der Grenzen 0 und q liegt, während P_2 die Wahrscheinlichkeit für die Hypothese ist, dass die Wahrscheinlichkeit

des Ereignisses, das bei $(\alpha+n_1)$ Beobachtungen $(\beta+n_1)$-mal eingetroffen ist, ebenfalls innerhalb dieser Grenzen liegt.

Die Gleichung 19) stellt übrigens ω in aller Strenge dar und gilt für jedes a und q. Die numerische Berechnung der im Zähler stehenden bestimmten Integrale kann allerdings, wenn die Exponenten von x und $(1-x)$ beides grosse Zahlen sind, nur durch eine Näherungsformel geschehen, da die directe Integration auf eine Reihe führt, die mindestens ein Glied mehr besitzt, als der kleinste der beiden Exponenten von x und $(1-x)$ Einheiten enthält.

Ist jedoch q sehr klein — und diesem Umstande gelten ja vorzugsweise die soeben angestellten Untersuchungen —, so kann auch

$$\beta-n_0-1=\frac{a}{p}-a-n_0-1$$

nur sehr klein sein, und deshalb wird sich P_1 in diesem Falle immer direct ermitteln lassen. Für $n_0=\beta$ ist

$$P_1=1$$

zu setzen.

Schwieriger ist die numerische Bestimmung von P_2. Da indess bei Aufgaben der vorliegenden Art selten eine sehr grosse Genauigkeit gefordert wird, so kann man sich hierzu bei dem der Voraussetzung nach sehr kleinen Integrationswege der Formeln für die mechanische Quadratur bedienen. In den meisten Fällen dürfte schon die Formel

$$\text{20)} \qquad \int_0^1 \varphi(x)\,dx=\tfrac{1}{6}\varphi(0)+\tfrac{4}{6}\varphi(\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{6}\varphi(1)$$

genügen.

Setzt man in $\int_0^q x^{\beta+n_1}(1-x)^{\alpha-\beta}\,dx$ für x den Werth $q-qz$, so folgt

$$\int_0^q x^{\beta+n_1}(1-x)^{\alpha-\beta}\,dx=q^{\beta+n_1+1}p^{\alpha-\beta}\int_0^1(1-z)^{\beta+n_1}\left(1+\frac{q}{p}z\right)^{\alpha-\beta}dz.$$

Wird jetzt auf das rechter Hand stehende Integral die Formel 20) angewandt, so erhält man

$$\int_0^q x^{\beta+n_1}(1-x)^{\alpha-\beta}\,dx=q^{\beta+n_1+1}p^{\alpha-\beta}\left\{\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2})^{\beta+n_1-1}\left(1+\frac{q}{2p}\right)^{\alpha-\beta}\right\},$$

und, wenn dieser Werth in die Gleichung für P_2 eingeführt und gleichzeitig für $\int_0^1 x^{\beta+n_1}(1-x)^{\alpha-\beta}\,dx$ sein Werth $\frac{(\alpha-\beta)!\,(\beta+n_1)!}{(\alpha+n_1+1)!}$ gesetzt wird,

$$21)\quad P_2 = \frac{(\alpha+n_1+1)!}{(\alpha-\beta)!\,(\beta+n_1)!}\,p^{\alpha-\beta}\,q^{\beta+n_1+1}\left\{\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2})^{\beta+n_1-1}\left(1+\frac{q}{2p}\right)^{\alpha-\beta}\right\}$$

oder, nach Anwendung der Stirling'schen Näherungsformel für Factorielle,

$$22)\quad P_2 = \sqrt{\frac{(\alpha+n_1)^3\,q^2}{2\pi(\alpha-\beta)(\beta+n_1)}}\left(\frac{\alpha+n_1}{\alpha-\beta}\,p\right)^{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha+n_1}{\beta+n_1}\,q\right)^{\beta+n_1}\left\{\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2})^{\beta+n_1-1}\left(1+\frac{q}{2p}\right)^{\alpha-\beta}\right\}.$$

Es ist nicht schwer, den Genauigkeitsgrad der soeben abgeleiteten Formel durch eine grössere Anzahl von Zwischenwerthen zu erhöhen. In diesem Falle wird man sich aber, weil der Voraussetzung nach $(\alpha-\beta)$ sehr gross ist, auch nicht mit siebenstelligen Logarithmen begnügen dürfen.

II.

Zwei Ereignisse E und F, von denen das eine das entgegengesetzte des andern ist, können nur unvollkommen beobachtet werden, und zwar lässt sich E nur mit der Wahrscheinlichkeit p und F nur mit der Wahrscheinlichkeit p_1 beobachten. Es wird nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, dass, wenn E a-mal und F b-mal beobachtet worden sind, die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von E innerhalb der Grenzen ϱ_0 und ϱ_1 liegt.

Wenn p die Wahrscheinlichkeit ist, dass E hat beobachtet werden können, so ist $1-p=q$ die Wahrscheinlichkeit, dass es nicht hat beobachtet werden können, und nach I, Formel 2)

$$\frac{u!}{a!\,(u-a)!}\,p^{a+1}\,q^{u-a}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass es — wenn a-mal beobachtet — u-mal stattgefunden hat.

In gleicher Weise findet man die Wahrscheinlichkeit, dass das b-mal beobachtete Ereigniss F v-mal stattgefunden hat, gleich

$$\frac{v!}{b!\,(v-b)!}\,p_1^{\,b+1}\,q_1^{\,v-b},$$

wenn $1-p_1=q_1$ gesetzt wird.

Stellt man jetzt die Hypothese auf, dass das Eintreffen des Ereignisses E von der Wahrscheinlichkeit x abhängt, so würde diese Hypothese dem beobachteten Ereignisse E eine Wahrscheinlichkeit gleich

$$\frac{(u+v)!}{u!\,v!}\,x^u(1-x)^v$$

verleihen, wenn es in der That u-mal eingetroffen und v-mal nicht eingetroffen wäre, wofür aber nach dem Obigen die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{u!\,v!}{a!\,b!\,(u-a)!\,(v-b)!}\,p^{a+1}\,p_1^{\,b+1}\,q^{u-a}\,q_1^{\,v-b}$$

ist. Da nun aber u den Werth jeder ganzen Zahl von a bis ∞ und v den Werth jeder ganzen Zahl von b bis ∞ annehmen kann und diese Annahmen sich gegenseitig ausschliessen, so verleiht die aufgestellte Hypothese dem beobachteten Ereignisse E offenbar eine Wahrscheinlichkeit gleich

$$\sum_{u=a}^{u=\infty}\sum_{v=b}^{v=\infty}\frac{(u+v)!}{a!\,b!\,(u-a)!\,(v-b)!}\,p^{a+1}p_1^{b+1}q^{u-a}q_1^{v-b}x^u(1-x)^v.$$

Die Wahrscheinlichkeit ω_x der aufgestellten Hypothese ist daher

$$1)\qquad \omega_x=\frac{\sum\limits_{u=a}^{u=\infty}\sum\limits_{v=b}^{v=\infty}\frac{(u+v)!}{(u-a)!\,(v-b)!}\,q^{u-a}q_1^{v-b}x^u(1-x)^v\,dx}{\sum\limits_{u=a}^{u=\infty}\sum\limits_{v=b}^{v=\infty}\int\limits_0^1\frac{(u+v)!}{(u-a)!\,(v-b)!}\,q^{u-a}q_1^{v-b}x^u(1-x)^v\,dx}.$$

Nun ist aber

$$\sum_{v=b}^{v=\infty}\frac{(u+v)!}{(v-b)!}\,q_1^{v-b}(1-x)^v$$

$$=(u+b)!\,(1-x)^b\left\{1+\frac{u+b+1}{1}\,q_1(1-x)+\frac{(u+b+1)(u+b+2)}{2!}\,q_1^2(1-x)^2+\ldots\right\}$$

$$=(u+b)!\,(1-x)^b\,(1-q_1(1-x))^{-(u+b+1)}$$

und mithin auch

$$2)\qquad \sum_{u=a}^{u=\infty}\sum_{v=b}^{v=\infty}\frac{(u+v)!}{(u-a)!\,(v-b)!}\,q^{u-a}q_1^{v-b}x^u(1-x)^v$$

$$=(1-x)^b\sum_{u=a}^{u=\infty}\frac{(u+b)!}{(u-a)!}\,q^{u-a}x^u(1-q_1(1-x))^{-(u+b+1)}$$

Ferner ist

$$3)\qquad \sum_{u=a}^{u=\infty}\frac{(u+b)!}{(u-a)!}\,q^{u-a}x^u(1-q_1+q_1x)^{-(u+b+1)}$$

$$=x^a(1-q_1+q_1x)^{-(a+b+1)}(a+b)!\left\{1+\frac{a+b+1}{1}\cdot\frac{qx}{1-q_1+q_1x}+\frac{(a+b+1)(a+b+2)}{2!}\,\frac{q^2x^2}{(1-q_1+q_1x)^2}+\ldots\right\}$$

$$=(a+b)!\,x^a(1-q_1+q_1x)^{-(a+b+1)}\left(1-\frac{qx}{1-q_1+q_1x}\right)^{-(a+b+1)}$$

$$=(a+b)!\,x^a(1-q_1+(q_1-q)x)^{-(a+b+1)}.$$

Substituirt man die soeben unter 2) und 3) gefundenen Ausdrücke in 1), so folgt

$$4)\qquad \omega_x=\frac{x^a(1-x)^b(1-q_1+(q_1-q)x)^{-(a+b+1)}\,dx}{\int\limits_0^1 x^a(1-x)^b(1-q_1+(q_1-q)x)^{-(a+b+1)}\,dx}.$$

Setzt man hierin $q=0$ und $q_1=0$, so folgt, wie es sein muss,

$$\omega_x = \frac{x^a(1-x)^b\,dx}{\int_0^1 x^a(1-x)^b\,dx},$$

denn in diesem Falle sind keine die Beobachtung störenden Ereignisse vorhanden, also alle Beobachtungen möglich. Dasselbe Resultat erhält man, wenn $q = q_1$ ist.

Soll ω_x ein Maximum werden, so muss

$$x^a(1-x)^b(1-q_1+(q_1-q)x)^{-(a+b+1)} = Max.$$

oder

$$\frac{a}{x} - \frac{b}{1-x} - \frac{(a+b+1)(q_1-q)}{1-q_1+(q_1-q)x} = 0$$

sein.

Die letztere Gleichung reducirt sich auf

$$5)\qquad (q_1-q)x^2 - (ap_1+bp+q_1-q)x = -ap_1,$$

woraus

$$6)\qquad x = \frac{ap_1+bp+q_1-q-\sqrt{-4ap_1(q_1-q)+(ap_1+bp+q-q)^2}}{2(q_1-q)}$$

folgt. Sind a und b grosse Zahlen, so kann in 5) $q_1-q=0$ gesetzt werden, in welchem Falle man

$$7)\qquad x = \frac{ap_1}{ap_1+bp}$$

oder

$$8)\qquad x = \frac{\frac{a}{p}}{\frac{a}{p}+\frac{b}{p_1}}$$

erhält.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ω, dass die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses E innerhalb der Grenzen ϱ_0 und ϱ_1 liegt, lässt sich nun mit Hilfe des Ausdruckes für ω_x leicht ermitteln. Nach dem Princip der totalen Wahrscheinlichkeit ist nämlich

$$\omega = \omega_{\varrho_0} + \omega_{\varrho_0+dx} + \cdots + \omega_{\varrho_1-dx} + \omega_{\varrho_1}$$

und daher

$$9)\qquad \omega = \frac{\int_{\varrho_0}^{\varrho_1} x^a(1-x)^b(1-q_1+(q_1-q)x)^{-(a+b+1)}\,dx}{\int_0^1 x^a(1-x)^b(1-q_1+(q_1-q)x)^{-(a+b+1)}\,dx}.$$

Sind a und b nur kleine Zahlen, so führt die directe Integration zur Berechnung von ω. Anders verhält es sich, wenn a und b gross sind; denn in diesem Falle muss, ganz wie bei Auswerthung der bestimmten Integrale in I. zu Näherungsformeln gegriffen werden.

Wir beachten zunächst, dass

$$x^a(1-x)^b(1-q_1+(q_1-q)x)^{-(a+b+1)}\,dx$$
$$=(1-q_1)^{-(a+b+1)}x^a(1-x)^b(1+kx)^{-(a+b+1)}\,dx,$$

wenn

$$10)\qquad \frac{q_1-q}{1-q}=k$$

gesetzt wird, und finden damit weiter

$$x^a(1-x)^b(1-q_1+(q_1-q)x)^{-(a+b+1)}\,dx$$
$$=\frac{1}{(1-q_1)^{a+b+1}}\left(\frac{x}{1+kx}\right)^a\left(\frac{1-x}{1+kx}\right)^b\frac{dx}{1+kx}$$
$$=\frac{1+kx}{(1+k)^a(1-q_1)^{a+b+1}}\left(\frac{(1+k)x}{1+kx}\right)^a\left(1-\frac{(1+k)x}{1+kx}\right)^b\frac{dx}{(1+kx)^2}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in 9), so folgt

$$11)\qquad \omega=\frac{\int\limits_{\varrho_0}^{\varrho}[1+kx]\left(\frac{(1+k)x}{1+kx}\right)^a\left(1-\frac{(1+k)x}{1+kx}\right)^b\frac{dx}{(1+kx)^2}}{\int\limits_0^1[1+kx]\left(\frac{(1+k)x}{1+kx}\right)^a\left(1-\frac{(1+k)x}{1+kx}\right)^b\frac{dx}{(1+kx)^2}}.$$

Nach einem bekannten Satze der Integralrechnung ist aber

$$\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,\varphi(x)\,dx=f[\alpha+\varepsilon(\beta-\alpha)]\int\limits_\alpha^\beta\varphi(x)\,dx,$$

wo ε ein positiver echter Bruch ist. Wenden wir diesen Satz auf 11) an, so erhalten wir

$$12)\qquad \omega=\frac{1+k[\varrho_0+\varepsilon(\varrho_1-\varrho_0)]}{1+\varepsilon_1 k}\,\frac{\int\limits_{\varrho_0}^{\varrho_1}\left(\frac{(1+k)x}{1+kx}\right)^a\left(1-\frac{(1+k)x}{1+kx}\right)^b\frac{dx}{(1+kx)^2}}{\int\limits_0^1\left(\frac{(1+k)x}{1+kx}\right)^a\left(1-\frac{(1+k)x}{1+kx}\right)^b\frac{dx}{(1+kx)^2}}.$$

Wird nun

$$\frac{(1+k)x}{1+kx}=z,\quad dx=\frac{(1+kx)^2}{1+k}\,dz$$

und

$$\frac{1+k[\varrho_0+\varepsilon(\varrho_1-\varrho_0)]}{1+\varepsilon_1 k}=1+\varepsilon'$$

gesetzt, in welchem Falle

$$\varepsilon'<k\varrho_1,$$

so folgt endlich

$$13)\qquad \omega = (1+\varepsilon')\frac{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} z^a (1-z)^b\,dz}{\int_0^1 z^a (1-z)^b\,dz},$$

wenn

$$\lambda_0 = \frac{(1+k)\varrho_0}{1+k\varrho_0},\quad \lambda_1 = \frac{(1+k)\varrho_1}{1+k\varrho_1}$$

gesetzt wird.

Mit der Aufstellung der Gleichung 13) ist unsere Aufgabe auf eine bekannte zurückgeführt worden. Behufs der numerischen Berechnung von ω schlagen wir aber jetzt folgendes Verfahren ein.

Nimmt man für $\int_0^1 z^a (1-z)^b dz$ seinen Werth $\frac{a!\,b!}{(a+b+1)!}$ und setzt

$$z = \frac{a}{s} - t,\quad 1-z = \frac{b}{s} + t,$$

wo s für $a+b$ steht, so folgt

$$14)\qquad \omega = (1+\varepsilon')\frac{(s+1)!\,a^a b^b}{a!\,b!\,s^s}\int_{\frac{a}{s}-\lambda_1}^{\frac{a}{s}-\lambda_0}\left(1-\frac{s}{a}t\right)^a\left(1+\frac{s}{b}t\right)^b dt.$$

Wir stellen jetzt die Gleichung

$$\left(1-\frac{s}{a}t\right)^a\left(1+\frac{s}{b}t\right)^b = e^{k_1 t + k_2 t^2 + k_3 t^3 + \dots}$$

auf und finden, wenn beiderseits die Logarithmen genommen werden und sodann nach t differentiirt wird,

$$-\frac{s}{1-\frac{s}{a}t} + \frac{s}{1+\frac{s}{b}t} = k_1 + 2k_2 t + 3k_3 t^2 + \dots$$

Indem man die linke Seite dieser Gleichung nach steigenden Potenzen von t entwickelt, folgt

$$-s\left[1+\frac{s}{a}t+\frac{s^2}{a^2}t^2+\dots\right] + s\left[1-\frac{s}{b}t+\frac{s^2}{b^2}t^2-\dots\right] = k_1 + 2k_2 t + 3k_3 t^2 + \dots$$

oder reducirt

$$-\frac{s^3}{ab}t - s^3\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)t^2 - s^4\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\right)t^3 - \dots = k_1 + 2k_2 t + 3k_3 t^2 + \dots,$$

woraus sich die unbekannten Coefficienten k ergeben, nämlich

$$k_1 = 0,$$
$$k_2 = -\frac{s^3}{2ab},$$
$$k_3 = -\frac{s^3}{3}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right),$$
$$k_4 = -\frac{s^4}{4}\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}\right),$$
$$\vdots$$

Damit folgt aber

$$15)\quad \omega = (1 + \varepsilon') \frac{(s+1)!\, a^a\, b^b}{a!\, b!\, s^s} \int_{\frac{a}{s} - \lambda_1}^{\frac{a}{s} - \lambda_0} e^{-\frac{s^3}{2ab}t^2 - \frac{s^3}{3}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)t^3 - \frac{s^4}{4}\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}\right)t^4 \cdots} dt.$$

Führt man, um abzukürzen, die Bezeichnung

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{1}{a^2}\left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2\right) = \frac{\zeta_2}{a^2},$$
$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} = \frac{1}{a^3}\left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^3\right) = \frac{\zeta_3}{a^3},$$
$$\frac{1}{a^4} - \frac{1}{b^4} = \frac{1}{a^4}\left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^4\right) = \frac{\zeta_4}{a^4},$$
$$\vdots$$

ein und entwickelt den unter dem Integralzeichen stehenden Ausdruck in eine Reihe, so folgt

$$e^{-\frac{s^3}{2ab}t^2 - \frac{s^3}{3}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)t^3 - \frac{s^4}{4}\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}\right)t^4 - \cdots}$$
$$= 1 - \left[\frac{s^3}{2ab}t^2 + \frac{\zeta_2}{3a^2}s^3t^3 + \frac{\zeta_3}{4a^3}s^4t^4 + \ldots\right]$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{s^3}{2ab}t^2 + \frac{\zeta_2}{3a^2}s^3t^3 + \frac{\zeta_3}{4a^3}s^4t^4 + \ldots\right]^2$$
$$- \frac{1}{3!}\left[\frac{s^3}{2ab}t^2 + \frac{\zeta_2}{3a^2}s^3t^3 + \frac{\zeta_3}{4a^3}s^4t^4 + \ldots\right]^3$$
$$\vdots$$

Entwickelt man die in den Klammern stehenden Ausdrücke, so erhält man endlich

$$16)\quad \omega = (1+\varepsilon')\frac{(s+1)!\,a^a\,b^b}{a!\,b!\,s^s}\Bigg\{\int\limits_{\frac{a}{s}-\lambda_1}^{\frac{a}{s}-\lambda_0} e^{-\frac{s^3}{2ab}t^2}\,dt$$

$$-\Big[\frac{\zeta_2}{3.4.a^2}s^3t^4+\frac{\zeta_3}{4.5.a^3}s^4t^5+\dots$$

$$-\Big(\frac{\zeta_2}{2.3.6.a^3b}s^6t^6+\frac{\zeta_3}{2.4.7.a^4b}s^7t^7+\dots\Big)$$

$$+\frac{1}{2!}\Big(\frac{\zeta_2}{2^2.3.8.a^4b^2}s^9t^8+\frac{\zeta_3}{2^2.4.9.a^5b^2}s^{10}t^9+\dots\Big)$$

$$-\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\Big]_{\frac{a}{s}-\lambda_1}^{\frac{a}{s}-\lambda_0}\Bigg\}.$$

Soll die soeben abgeleitete Formel zur Berechnung von ω brauchbar sein, so müssen die auf der rechten Seite stehenden Reihen für die Integrationsgrenzen stark convergent sein. Dies ist im Allgemeinen aber **nur** dann der Fall, wenn für die Grenzwerthe von t

$$\frac{s^3}{2ab}t^2 \overline{\gtrless} 1.$$

Setzt man ein **sehr grosses** s voraus, so ist der Werth dieser Reihen **nur klein** und kann vernachlässigt werden. In diesem Falle hat man sodann

$$17)\qquad \omega = (1+\varepsilon')\frac{(s+1)!\,a^a\,b^b}{a!\,b!\,s^s}\int\limits_{\frac{a}{s}-\lambda_1}^{\frac{a}{s}-\lambda_0} e^{-\frac{s^3}{2ab}t^2}\,dt.$$

Wird jetzt

$$t = \gamma\sqrt{\frac{2ab}{s^3}}$$

genommen, so geht 17) in

$$\omega = (1+\varepsilon')\frac{(s+1)!\,a^a\,b^b}{a!\,b!\,s^s}\sqrt{\frac{2ab}{s^3}}\int\limits_{\gamma_0}^{\gamma_1} e^{-\gamma^2}\,d\gamma$$

über, wo

$$\gamma_0 = \sqrt{\frac{as}{2b}} - \lambda_1\sqrt{\frac{s^3}{2ab}},\quad \gamma_1 = \sqrt{\frac{as}{2b}} - \lambda_0\sqrt{\frac{s^3}{2ab}}$$

ist. Nun ist aber für ein grosses s angenähert

$$\frac{(s+1)!\,a^a\,b^b}{a!\,b!\,s^s}\sqrt{\frac{2ab}{s^3}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

mithin endlich

$$18)\qquad \omega = \tfrac{1}{2}(1+\varepsilon')\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\gamma_1} e^{-\gamma^2}d\gamma - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\gamma_0} e^{-\gamma^2}d\gamma\right\}.$$

In den Fällen, wo

$$\frac{s^3}{2ab}\left(\frac{a}{s}-\lambda_0\right)^2 > 1,$$

ist die Anwendung der Formel 16) nicht immer ausgeschlossen; allein sie führt sodann auf sehr langwierige Rechnungen, die es vortheilhafter erscheinen lassen, ω mit Hilfe der mechanischen Quadratur nach Formel 13) zu bewirken.

Am Schlusse vorliegenden Abschnittes möchte ich noch darauf aufmerksam machen, dass die Einschränkung der Formel 16) bez. 18) auch für das Bernoulli'sche Theorem gilt, so weit es sich auf die Wahrscheinlichkeit von Hypothesen bezieht. Es genügt also nicht allein, wie man bisher fast allgemein angenommen hat, dass s sehr gross ist, sondern es muss noch als weitere Bedingung hinzutreten, dass

$$\frac{s^3}{2ab}\left(\frac{a}{s}-l\right)^2 \leqq 1$$

ist.

Auch ist die erweiterte Formel, welche H. Laurent in seinem „Traité du calcul des probabilités" für die Wahrscheinlichkeit von Hypothesen giebt, sowie der gleichfalls dort abgeleitete obere Grenzwerth für diese Wahrscheinlichkeit, wie aus einer Vergleichung mit den vorstehenden Entwickelungen sofort folgt, nicht genau.

Aufgaben der soeben behandelten Art enthält die mathematische Statistik in grosser Menge. Hier ein einfaches Beispiel.

Eine Gesammtheit, deren Glieder nur durch Tod ausscheiden, besteht nach Wegrechnung der im Laufe des Jahres neu aufgetretenen Activen und Invaliden am Schlusse des Jahres aus 250 invaliden und 9750 activen Personen. Es wird mit Rücksicht auf diese Gesammtheit gefragt:

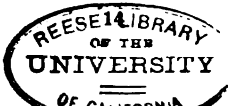
a) nach der wahrscheinlichen Anzahl m der am Anfange des Jahres vorhandenen Activen,

b) nach der Wahrscheinlichkeit ω, dass m von der wahren Anzahl nicht mehr als 1 Procent abweicht,

c) nach dem wahrscheinlichsten Werthe v der Wahrscheinlichkeit, am Anfange des Jahres invalid zu sein, und

d) nach der Wahrscheinlichkeit ω', dass v von dem wahren Werthe ebenfalls nicht mehr als 1 Procent abweicht.

Die Lebenswahrscheinlichkeit innerhalb des in Betracht kommenden Zeitabschnitts sei für Active $l = 0{,}99301$ und für Invalide $l_1 = 0{,}94870$, während die Invaliditätswahrscheinlichkeit $i = 0{,}00124$ sein soll.



Auflösung.

In vorliegender Aufgabe bilden das Sterben und das Invalidwerden die Ereignisse, welche sich der Beobachtung der ursprünglich, d. h. der am Anfange des Jahres vorhanden gewesenen Activen hindernd in den Weg stellen. Die Wahrscheinlichkeit p, dass jeder Activitätsfall beobachtet werden kann, fällt daher mit der Activitätswahrscheinlichkeit zusammen und ist nach Zeuner

$$p = l - \frac{2li}{1+l}.$$

Durch Einsetzen der Werthe für l und i in diese Formel erhält man für die Berechnung von m

$$p = 0{,}99177, \quad q = 0{,}00823,$$

während aus der Aufgabe direct

$$a = 9750$$

folgt. Nach I, Formel 4b) ist daher

$$\frac{9750}{0{,}99177} - 1 < m < \frac{9750}{0{,}99177},$$

folglich

$$m = 9830.$$

Ferner hat man zur Bestimmung von ω

$$\alpha = 9830, \quad \beta = 80, \quad n_0 = 80, \quad n_1 = 98,$$

womit

$$P_1 = 1$$

und nach I, Formel 22)

$$P_2 = \frac{1{,}08\ldots}{10^{19}}$$

gefunden wird. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der in der That am Anfange des Jahres vorhanden gewesenen Activen nicht mehr als 1 Procent grösser oder kleiner als m ist, ist somit

$$\omega = 1 - \frac{1{,}08\ldots}{10^{19}}.$$

Für die Berechnung des wahrscheinlichsten Werthes v der Wahrscheinlichkeit des Invalidseins am Anfange des Jahres hat man

$$a = 250, \quad b = 9750.$$

Die Wahrscheinlichkeit p, dass jeder Invaliditätsfall (Ereigniss E) beobachtet werden kann, fällt hier mit der Lebenswahrscheinlichkeit der Invaliden zusammen und ist folglich

$$p = 0{,}94870, \quad q = 0{,}05130,$$

während die Wahrscheinlichkeit p_1, dass jeder Activitätsfall (Ereigniss F) beobachtet werden kann, nach dem Vorstehenden

$$p_1 = 0{,}99177, \quad q_1 = 0{,}00823$$

ist. Damit folgt nach II, Formel 7)

$$v = 0{,}02611.$$

Ferner ist, da v vom wahren Werthe nicht mehr als 1 Procent abweichen soll,

$$\varrho_0 = 0{,}02585, \quad \varrho_1 = 0{,}02637,$$

während nach II, 10)

$$k = -0{,}04540$$

ist. Damit ergiebt sich aber

$$\lambda_0 = 0{,}02471, \quad \lambda_1 = 0{,}02520,$$

sowie

$$\frac{s^3}{2ab}\left(\frac{a}{s} - \lambda_0\right)^2 = 0{,}01725, \quad \frac{s^3}{2ab}\left(\frac{a}{s} - \lambda_1\right)^2 = 0{,}00821,$$

womit für vorliegenden Fall die Anwendbarkeit der Formel 16) bez. 18) unter II erwiesen ist.

Da nun ferner

$$\gamma_0 = -0{,}09058, \quad \gamma_1 = 0{,}13134$$

gefunden wird, so folgt endlich aus II, 18)

$$\omega' = \tfrac{1}{2}(1 + \varepsilon')[0{,}14734 + 0{,}10192]$$

oder

$$\omega' = 0{,}12463 - 0{,}00015\,\varepsilon_0,$$

wo $\varepsilon_0 < 1$ ist.

XI.

Ueber die Krümmungsmittelpunkte der Polbahnen.

Von

MARTIN GRÜBLER,

Privatdocent in Zürich.

Hierzu Taf. VII Fig. 1 u. 2.

Im Folgenden sollen die Krümmungsradien, sowie die Lagen der Krümmungsmittelpunkte der Polbahnen ermittelt werden, wenn die Bewegung des starren ebenen Systems durch die Enveloppen (e_1) und (e_2) zweier Systemcurven (c_1) und (c_2) (Taf. VII Fig. 1) gegeben ist. Sind K_1 und K_2 die Krümmungsmittelpunkte der Enveloppen in der gegebenen Lage des Systems, C_1 und C_2 diejenigen der Systemcurven, dann liegt das Momentancentrum (der Pol) der augenblicklichen Bewegung bekanntlich im Schnitt der beiden Berührungsnormalen $K_1 B_1$ und $K_2 B_2$. Die Polbahntangente MT erhält man mittels der Bobillier'schen Construction*, indem man $\angle K_1 M T = \angle K_1 M N$ anträgt; die zu MT senkrechte Polbahnnormale $M K_p$ bildet mit der Geraden $K_1 K_2$ einen spitzen Winkel, welcher mit β bezeichnet werden mag. Ertheilen wir dem System eine unendlich kleine Bewegung, derart, dass die Berührungspunkte B_1 und B_2 nach B'_1, beziehungsweise B'_2, folglich die Centren C_1 und C_2 nach C'_1, beziehungsweise C'_2 rücken, so wandert das Momentancentrum offenbar auf der Polbahntangente weiter und liegt im Schnittpunkte M' der benachbarten Berührungsnormalen $K_1 B'_1$ und $K_2 B'_2$. Die Polbahntangente und -Normale im Punkte M' findet sich wie vorher mittels der Bobillier'schen Construction; im Schnittpunkte K_p der beiden benachbarten Polbahnnormalen erhält man dann den gesuchten Krümmungsmittelpunkt der sogenannten festen Polbahn, d. i. des geometrischen Ortes der Momentancentren M.

Um einen Ausdruck für den Krümmungshalbmesser $K_p M = \varrho_p$ zu erlangen, gehen wir von der Relation

$$d\sigma = \varrho_p . d\tau$$

* Vergl. hierüber: Aronhold, Kinematische Mittheilungen. Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen. Berlin 1872. S. 144.

aus, in welcher $d\sigma$ das Element MM' der festen Polbahn und $d\tau$ den Contingenzwinkel bezeichnet. Weil aber während der unendlich kleinen Lagenänderung des Systems die Gerade K_1K_2 ihre Lage beibehält, so ist $d\tau = d\beta$, also

$$\frac{1}{\varrho_p} = \frac{d\beta}{d\sigma}.$$

Unter Berücksichtigung der sofort aus Fig. 1 sich ergebenden Beziehungen $\alpha_1 = \varphi_1 + \beta$, $\alpha_2 = \varphi_2 + \beta$, in welchen φ_1 und φ_2 die im gleichen Sinne gemessenen Winkel der Strahlen MK_1 und MK_2 mit der Polbahnnormale bezeichnen, erhält man daher weiter

$$\frac{1}{\varrho_p} = \frac{d\alpha_1}{d\sigma} - \frac{d\varphi_1}{d\sigma} = \frac{d\alpha_2}{d\sigma} - \frac{d\varphi_2}{d\sigma}.$$

Ziehen wir um K_1, bezw. K_2 die unendlich kleinen Kreisbögen MM'_1 und MM'_2 (Fig. 1), so ist offenbar $\angle M'_1MM' = \varphi_1$, $\angle M'_2MM' = \varphi_2$, folglich

$$MM'_1 = d\sigma . \cos\varphi_1, \quad MM'_2 = d\sigma . \cos\varphi_2.$$

Setzen wir ferner $MK_1 = r_1$, $MK_2 = r_2$ und berücksichtigen, dass

$$MM'_1 = r_1 . d\alpha_1, \quad MM'_2 = r_2 . d\alpha_2,$$

so erhalten wir die beiden Beziehungen

$$r_1\,d\alpha_1 = d\sigma . \cos\varphi_1, \quad r_2\,d\alpha_2 = d\sigma . \cos\varphi_2;$$

durch deren Benutzung gehen aus den beiden für $\frac{1}{\varrho_p}$ oben gefundenen Ausdrücken die Relationen

$$1)\qquad \frac{d\varphi_1}{d\sigma} = \frac{\cos\varphi_1}{r_1} - \frac{1}{\varrho_p}, \quad \frac{d\varphi_2}{d\sigma} = \frac{\cos\varphi_2}{r_2} - \frac{1}{\varrho_p}$$

hervor. Die Grössen $d\varphi_1$ und $d\varphi_2$ sind nun an eine Gleichung gebunden, zu welcher wir auf folgendem Wege gelangen.

Ist W der Durchmesser des Wendekreises für die momentane Bewegung des Systems und setzt man $MC_1 = R_1$, $MC_2 = R_2$, so bestehen bekanntlich* die beiden Relationen

$$2)\qquad \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r_1}\right)\cos\varphi_1 = \frac{1}{W}, \quad \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{r_2}\right)\cos\varphi_2 = \frac{1}{W},$$

aus welchen durch Elimination von W und nach Einführung der Abkürzungen $r_1 - R_1 = \overline{K_1C_1} = \varrho_1$, $r_2 - R_2 = \overline{K_2C_2} = \varrho_2$ die eine Gleichung

$$3)\qquad \varrho_2 r_1 R_1 \cos\varphi_2 = \varrho_1 r_2 R_2 \cos\varphi_1$$

hervorgeht. Differenziren wir dieselbe und ziehen in Erwägung, dass ϱ_1 und ϱ_2 constant sind, weil die Krümmungsmittelpunkte C_1 und C_2 während der unendlich kleinen Lagenänderung des Systems sich auf Kreisbögen um K_1, beziehentlich K_2 bewegen, so folgt wegen der Beziehungen

* Vergl. u. A.: Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte. 2. Aufl., I. Thl. S. 468.

$$d\varrho_1 = dr_1 - dR_1 = 0, \quad d\varrho_2 = dr_2 - dR_2 = 0$$

die Gleichung

$$\varrho_2[(r_1 + R_1)\cos\varphi_2\, dr_1 - r_1 R_1 \sin\varphi_2\, d\varphi_2]$$
$$= \varrho_1[(r_2 + R_2)\cos\varphi_1\, dr_2 - r_2 R_2 \sin\varphi_1\, d\varphi_1].$$

Dieselbe lässt sich jedoch von den unendlich kleinen Grössen befreien, wenn wir benutzen, dass $M'_1 M' = dr_1$, $M'_2 M' = dr_2$ und dass aus den unendlich kleinen Dreiecken $MM'M'_1$ und $MM'M'_2$ sich

$$d\sigma . \sin\varphi_1 = M'_1 M' = dr_1, \quad d\sigma . \sin\varphi_2 = M'_2 M' = dr_2$$

ergiebt. Man erhält dann zunächst, indem man die vorstehende Gleichung durch $\varrho_1 \varrho_2 . d\sigma$ dividirt,

$$\frac{r_1 R_1}{\varrho_1}\sin\varphi_2 \frac{d\varphi_2}{d\sigma} - \frac{r_2 R_2}{\varrho_2}\sin\varphi_1 \frac{d\varphi_1}{d\sigma} = \frac{r_1 + R_1}{\varrho_1}\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \frac{r_2 + R_2}{\varrho_2}\sin\varphi_2\cos\varphi_1$$

und nach Substitution der Werthe 1) für $\frac{d\varphi_1}{d\sigma}$ und $\frac{d\varphi_2}{d\sigma}$

$$\frac{1}{\varrho_p}\left\{\frac{r_2 R_2}{\varrho_2}\sin\varphi_1 - \frac{r_1 R_1}{\varrho_1}\sin\varphi_2\right\}$$
$$= \frac{r_2 R_2}{r_1 \varrho_2}\sin\varphi_1\cos\varphi_1 - \frac{r_1 R_1}{r_2 \varrho_1}\sin\varphi_2\cos\varphi_2 + \frac{r_1 + R_1}{\varrho_1}\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \frac{r_2 + R_2}{\varrho_2}\sin\varphi_2\cos\varphi_1.$$

Diese Gleichung gestattet aber noch weitere Vereinfachungen. Zufolge 3) ist

$$\frac{r_2 R_2}{r_1 \varrho_2}\cos\varphi_1 = \frac{R_1}{\varrho_1}\cos\varphi_2, \quad \frac{r_1 R_1}{r_2 \varrho_1}\cos\varphi_2 = \frac{R_2}{\varrho_2}\cos\varphi_1;$$

es ergiebt sich daher sofort

$$\frac{1}{\varrho_p}\left\{\frac{r_2 R_2}{\varrho_2}\sin\varphi_1 - \frac{r_1 R_1}{\varrho_1}\sin\varphi_2\right\}$$
$$= \frac{r_1 + 2R_1}{\varrho_1}\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \frac{r_2 + 2R_2}{\varrho_2}\sin\varphi_2\cos\varphi_1.$$

Dividiren wir diese Gleichung mit $\cos\varphi_1 . \cos\varphi_2$ und beachten, dass auf Grund der Relationen 2)

$$\frac{r_1 R_1}{\varrho_1 \cos\varphi_1} = \frac{r_2 R_2}{\varrho_2 \cos\varphi_2} = W$$

ist, so erhalten wir schliesslich

$$\text{Ia)} \quad \frac{W}{\varrho_p}(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2) = \frac{r_1 + 2R_1}{\varrho_1}\tan\varphi_1 - \frac{r_2 + 2R_2}{\varrho_2}\tan\varphi_2$$

als Gleichung zur Berechnung von ϱ_p.

Der Krümmungsradius ϱ_π der beweglichen Polbahn, also des geometrischen Ortes der Punkte im beweglichen System, welche nach einander Momentancentren werden, ergiebt sich, indem wir vorstehende Gleichung auf die umgekehrte Bewegung anwenden. Die letztere kommt dadurch zu Stande, dass wir das bewegliche System zum ruhenden machen und umgekehrt, dass also die Punkte K und C ihre Rollen

wechseln. Demgemäss haben wir in Ia) nur r mit R zu vertauschen* und erhalten dann sofort

$$\text{Ib)} \qquad \frac{W}{\varrho_\pi}(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2) = \frac{R_1 + 2r_1}{\varrho_1}\tan\varphi_1 - \frac{R_2 + 2r_2}{\varrho_2}\tan\varphi_2.$$

Subtrahirt man erstere Gleichung von letzterer, so ergiebt sich

$$W(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)\left(\frac{1}{\varrho_\pi} - \frac{1}{\varrho_p}\right) = \frac{r_1 - R_1}{\varrho_1}\tan\varphi_1 - \frac{r_2 - R_2}{\varrho_2}\tan\varphi_2$$
$$= \tan\varphi_1 - \tan\varphi_2,$$

also die bekannte Beziehung

$$\text{4)} \qquad \frac{1}{\varrho_\pi} - \frac{1}{\varrho_p} = \frac{1}{W},$$

welche aussagt, dass der Krümmungsmittelpunkt der beweglichen Polbahn eine Bahn beschreibt, deren Krümmungsmittelpunkt mit dem der festen Polbahn momentan zusammenfällt; denn die feste Polbahn kann als die Enveloppe der beweglichen angesehen werden.

Die Gleichungen Ia) und Ib) erhalten jedoch eine etwas andere Gestalt, sobald das Momentancentrum M nicht ausserhalb der Strecken K_1C_1 und K_2C_2 liegt, wie in Fig. 1 und bei der Entwickelung vorläufig angenommen wurde, sondern innerhalb der einen oder beider Strecken, weil die Gleichungen 2) Aenderungen in den Vorzeichen erleiden. Um nun nicht in den verschiedenen hier möglichen Fällen die Ausdrücke für die Krümmungsradien der Polbahnen einzeln aufstellen zu müssen, formen wir die Gleichungen Ia) und Ib) entsprechend um, beziehentlich bringen sie auf eine solche Gestalt, welche von der erwähnten Lagenänderung des Momentancentrums nicht beeinflusst wird. Substituiren wir in der Gleichung Ia) auf der rechten Seite

$$\frac{1}{\varrho_1\cos\varphi_1} = \frac{W}{r_1R_1}, \quad \frac{1}{\varrho_2\cos\varphi_2} = \frac{W}{r_2R_2},$$

so erhalten wir

$$\frac{W}{\varrho_p}(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2) = W\,\frac{r_1 + 2R_1}{r_1R_1}\sin\varphi_1 - W\,\frac{r_2 + 2R_2}{r_2R_2}\sin\varphi_2$$
$$= W\left(\frac{1}{R_1} + \frac{2}{r_1}\right)\sin\varphi_1 - W\left(\frac{1}{R_2} + \frac{2}{r_2}\right)\sin\varphi_2;$$

aus dieser Gleichung entfernen wir mittels der Relationen 2) die Grössen $\frac{1}{R_1}$ und $\frac{1}{R_2}$, wodurch wir finden, dass

* Für die umgekehrte Bewegung fällt bekanntlich der Wendepol auf die andere Seite der Polbahntangente; es würde demnach in Ia) an Stelle von φ_1 und φ_2 $180^0 + \varphi_1$, bezw. $180^0 + \varphi_2$ gesetzt werden müssen. Da jedoch $\tan(180^0 + \varphi) = \tan\varphi$, so hat die Lagenänderung des Wendepoles auf die Gleichung keinen Einfluss.

$$\frac{W}{\varrho_p}(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2) = W\left(\frac{3}{r_1} + \frac{1}{W\cos\varphi_1}\right)\sin\varphi_1 - W\left(\frac{3}{r_2} + \frac{W}{\cos\varphi_2}\right)\sin\varphi_2$$

$$= 3W\left(\frac{\sin\varphi_1}{r_1} - \frac{\sin\varphi_2}{r_2}\right) - (\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2),$$

folglich

IIa) $$\frac{1}{\varrho_p} = \frac{3}{\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2}\left(\frac{\sin\varphi_1}{r_1} - \frac{\sin\varphi_2}{r_2}\right) + \frac{1}{W}.$$

Verstehen wir in dieser Gleichung unter φ_1 und φ_2 die Winkel, welche die vom Momentancentrum M nach den Krümmungsmittelpunkten K_1 und K_2 gezogenen Strahlen mit dem von M nach dem Wendepole gezogenen Strahle in gleichem Sinne gemessen einschliessen, so bleibt die Gleichung IIa) dieselbe, welche Lagen C_1 und C_2 gegenüber M haben, weil die Grössen R in ihr nicht auftreten; sie umfasst demnach alle möglichen Fälle.

Durch die analoge Umformung geht Ib) über in

IIb) $$\frac{1}{\varrho_\pi} = \frac{3}{\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2}\left(\frac{\sin\varphi_1}{R_1} - \frac{\sin\varphi_2}{R_2}\right) - \frac{1}{W}$$

und hierin bezeichnen φ_1 und φ_2 dieselben Winkel wie in IIa).

Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{3}{\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2}\left(\frac{\sin\varphi_1}{r_1} - \frac{\sin\varphi_2}{r_2}\right) = \frac{1}{r_0},$$

so bedeutet in der Gleichung

5) $$\frac{1}{\varrho_p} - \frac{1}{r_0} = \frac{1}{W}$$

r_0 den Abstand des Krümmungsmittelpunktes K_0 der Bahn, welche der mit K_p momentan zusammenfallende Systempunkt beschreibt. Charakteristisch ist nun, dass sich dieser Punkt K_0 mittels einer sehr einfachen geometrischen Construction finden lässt. Um auf diese Construction geführt zu werden, formen wir zunächst den Ausdruck für r_0 entsprechend um. Ziehen wir nämlich (Taf. VII Fig. 2) $MD \perp MN$, so folgt aus den Dreiecken MK_1D und MK_2D

$$r_1 = \frac{\overline{MD}.\cos\varepsilon}{\sin\alpha_1}, \quad r_2 = \frac{\overline{MD}.\cos\varepsilon}{\sin\alpha_2},$$

falls zur Abkürzung $\angle MND = \varepsilon$ gesetzt wird; andererseits aus den Dreiecken K_1MN und K_2MN

$$\alpha_1 = \angle K_1MN + \varepsilon, \quad \alpha_2 = \angle K_2MN + \varepsilon.$$

Auf Grund der Bobillier'schen Construction ist aber

$$\angle TMK_1 = \angle K_2MN = 90^\circ - \varphi_1,$$

also

$$\angle K_1MN = 90^\circ - \varphi_2;$$

infolge dessen wird

$$\alpha_1 = 90^\circ + \varepsilon - \varphi_2, \quad \alpha_2 = 90^\circ + \varepsilon - \varphi_1,$$

demnach

$$\frac{\sin\varphi_1}{r_1}-\frac{\sin\varphi_2}{r_2}=\frac{1}{\overline{MD}.\cos\varepsilon}(\sin(90^0+\varepsilon-\varphi_2)\sin\varphi_1-\sin(90^0+\varepsilon-\varphi_1)\sin\varphi_2)$$

$$=\frac{\cos(\varepsilon-\varphi_2)\sin\varphi_1-\cos(\varepsilon-\varphi_1)\sin\varphi_2}{\overline{MD}.\cos\varepsilon}$$

$$=\frac{\sin(\varphi_1-\varphi_2)}{\overline{MD}}.$$

und

$$6)\qquad \frac{1}{r_0}=\frac{3\sin(\varphi_1-\varphi_2)}{\overline{MD}.(\tan\varphi_1-\tan\varphi_2)}=\frac{3\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{\overline{MD}}.$$

Sonach ergiebt sich K_0 sofort, indem wir $MD'=\frac{1}{3}MD$ machen und durch D' eine Parallele zu MN ziehen; dann sind die Schnittpunkte K_{01} und K_{02} derselben mit den Strahlen MK_1 und MK_2 die Projectionen des Punktes K_0 auf diese Strahlen; damit ist aber auch K_0 bestimmt. Sucht man nun in bekannter Weise unter Benutzung des Wendepoles zu K_0 als Krümmungsmittelpunkt den zugehörigen Systempunkt, so ist letzterer der Krümmungsmittelpunkt K_p der ruhenden Polbahn. Bestimmt man ferner zu K_p als Krümmungsmittelpunkt den zugehörigen Systempunkt, so ist letzterer und zwar auf Grund der Relation

$$\frac{1}{\varrho_\pi}-\frac{1}{\varrho_p}=\frac{1}{W}$$

der Krümmungsmittelpunkt K_π der beweglichen Polbahn.

Selbstredend lässt sich K_π auch direct ermitteln, indem man den Punkt C_0 aufsucht, d. i. denjenigen Systempunkt, dessen zugehöriges Bahnkrümmungscentrum sich momentan mit K_π in Deckung befindet. Bezeichnen wir den Abstand dieses Punktes C_0 vom Momentancentrum mit R_0, so ist zufolge IIb)

$$7)\qquad \frac{1}{\varrho_\pi}=\frac{1}{R_0}-\frac{1}{W},$$

worin

$$\frac{1}{R_0}=\frac{3}{\tan\varphi_1-\tan\varphi_2}\cdot\left(\frac{\sin\varphi_1}{R_1}-\frac{\sin\varphi_2}{R_2}\right)$$

gesetzt wurde; formt man letzteren Ausdruck in ganz ähnlicher Weise um, wie den für $\frac{1}{r_0}$, so erhält man schliesslich

$$8)\qquad \frac{1}{R_0}=\frac{3\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{\overline{ME}},$$

falls E den Schnittpunkt der Geraden C_1C_2 mit MD bezeichnet (Fig. 2). Man findet folglich C_0 in ganz analoger Weise wie K_0, indem man $\overline{ME}$ in drei Theile theilt und durch den ersten Theilpunkt E' eine Parallele zu MN zieht, welche letztere die beiden Strahlen MC_1 und MC_2 in C_{01}, bezw. C_{02} schneidet; die Senkrechten, welche man in C_{01} zu MC_{01} und in C_{02} zu MC_{02} errichtet, treffen sich auf der Polbahnnormalen in C_0.

Die Construction der beiden Punkte K_p und K_π kann jedoch noch weiter vereinfacht werden und zwar auf Grund der folgenden Ueberlegung. Die Krümmungsmittelpunkte der Systemcurven und diejenigen der Enveloppen der letzteren auf irgend einem Normalstrahl* bilden zwei perspectivische zusammenfallende Punktreihen, deren Doppelpunkte im Momentancentrum vereinigt liegen. Verbinden wir die Krümmungsmittelpunkte der Systemcurven sämmtlich mit E, die der Enveloppen mit D durch Strahlen, so erhalten wir zwei perspectivische Strahlbüschel; die einander entsprechenden Strahlen schneiden sich folglich auf einem Normalstrahl, dessen Richtung dieselbe ist, wie die der correspondirenden einander parallelen Strahlen in den Büscheln. Die Richtung der letzteren aber ist diejenige der Geraden $D'K_0$, wie später gezeigt werden soll; es reducirt sich deshalb die Construction der Krümmungsmittelpunkte der Polbahnen auf die nachstehenden einfachen Operationen.

Man ziehe MD senkrecht zu MN, mache $MD' = \frac{1}{3} MD$ und lege durch D' eine Parallele zu MN. Errichtet man in den Schnittpunkten K_{01} und K_{02} der letzteren Geraden mit den beiden Normalstrahlen MC_1 und MC_2 Senkrechte, so schneiden sich diese in K_0, einem Punkte der Polbahnnormalen. Trifft nun die Verbindungsgerade von K_0 mit D den durch M parallel zu $D'K_0$ gelegten Strahl in G, so schneidet die Verbindungsgerade EG auf der Polbahnnormalen den Krümmungsmittelpunkt K_p der festen Polbahn aus. Den Krümmungsmittelpunkt K_π der beweglichen Polbahn findet man dann sofort, indem man die Gerade DK_p bis zu ihrem Schnittpunkt H mit MG verlängert und die Gerade EH zieht; letztere schneidet die Polbahnnormale in K_π. Natürlich kann man mittels des Punktes C_0 zuerst auch K_π und dann K_p ermitteln.

Wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich wird, hat die Lage der Punkte B_1 und B_2 (Fig. 1), in denen die Systemcurven ihre Enveloppen momentan berühren, keinen Einfluss auf die Gestalt der Ausdrücke IIa) und IIb); es bleibt folglich die hier mitgetheilte Construction dieselbe, wenn die Punkte B_1 und B_2 mit C_1, bezw. C_2 zusammenfallen, die Bewegung des Systems also durch die Bahnen zweier Systempunkte bestimmt ist, oder wenn B_1 und B_2 mit K_1, bezw. K_2 sich decken, also die Bewegung dadurch erzeugt wird, dass zwei Curven der beweglichen Ebene immer durch zwei feste Punkte gehen.

Wenn dagegen die beiden Punkte C_1 und C_2 oder K_1 und K_2 ins Unendliche rücken, so vereinfachen sich die Ausdrücke für $\frac{1}{\varrho_p}$ und $\frac{1}{\varrho_\pi}$ ganz erheblich, weshalb diese Specialfälle hier noch Platz finden mögen.

---

* Wir nennen nach Aronhold (*ibid.* S. 132) jeden durch das Momentancentrum gehenden Strahl der beweglichen Ebene Normalstrahl.

1. Sind die beiden Systemcurven Geraden, liegen also C_1 und C_2 im Unendlichen, so ist $R_1 = R_2 = \infty$, folglich nach 2)

$$r_1 = -W.\cos\varphi_1, \quad r_2 = -W.\cos\varphi_2;$$

man erhält dann aus IIa)

$$\frac{1}{\varrho_p} = -\frac{3}{W} + \frac{1}{W} = -\frac{2}{W},$$

also

$$\varrho_p = -\frac{W}{2}$$

und damit aus 4)

$$\varrho_\pi = -W.$$

Diese beiden Resultate enthalten den Satz: Wird die Bewegung eines Systems dadurch erzeugt, dass zwei Systemgeraden längs zweier gegebener fester Curven gleiten, so liegt der Krümmungsmittelpunkt der festen Polbahn symmetrisch zum Mittelpunkt des Wendekreises und der Krümmungsmittelpunkt der beweglichen Polbahn symmetrisch zum Wendepol in Bezug auf das Momentancentrum.

2. Sind die beiden Enveloppen der Systemcurven gerade Linien, fallen also K_1 und K_2 in das Unendliche, so ist $r_1 = r_2 = \infty$, folglich nach 2)

$$R_1 = W\cos\varphi_1, \quad R_2 = W\cos\varphi_2;$$

dann ergiebt sich aus IIb)

$$\frac{1}{\varrho_\pi} = \frac{3}{W} - \frac{1}{W} = \frac{2}{W},$$

d. i.

$$\varrho_\pi = \frac{W}{2}$$

und damit aus 4)

$$\varrho_p = W.$$

Wir haben also den Satz: Wird die Bewegung eines ebenen Systems dadurch erzeugt, dass zwei Systemcurven längs zweier fester Geraden gleiten, so liegt der Krümmungsmittelpunkt der festen Polbahn im Wendepol und der der beweglichen Polbahn im Mittelpunkt des Wendekreises.

Ein bekanntes Beispiel für die letztere Bewegung liefert die sogenannte Hypocykloidenbewegung des Cardano (vergl. u. A.: Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, 2. Aufl., 1. Thl. S. 230). Zwei Punkte des Systems bewegen sich auf gegebenen Geraden; es fällt also B_1 mit C_1 und B_2 mit C_2 zusammen. Da in diesem besondern Falle ausserdem W constant ist, so sind die beiden Polbahnen Kreise, deren Radien gleich dem Durchmesser, bezw. dem Radius des Wendekreises werden. —

Mittels der gefundenen Ausdrücke für die Krümmungsradien der Polbahnen lässt sich leicht die Frage beantworten, welche Systembewegungen mit einer gegebenen ausser dem Momentancentrum die Krümmungsmittelpunkte der Polbahn gemeinsam haben. Nennen wir in Rücksicht auf möglichste Kürze der Ausdrucksweise nach Aronhold (*ibid.*

S. 138) jedes Viereck, welches von den beiden Krümmungsmittelpunkten C_1 und C_2 zweier Systemcurven und den Krümmungscentren K_1 und K_2 ihrer Enveloppen gebildet wird, ein Polviereck, so besteht unsere Aufgabe in der Ermittelung aller Polvierecke, bei denen das Momentancentrum und die Krümmungsmittelpunkte der Polbahnen gemeinschaftlich sind.

Zunächst wollen wir die geometrischen Eigenschaften aller derjenigen Polvierecke aufsuchen, deren Eckpunkte auf zwei gegebenen Normalstrahlen liegen. Wie Aronhold (*ibid.* S. 146) nachgewiesen hat, gehören die einander zugeordneten Punkte C und K auf zwei Normalstrahlen einem collinearen System an, dessen Collineationsaxe die Gerade MN (Fig. 2) ist. Es schneiden sich folglich die Verbindungsgeraden correspondirender Punktepaare, d. h. die beiden nicht mit den Normalstrahlen zusammenfallenden Polvierecksseiten sämmtlich auf der Geraden MN. Alle derartigen Polvierecke haben das Momentancentrum und den Wendepol gemeinsam. Diejenigen Polvierecke unter ihnen, welche auch die Krümmungsmittelpunkte der Polbahnen gemeinsam haben, besitzen ausserdem die Eigenschaft, dass die Verbindungsstrahlen der Punkte C des beweglichen Systems sämmtlich durch E, die Verbindungsstrahlen der zugeordneten Krümmungsmittelpunkte K durch D gehen müssen, dass also die beiden nicht mit den Normalstrahlen sich deckenden Seiten jedes solchen Polvierecks homologe Strahlen zweier perspectivischer Strahlbüschel, deren Träger in D, bezw. E liegen, sind. Man erkennt die Richtigkeit der letzteren Behauptung wie folgt. Eliminiren wir aus den drei Relationen 4), 5) und 7) $\frac{1}{W}$, so erhalten wir die beiden Beziehungen

$$\frac{1}{\varrho_p}-\frac{1}{r_0}=\frac{1}{\varrho_\pi}-\frac{1}{\varrho_p}, \quad \frac{1}{R_0}-\frac{1}{\varrho_\pi}=\frac{1}{\varrho_\pi}-\frac{1}{\varrho_p},$$

aus denen sich

$$\frac{1}{\varrho_p}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{R_0}+\frac{2}{r_0}\right), \quad \frac{1}{\varrho_\pi}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{R_0}+\frac{1}{r_0}\right)$$

ergiebt; substituiren wir hierin die aus 6) und 8) folgenden Werthe für $\frac{1}{r_0}$ und $\frac{1}{R_0}$, so finden wir die Ausdrücke

$$\frac{1}{\varrho_p}=\left(\frac{2}{MD}+\frac{1}{ME}\right)\cos\varphi_1\cos\varphi_2, \quad \frac{1}{\varrho_\pi}=\left(\frac{1}{MD}+\frac{2}{ME}\right)\cos\varphi_1\cos\varphi_2.$$

Berücksichtigen wir, dass für alle Polvierecke auf denselben Normalstrahlen φ_1 und φ_2 dieselben Werthe haben, so erhalten ϱ_p und ϱ_π dieselbe Grösse für diejenigen Polvierecke, bei denen MD und ME die gleichen Werthe besitzen; Letzteres ist aber der Fall bei allen Polvierecken, welche die vorerwähnte besondere Eigenschaft aufweisen.

Unter diesen Polvierecken ist das dem unendlich fernen Punkte der Collineationsaxe MN zugeordnete, nämlich $D_{01}D_{02}E_{02}E_{01}$ (Fig. 2) dadurch

ausgezeichnet, dass die Eckpunkte D_{01} und D_{02}, sowie E_{01} und E_{02} die Projectionen eines Paares entsprechender Punkte D_0, E_0 der Polbahnnormalen auf die beiden Normalstrahlen sind. Da nämlich

$$\triangle M K_{01} K_{02} \sim \triangle M D_{01} D_{02} \sim \triangle M E_{01} E_{02},$$

so schneiden sich die in D_{01} und D_{02}, bezw. E_{01} und E_{02} zu den Normalstrahlen errichteten Senkrechten auf der Geraden MK_0, also auf der Polbahnnormalen; ferner ist

$$\frac{1}{ME_0} - \frac{1}{MD_0} = \frac{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2}{ME} - \frac{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2}{MD}$$
$$= \frac{1}{3R_0} - \frac{1}{3r_0} = \frac{1}{\varrho_\pi} - \frac{1}{\varrho_p} = \frac{1}{W},$$

woraus hervorgeht, dass D_0 der Krümmungsmittelpunkt der Bahn ist, welche E_0 momentan beschreibt, dass also D_0 und E_0 einander entsprechende Punkte der Polbahnnormalen sind. Beachten wir nun, dass DD_0 parallel EE_0 ist, so sind die letztgenannten Geraden die beiden einander zugeordneten parallelen Strahlen in denjenigen perspectivischen Strahlenbüscheln, welche entstehen, wenn wir die correspondirenden Punkte auf der Polbahnnormalen mit D, bezw. E verbinden. Die Richtung der Projectionsaxe dieser Strahlbüschel ist aber diejenige der beiden Parallelstrahlen; es ist folglich die Projectionsaxe MG parallel DD_0, bezw. EE_0, und, weil auch $D'K_0$ und $E'C_0$ letzteren Geraden parallel sind, parallel $D'K_0$, bezw. $E'C_0$, was noch nachzuweisen war.

Erwähnt sei, dass die beiden Punkte D und E, welche bei der Construction der Krümmungsmittelpunkte der Polbahnen die Hauptrolle spielen, kein Paar einander zugeordneter Punkte auf ihrem Normalstrahl bilden.

Nachdem wir den Zusammenhang aller der Polvierecke auf zwei gegebenen Normalstrahlen, denen die Polbahnkrümmungscentren gemeinsam sind, festgestellt und dabei gefunden haben, dass die Punkte D und E diesen Zusammenhang vermitteln, vermögen wir den Zusammenhang zwischen den entsprechenden Polvierecken der ganzen Ebene dadurch zu finden, dass wir die geometrischen Orte der Punkte D und E bei sich ändernder Lage der beiden Normalstrahlen aufsuchen. Berücksichtigen wir, dass ϱ_p und ϱ_π dieselben Werthe behalten, wenn r_0 und R_0 sich nicht ändern, so können wir diese geometrischen Orte vermittelst der Relationen 6) und 8) direct angeben. Aus 6) folgt ohne Weiteres, dass, wenn z. B. φ_1 variirt und φ_2 constant bleibt, der Ort des Punktes D ein Kreis über MD_{02} als Durchmesser ist. Indem wir nun ferner noch φ_2 sich ändern lassen, erhalten wir ein System solcher Kreise, deren Durchmesser die von M ausgehenden Sehnen des über MD_0 errichteten Kreises sind. Das Analoge gilt vom Ort der Punkte E. Die zur Festlegung der Polvierecke nöthigen Projectionsaxen MN liegen senkrecht zu den Strahlen MD, bezw. ME.

$$\delta = \frac{1}{2R}[s_1(u_3 v_2 - u_2 v_3) + s_2(u_1 v_3 - u_3 v_1) + s_3(u_2 v_1 - u_1 v_2)];$$

nun ist aber:

$$u_3 v_2 - u_2 v_3 = \sin(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)(a_{22} a_{33} - a_{23}^2) + \sin(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)(a_{23} a_{13} - a_{12} a_{33})$$
$$+ \sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13}) = \frac{1}{2R} \cdot \begin{vmatrix} s_1, & a_{12}, & a_{13} \\ s_2, & a_{22}, & a_{23} \\ s_3, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}$$

und ebenso:

$$u_1 v_3 - u_3 v_1 = \frac{1}{2R} \cdot \begin{vmatrix} a_{11}, & s_1, & a_{13} \\ a_{21}, & s_2, & a_{23} \\ a_{31}, & s_3, & a_{33} \end{vmatrix}, \quad u_2 v_1 - u_1 v_2 = \frac{1}{2R} \cdot \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & s_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & s_2 \\ a_{31}, & a_{32}, & s_3 \end{vmatrix},$$

weshalb folgt:

$$\delta = -\frac{1}{4R^2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & s_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & s_2 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & s_3 \\ s_1, & s_2, & s_3, & 0 \end{vmatrix}.$$

Mit Rücksicht auf 1) und 2) ergiebt sich daher:

$$\mathfrak{A}^2 \mathfrak{B}^2 = -64 J^4 R^2 \cdot \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}^2 : \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & s_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & s_2 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & s_3 \\ s_1, & s_2, & s_3, & 0 \end{vmatrix}^3.$$

Bezeichnet man die letzte Determinante mit $[a, s]$, so erhält man für den Inhalt F des betrachteten Kegelschnittes die Beziehung:

3) $$F^2 = -64 \pi^2 J^4 R^2 [a]^2 : [a, s]^3.$$

Da ferner:

$$\alpha_{00} + \alpha_{11} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + 2a_{23}\cos(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + 2a_{13}\cos(\varepsilon_3 - \varepsilon_1) + 2a_{12}\cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$
$$= a_{11} + a_{22} + a_{33} - 2a_{23}\cos\sigma_1 - 2a_{13}\cos\sigma_2 - 2a_{12}\cos\sigma_3$$

ist, so folgt aus 1):

4) $$\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 = 16 J^2 R^2 (2a_{23}\cos\sigma_1 + 2a_{13}\cos\sigma_2 + 2a_{12}\cos\sigma_3 - a_{11} - a_{22} - a_{33}) \times [a] : [a, s]^2.$$

Eine durch die Gleichung: $\mathfrak{G} \equiv \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = 0$ dargestellte Gerade trifft den betrachteten Kegelschnitt in zwei Punkten, für deren Abstand d die bekannte Relation (vergl. Fiedler's Geometrie der Kegelschnitte S. 529) besteht:

5) $$d^2 = 64 R^2 J^2 [\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 2\lambda_2\lambda_3\cos\sigma_1 - 2\lambda_1\lambda_3\cos\sigma_2 - 2\lambda_1\lambda_2\cos\sigma_3]$$
$$\times \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \lambda_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \lambda_2 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \lambda_3 \\ \lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_3, & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \lambda_1, & s_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \lambda_2, & s_2 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \lambda_3, & s_3 \\ \lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_3, & 0, & 0 \\ s_1, & s_2, & s_3, & 0, & 0 \end{vmatrix}^2.$$

Setzt man der Kürze halber:

$$a_{23}^2 - a_{22}a_{33} = \mu_{11}, \quad a_{13}^2 - a_{11}a_{33} = \mu_{22}, \quad a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = \mu_{33};$$
$$a_{11}a_{23} - a_{13}a_{12} = \mu_{23}, \quad a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23} = \mu_{13}, \quad a_{33}a_{12} - a_{13}a_{23} = \mu_{12};$$
$$a_{22}s_3^2 + a_{33}s_2^2 - 2a_{23}s_2s_3 = \nu_{11}, \quad a_{33}s_1^2 + a_{11}s_3^2 - 2a_{13}s_1s_3 = \nu_{22},$$
$$a_{11}s_2^2 + a_{22}s_1^2 - 2a_{12}s_1s_2 = \nu_{33};$$
$$s_1(-a_{23}s_1 + a_{13}s_2 + a_{12}s_3) - a_{11}s_2s_3 = \nu_{23},$$
$$s_2(a_{23}s_1 - a_{13}s_2 + a_{12}s_3) - a_{22}s_1s_3 = \nu_{13},$$
$$s_3(a_{23}s_1 + a_{13}s_2 - a_{12}s_3) - a_{33}s_1s_2 = \nu_{12},$$

so liefert die Entwickelung der beiden in 5) vorkommenden Determinanten die Ausdrücke:

$$6)\quad \begin{aligned} [a,\lambda] &= \lambda_1^2\mu_{11} + \lambda_2^2\mu_{22} + \lambda_3^2\mu_{33} + 2\lambda_2\lambda_3\mu_{23} + 2\lambda_1\lambda_3\mu_{13} + 2\lambda_1\lambda_2\mu_{12}, \\ [a,\lambda,s] &= \lambda_1^2\nu_{11} + \lambda_2^2\nu_{22} + \lambda_3^2\nu_{33} + 2\lambda_2\lambda_3\nu_{23} + 2\lambda_1\lambda_3\nu_{13} + 2\lambda_1\lambda_2\nu_{12}. \end{aligned}$$

Die Coordinaten des Kegelschnittcentrums ergeben sich aus den Gleichungen:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 = \varkappa s_1,$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 = \varkappa s_2,$$
$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 = \varkappa s_3$$

und man erhält hierfür die mit einem Proportionalitätsfactor noch zu multiplicirenden Ausdrücke:

$$X'_1 = s_1\mu_{11} + s_2\mu_{12} + s_3\mu_{13},$$
$$X'_2 = s_1\mu_{12} + s_2\mu_{22} + s_3\mu_{23},$$
$$X'_3 = s_1\mu_{13} + s_2\mu_{23} + s_3\mu_{33}.$$

Zugleich erkennt man, dass:

$$s_1X'_1 + s_2X'_2 + s_3X'_3$$
$$= s_1^2\mu_{11} + s_2^2\mu_{22} + s_3^2\mu_{33} + 2s_2s_3\mu_{23} + 2s_1s_3\mu_{13} + 2s_1s_2\mu_{12} = [a,s]$$

ist. Wählt man nun statt der oben genannten Geraden $\mathfrak{G}$ den zur Seite X_1 des Fundamentaldreiecks parallelen Durchmesser des Kegelschnittes, den man als die Verbindungslinie des Mittelpunktes (X'_1, X'_2, X'_3) mit dem unendlich fernen Punkte $(0, -s_3, s_2)$ der Seite X_1 betrachten kann und dessen Gleichung somit:

$$X_1(X'_2s_2 + X'_3s_3) - X_2X'_1s_2 - X_3X'_1s_3 = 0$$

wird, so erhält man aus obiger Beziehung 5) die Länge d_1 dieses Durchmessers, wenn man darin $\lambda_1 = s_2X'_2 + s_3X'_3$, $\lambda_2 = -s_2X'_1$, $\lambda_3 = -s_3X'_3$ setzt. Da nun auch $\lambda_1 = [a,s] - s_1X'_1$ ist, so hat man:

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 2\lambda_2\lambda_3\cos\sigma_1 - 2\lambda_1\lambda_3\cos\sigma_2 - 2\lambda_1\lambda_2\cos\sigma_3$$
$$= [a,s]^2 + s_1^2X'^2_1 - 2s_1X'_1[a,s] + X_1^2[s_2^2 + s_3^2 - 2s_2s_3\cos\sigma_1]$$
$$+ 2X'_1(s_3\cos\sigma_2 + s_2\cos\sigma_3)([a,s] - s_1X'_1) = [a,s]^2.$$

Ferner ist:

$$[a,\lambda] = \mu_{11}([a,s] - s_1X'_1)^2 + X'^2_1(\mu_{22}s_2^2 + \mu_{33}s_3^2 + 2\mu_{23}s_2s_3)$$
$$- 2X'_1(s_2\mu_{12} + s_3\mu_{13})([a,s] - s_1X'_1)$$
$$= \mu_{11}[a,s]^2 + X'^2_1(s_1^2\mu_{11} + s_2^2\mu_{22} + s_3^2\mu_{33} + 2s_2s_3\mu_{23} + 2s_1s_3\mu_{13}$$
$$+ 2s_1s_2\mu_{12}) - 2X'_1[a,s](s_1\mu_{11} + s_2\mu_{12} + s_3\mu_{13})$$

oder:

$$= \mu_{11}[a,s]^2 + X'^2_1[a,s] - 2X'^2_1[a,s] = [a,s].(\mu_{11}[a,s] - X'^2_1)$$

$[a, \lambda] = [a, s].[s_2^2(\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}^2) + s_3^2(\mu_{11}\mu_{33} - \mu_{13}^2) - 2s_2s_3(\mu_{12}\mu_{13} - \mu_{11}\mu_{23})]$.

Nun sind aber:

$$\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}^2 = a_{33}[a], \quad \mu_{11}\mu_{33} - \mu_{13}^2 = a_{22}[a], \quad \mu_{12}\mu_{13} - \mu_{11}\mu_{23} = a_{23}[a]$$

und daher wird:

$$[a, \lambda] = \nu_{11}[a, s].[a].$$

Die Determinante $[a, \lambda, s]$ geht über in:

$$[a, \lambda, s]$$

$$= \nu_{11}[a, s]^2 + X'^2_1(s_1^2\nu_{11} + s_2^2\nu_{22} + s_3^2\nu_{33} + 2s_2s_3\nu_{23} + 2s_1s_3\nu_{13} + 2s_1s_2\nu_{12})$$
$$- 2X'_1[a, s].(s_1\nu_{11} + s_2\nu_{12} + s_3\nu_{13})$$
$$= \nu_{11}[a, s]^2 + X'^2_1[a, s, s] - 2X'_1[a, s].[s_1\nu_{11} + s_2\nu_{12} + s_3\nu_{13}].$$

Da aber der Ausdruck $s_1\nu_{11} + s_2\nu_{12} + s_3\nu_{13}$, sowie die Determinante $[a, s, s]$, welche zwei gleiche Reihen besitzt, identisch Null sind, so folgt:

$$[a, \lambda, s] = \nu_{11}[a, s]^2$$

und hiermit ergiebt sich nach 5):

$$7) \qquad d_1^2 = \frac{64R^2J^2[a]}{\nu_{11}[a, s]} = \frac{64R^2J^2}{s_2^2a_{33} + s_3^2a_{22} - 2s_2s_3a_{23}}$$
$$\times \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & s_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & s_2 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & s_3 \\ s_1, & s_2, & s_3, & 0 \end{vmatrix}.$$

Ganz ähnliche Ausdrücke erhält man für die Längen d_2 und d_3 der mit den Seiten X_2 und X_3 parallelen Durchmesser des Kegelschnittes.

Bezeichnet man mit p_1, p_2, p_3 die senkrechten Abstände des Kegelschnittcentrums von den Seiten des Fundamentaldreiecks, so hat man:

$$p_1 = \varkappa X'_1, \quad p_2 = \varkappa X'_2, \quad p_3 = \varkappa X'_3,$$

und da stets:

$$2J = p_1s_1 + p_2s_2 + p_3s_3 = \varkappa(s_1X'_1 + s_2X'_2 + s_3X'_3) = \varkappa[a, s]$$

ist, so folgt:

$$8) \qquad p_1 = \frac{2JX'_1}{[a, s]}, \quad p_2 = \frac{2JX'_2}{[a, s]}, \quad p_3 = \frac{2JX'_3}{[a, s]}.$$

Die Verbindungslinie der Mitten der Seiten X_2 und X_3 des Fundamentaldreiecks hat die Gleichung: $-s_1X_1 + s_2X_2 + s_3X_3 = 0$, die dadurch auf die Normalform gebracht wird, dass man sie mit dem Ausdrucke:

$$\varrho_1 = [(-s_1\cos\varepsilon_1 + s_2\cos\varepsilon_2 + s_3\cos\varepsilon_3)^2 + (-s_1\sin\varepsilon_1 + s_2\sin\varepsilon_2 + s_3\sin\varepsilon_3)^2]^{1/2}$$

dividirt. Nun ist aber:

$$\varrho_1 = [s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - 2s_2s_3\cos\sigma_1 + 2s_1s_3\cos\sigma_2 + 2s_1s_2\cos\sigma_3]^{1/2} = 2s_1$$

und daher lassen sich die senkrechten Abstände p'_1, p'_2, p'_3 des Kegelschnittcentrums von den Seiten des Mittendreiecks ausdrücken durch:

$$p'_1=\frac{\lambda}{2s_1}(-s_1X'_1+s_2X'_2+s_3X'_3),$$
$$p'_2=\frac{\lambda}{2s_2}(s_1X'_1-s_2X'_2+s_3X'_3),$$
$$p'_3=\frac{\lambda}{2s_3}(s_1X'_1+s_2X'_2-s_3X'_3),$$

und weil hierfür die Beziehung besteht:

$$J=s_1p'_1+s_2p'_2+s_3p'_3=\frac{\lambda}{2}(s_1X'_1+s_2X'_2+s_3X'_3)=\frac{\lambda}{2}[a,s],$$

so findet man:

$$9)\qquad \begin{aligned} p'_1&=\frac{J}{s_1[a,s]}(-s_1X'_1+s_2X'_2+s_3X'_3),\\ p'_2&=\frac{J}{s_2[a,s]}(s_1X'_1-s_2X'_2+s_3X'_3),\\ p'_3&=\frac{J}{s_3[a,s]}(s_1X'_1+s_2X'_2-s_3X'_3). \end{aligned}$$

Will man nun das bisher Gefundene auf eine beliebige, dem Fundamentaldreieck einbeschriebene Elllipse übertragen, welche durch die Gleichung:

$$K_e\equiv\alpha_1^2X_1^2+\alpha_2^2X_2^2+\alpha_3^2X_3^2-2\alpha_2\alpha_3X_2X_3-2\alpha_1\alpha_3X_1X_3-2\alpha_1\alpha_2X_1X_2=0$$

dargestellt werden kann, so hat man nur zu setzen:

$$a_{11}=\alpha_1^2,\quad a_{22}=\alpha_2^2,\quad a_{33}=\alpha_3^2,\quad a_{23}=-\alpha_2\alpha_3,\quad a_{13}=-\alpha_1\alpha_3,\quad a_{12}=-\alpha_1\alpha_2$$

und erhält somit hierfür:

$$\mu_{11}=\mu_{22}=\mu_{33}=0,\quad \mu_{23}=-2\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3,\quad \mu_{13}=-2\alpha_2^2\alpha_1\alpha_3,\quad \mu_{12}=-2\alpha_3^2\alpha_1\alpha_2,$$

ferner:

$$X'_1=-2\alpha_1\alpha_2\alpha_3(s_2\alpha_3+s_3\alpha_2),$$
$$X'_2=-2\alpha_1\alpha_2\alpha_3(s_1\alpha_3+s_3\alpha_1),$$
$$X'_3=-2\alpha_1\alpha_2\alpha_3(s_1\alpha_2+s_2\alpha_1);$$
$$[a,s]=-4\alpha_1\alpha_2\alpha_3(\alpha_1s_2s_3+\alpha_2s_1s_3+\alpha_3s_1s_2);$$
$$[a]=-4\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2;\quad \nu_{11}=(s_2\alpha_3+s_3\alpha_2)^2,$$

und wenn man: $\alpha_1s_2s_3+\alpha_2s_1s_3+\alpha_3s_1s_2=m$ setzt, so findet man:

$$p_1=\frac{J}{m}(s_2\alpha_3+s_3\alpha_2),\quad p_2=\frac{J}{m}(s_1\alpha_3+s_3\alpha_1),\quad p_3=\frac{J}{m}(s_1\alpha_2+s_2\alpha_1),$$
$$p'_1=\frac{s_2s_3\alpha_1J}{s_1m},\qquad p'_2=\frac{s_1s_3\alpha_2J}{s_2m},\qquad p'_3=\frac{s_1s_2\alpha_3J}{s_3m}.$$

Für den Inhalt F_e der Ellipse K_e erhält man somit nach 3):

$$F_e^2=\frac{16\pi^2J^4R^2\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{m^3}.$$

Da aber: $p'_1p'_2p'_3=\frac{J^3s_1s_2s_3\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{m^3}=\frac{4J^4R\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{m^3}$ ist, so folgt:

Hat das Centrum einer beliebigen einem Dreieck einbeschriebenen Ellipse von den Seiten des Mittendreiecks die Abstände p'_1, p'_2, p'_3 und ist R der Umkreisradius des ersteren Dreiecks, so ist der Inhalt der Ellipse:

10) $$F_e = 2\pi\sqrt{R p'_1 p'_2 p'_3}.$$

Aus 7) ergiebt sich:

$$d_1^2 = \frac{64 R^2 J^2 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{m(s_2\alpha_3 + s_3\alpha_2)^2} = \frac{64 R^2 J^4 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{p_1^2 m^3} = \frac{4 F_e^2}{p_1^2 \pi^2} \quad \text{oder} \quad F_e = \tfrac{1}{2}\pi d_1 p_1,$$

weshalb folgt:

Sind p_1, p_2, p_3 die Abstände des Centrums einer beliebigen einem Dreieck einbeschriebenen Ellipse von den Seiten des Dreiecks und d_1, d_2, d_3 die Längen der mit den Dreiecksseiten parallelen Durchmesser der Ellipse, so ist ihr Inhalt:

11) $$F_e = \tfrac{1}{2}\pi d_1 p_1 = \tfrac{1}{2}\pi d_2 p_2 = \tfrac{1}{2}\pi d_3 p_3.$$

Zugleich ergiebt sich:

12) **Die zu den Dreiecksseiten parallelen Durchmesser der Ellipse verhalten sich umgekehrt wie die senkrechten Abstände ihres Centrums von diesen Seiten.**

Ferner hat man:

13) $$d_1^2 p_1^2 + d_2^2 p_2^2 + d_3^2 p_3^2 = 48 R p'_1 p'_2 p'_3.$$

Die Berührungspunkte des Kegelschnittes K_e mit den Seiten des Fundamentaldreiecks haben die Coordinaten $0, \alpha_3, \alpha_2$; $\alpha_3, 0, \alpha_1$; $\alpha_2, \alpha_1, 0$ und daher hat das von ihnen gebildete Dreieck den Inhalt:

$$\Delta_e = \frac{s_1 s_2 s_3 J}{(\alpha_2 s_3 + \alpha_3 s_2)(\alpha_1 s_3 + \alpha_3 s_1)(\alpha_1 s_2 + \alpha_2 s_1)} \cdot \begin{vmatrix} 0, & \alpha_3, & \alpha_2 \\ \alpha_3, & 0, & \alpha_1 \\ \alpha_2, & \alpha_1, & 0 \end{vmatrix} = \frac{2\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 s_1 s_2 s_3 J^4}{p_1 p_2 p_3 m^3},$$

woraus sich ergiebt:

14) **Der Inhalt des von den Berührungspunkten der dem Dreieck einbeschriebenen Ellipse gebildeten Dreiecks ist:**

$$\Delta_e = 2J \frac{p'_1 p'_2 p'_3}{p_1 p_2 p_3}.$$

Wäre K_e eine Parabel, so hätte der Quotient $\frac{p'_1 p'_2 p'_3}{p_1 p_2 p_3}$ den Werth Eins, da die Grössen p alle unendlich gross sind. Daher der bekannte Satz:

15) **Der Inhalt eines von drei Parabeltangenten gebildeten Dreiecks ist die Hälfte vom Inhalt desjenigen Dreiecks, welches die drei Berührungspunkte bestimmen.**

Aus 4) folgt:

$$16)\quad \mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2=\frac{4R^2J^2}{m^2}(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+2\alpha_2\alpha_3\cos\sigma_1+2\alpha_1\alpha_3\cos\sigma_2+2\alpha_1\alpha_2\cos\sigma_3).$$

Um die geometrische Bedeutung dieses Ausdrucks ermitteln zu können, ist Folgendes vorauszuschicken: Ist die Gleichung eines Kreises in trimetrischen Coordinaten gegeben, so kann man sich dieselbe durch Einführung der Ausdrücke für X_1, X_2, X_3 in rechtwinklige Coordinaten übergeführt denken, so dass die Kreisgleichung, wenn x_m, y_m die rechtwinkligen Coordinaten des Kreiscentrums und ϱ den Radius des Kreises bedeuten, die Form annimmt:

$$\lambda[(x-x_m)^2+(y-y_m)^2-\varrho^2]=0.$$

Denkt man sich nun in dieser Gleichung an die Stelle von x und y die Coordinaten x_0, y_0 eines beliebigen Punktes gesetzt, wodurch man erhält:

$$\lambda[(x_0-x_m)^2+(y-y_m)^2-\varrho^2]=\varkappa,$$

so stellt der Ausdruck $(x_0-x_m)^2+(y_0-y_m)^2$ das Quadrat des Abstandes der Punkte x_0, y_0 und x_m, y_m vor und man hat somit für die Länge t der vom Punkte x_0, y_0 an den Kreis gelegten Tangente die Beziehung:

$$17)\qquad \lambda t^2=\varkappa.$$

Der dem Fundamentaldreieck conjugirte Kreis hat die Gleichung:

$$X_1^2 s_1\cos\sigma_1+X_2^2 s_2\cos\sigma_2+X_3^2 s_3\cos\sigma_3=0,$$

es ist also hierfür:

$$\lambda=s_1\cos\sigma_1\cos^2\varepsilon_1+s_2\cos\sigma_2\cos^2\varepsilon_2+s_3\cos\sigma_3\cos^2\varepsilon_3$$

oder auch:

$$\lambda=s_1\cos\sigma_1\sin^2\varepsilon_1+s_2\cos\sigma_2\sin^2\varepsilon_2+s_3\cos\sigma_3\sin^2\varepsilon_3$$

und daher durch Addition beider Gleichungen:

$$2\lambda=s_1\cos\sigma_1+s_2\cos\sigma_2+s_3\cos s_3=\frac{2J}{R}.$$

Ist t die Länge der Tangente, die vom Mittelpunkte des Kegelschnittes K_e an jenen Kreis gezogen werden kann, so hat man: $t^2=\frac{R}{J}\varkappa$, wobei die Grösse $\varkappa$ dadurch erhalten wird, dass man in der Gleichung des Kreises statt der rechtwinkligen Coordinaten diejenigen des Mittelpunktes von K_e oder statt der Ausdrücke X_1, X_2, X_3 die Abstände p_1, p_2, p_3 des Centrums von den Seiten des Dreiecks setzt. Daher ist:

$$\varkappa=p_1^2 s_1\cos\sigma_1+p_2^2 s_2\cos\sigma_2+p_3^2\sigma_3\cos\sigma_3$$
$$=\frac{J^2}{m^2}[s_1(s_2\alpha_3+s_3\alpha_2)^2\cos\sigma_1+s_2(s_1\alpha_3+s_3\alpha_1)^2\cos\sigma_2+s_3(s_1\alpha_2+s_2\alpha_1)^2\cos\sigma_3]$$

und somit:

$$t^2=\frac{4R^2J^2}{m^2}(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+2\alpha_2\alpha_3\cos\sigma_1+2\alpha_1\alpha_3\cos\sigma_2+2\alpha_1\alpha_2\cos\sigma_3);$$

also ist nach 16):

$$\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 = t^2$$

und es ergeben sich die bekannten Sätze:

18) **Die Summe der Halbaxenquadrate eines dem Dreieck einbeschriebenen Kegelschnittes ist gleich dem Quadrate der Tangente, die vom Mittelpunkte desselben an den dem Dreieck conjugirten Kreis gelegt werden kann.**

Da der dem Dreieck conjugirte Kreis den Höhenschnittpunkt des Dreiecks zum Centrum hat, so folgt:

19) **Die Mittelpunkte aller einem Dreieck einbeschriebenen Kegelschnitte, für welche die Summe der Halbaxenquadrate constant ist, liegen auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ist.**

20) **Der Ort der Mittelpunkte aller einem Dreieck einbeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln ist der dem Dreieck conjugirte Kreis.**

Betrachtet man nun einen dem Dreieck umschriebenen Kegelschnitt, dessen Gleichung ist:

$$K_u \equiv a_1 X_2 X_3 + a_2 X_1 X_3 + a_3 X_1 X_2 = 0,$$

so hat man in den früheren Entwickelungen nur $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$, $a_{23} = a_1$, $a_{13} = a_2$, $a_{12} = a_3$ zu setzen und erhält sodann:

$$\mu_{11} = a_1^2, \quad \mu_{22} = a_2^2, \quad \mu_{33} = a_3^2, \quad \mu_{23} = -a_2 a_3, \quad \mu_{13} = -a_1 a_3, \quad \mu_{12} = -a_1 a_2,$$

$$X'_1 = -a_1(-s_1 a_1 + s_2 a_2 + s_3 a_3), \quad X'_2 = -a_2(s_1 a_1 - s_2 a_2 + s_3 a_3),$$

$$X'_3 = -a_3(s_1 a_1 + s_2 a_2 - s_3 a_3),$$

$$[a, s] = s_1^2 a_1^2 + s_2^2 a_2^2 + s_3^2 a_3^2 - 2 s_2 s_3 a_2 a_3 - 2 s_1 s_3 a_1 a_3 - 2 s_1 s_2 a_1 a_2,$$

$$[a] = 2 a_1 a_2 a_3, \quad \nu_{11} = -2 a_1 s_2 s_3.$$

Setzt man der Kürze halber:

$$-s_1^2 a_1^2 - s_2^2 a_2^2 - s_3^2 a_3^2 + 2 s_2 s_3 a_2 a_3 + 2 s_1 s_3 a_1 a_3 + 2 s_1 s_2 a_1 a_2 = n,$$

$$-s_1 a_1 + s_2 a_2 + s_3 a_3 = \varrho_1, \quad s_1 a_1 - s_2 a_2 + s_3 a_3 = \varrho_2, \quad s_1 a_1 + s_2 a_2 - s_3 a_3 = \varrho_3,$$

so werden:

$$p_1 = \frac{2 J a_1 \varrho_1}{n}, \quad p_2 = \frac{2 J a_2 \varrho_2}{n}, \quad p_3 = \frac{2 J a_3 \varrho_3}{n};$$

$$p'_1 = \frac{J \varrho_2 \varrho_3}{s_1 n}, \quad p'_2 = \frac{J \varrho_1 \varrho_3}{s_2 n}, \quad p'_3 = \frac{J \varrho_1 \varrho_2}{s_3 n}$$

und daher:

$$21) \qquad p'_1 = \frac{p_2 p_3 n}{4 s_1 a_2 a_3 J}, \quad p'_2 = \frac{p_1 p_3 n}{4 s_2 a_1 a_3 J}, \quad p'_3 = \frac{p_1 p_2 n}{4 s_3 a_1 a_2 J}.$$

Für den Inhalt F_u der Ellipse K_u folgt nun aus 3):

$$F_u^2 = \frac{256 \pi^2 J^4 R^2 a_1^2 a_2^2 a_3^2}{n^3};$$

da aber nach 21):

$$p'_1 p'_2 p'_3 = \frac{p_1^2 p_2^2 p_3^2 n^3}{256 J^4 R a_1^2 a_2^2 a_3^2}$$

ist, so ergiebt sich:

Hat das Centrum einer beliebigen einem Dreieck umschriebenen Ellipse von den Seiten des Dreiecks die Abstände p_1, p_2, p_3 und von den Seiten des Mittendreiecks die Entfernungen p'_1, p'_2, p'_3, und ist R der Umkreisradius des Dreiecks, so hat man für den Inhalt der Ellipse:

$$22)\qquad F_u = \pi p_1 p_2 p_3 \sqrt{\frac{R}{p'_1 p'_2 p'_3}}.$$

Aus 7) folgt:

$$d_1^2 = \frac{64 R^2 J^2 a_2 a_3}{s_2 s_3 n} = \frac{4 R p_2 p_3}{p'_1},$$

daher ergiebt sich:

Für die Längen d_1, d_2, d_3 der mit den Dreiecksseiten parallelen Durchmesser einer dem Dreieck umschriebenen Ellipse bestehen die Beziehungen:

$$23)\qquad d_1^2 = \frac{4 R p_2 p_3}{p'_1},\quad d_2^2 = \frac{4 R p_1 p_3}{p'_2},\quad d_3^2 = \frac{4 R p_1 p_2}{p'_3}.$$

Da ferner:

$$(d_1 d_2 d_3)^2 = \frac{64 R^3 p_1^2 p_2^2 p_3^2}{p'_1 p'_2 p'_3} = \frac{64 R^2 F_u^2}{\pi^2}.$$

ist, so folgt:

Der Inhalt der dem Dreieck umschriebenen Ellipse ist auch:

$$24)\qquad F_u = \frac{\pi d_1 d_2 d_3}{8 R}.$$

Die Tangenten des Kegelschnitts K_u in den Eckpunkten des Dreiecks haben die Gleichungen:

$$a_2 X_3 + a_3 X_2 = 0,\quad a_1 X_3 + a_3 X_1 = 0,\quad a_1 X_2 + a_2 X_1 = 0$$

und die gegenseitigen Schnittpunkte dieser Tangenten haben daher die Coordinaten $-a_1, a_2, a_3$; $a_1, -a_2, a_3$; $a_1, a_2, -a_3$ und bilden ein Dreieck, für dessen Inhalt $\varDelta_u$ man hat:

$$\varDelta_u = s_1 s_2 s_3 J. \begin{vmatrix} -a_1, & a_2, & a_3 \\ a_1, & -a_2, & a_3 \\ a_1, & a_2, & -a_3 \end{vmatrix} : \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3.$$

$$= 4 s_1 s_2 s_3 J a_1 a_2 a_3 : \frac{8 a_1 a_2 a_3 s_1 s_2 s_3 p'_1 p'_2 p'_3}{p_1 p_2 p_3};$$

somit ist:

$$25)\qquad \varDelta_u = \frac{J}{2} \cdot \frac{p_1 p_2 p_3}{p'_1 p'_2 p'_3}.$$

Aus 4) folgt in diesem Falle:

$$26)\qquad \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 = -\frac{64 R^2 J^2 a_1 a_2 a_3}{n^2} (a_1 \cos\sigma_1 + a_2 \cos\sigma_2 + a_3 \cos\sigma_3).$$

Der Neunpunktkreis des Fundamentaldreiecks hat bekanntlich die Gleichung:

$$X_1^2 s_1 \cos\sigma_1 + X_2^2 s_2 \cos\sigma_2 + X_3^2 s_3 \cos\sigma_3 - s_1 X_2 X_3 - s_2 X_1 X_3 - s_3 X_1 X_2 = 0,$$

daher sind die Coefficienten von x^2 und y^2 dieser Gleichung:

$$\lambda = s_1 \cos\sigma_1 \cos^2\varepsilon_1 + s_2 \cos\sigma_2 \cos^2\varepsilon_2 + s_3 \cos\sigma_3 \cos^2\varepsilon_3 - s_1 \cos\varepsilon_2 \cos\varepsilon_3 - s_2 \cos\varepsilon_1 \cos\varepsilon_3 - s_3 \cos\varepsilon_1 \cos\varepsilon_2$$

und

$$\lambda = s_1 \cos\sigma_1 \sin^2\varepsilon_1 + s_2 \cos\sigma_2 \sin^2\varepsilon_2 + s_3 \cos\sigma_3 \sin^2\varepsilon_3 - s_1 \sin\varepsilon_2 \sin\varepsilon_3 - s_2 \sin\varepsilon_1 \sin\varepsilon_3 - s_3 \sin\varepsilon_1 \sin\varepsilon_2,$$

daher:

$$2\lambda = s_1 \cos\sigma_1 + s_2 \cos\sigma_2 + s_3 \cos\sigma_3 - s_1 \cos(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) - s_2 \cos(\varepsilon_3 - \varepsilon_1) - s_3 \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2),$$

woraus folgt:

$$\lambda = s_1 \cos\sigma_1 + s_2 \cos\sigma_2 + s_3 \cos\sigma_3 = \frac{2J}{R}.$$

Ist t die Länge der vom Centrum des Kegelschnittes $K_\varkappa$ an den Neunpunktkreis gehenden Tangente, so hat man:

$$t^2 = \frac{R}{2J}\varkappa,$$

wobei:

$$\varkappa = p_1^2 s_1 \cos\sigma_1 + p_2^2 s_2 \cos\sigma_2 + p_3^2 s_3 \cos\sigma_3 - s_1 p_2 p_3 - s_2 p_1 p_3 - s_3 p_1 p_2$$

oder:

$$\varkappa = \frac{4J^2}{n^2}\Big[s_1 a_1^2 \varrho_1^2 \frac{-s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}{2 s_2 s_3} + s_2 a_2^2 \varrho_2^2 \frac{s_1^2 - s_2^2 + s_3^2}{2 s_1 s_3} + s_3 a_3^2 \varrho_3^2 \frac{s_1^2 + s_2^2 - s_3^2}{2 s_1 s_2} - s_1 a_2 a_3 \varrho_2 \varrho_3 - s_2 a_1 a_3 \varrho_1 \varrho_3 - s_3 a_1 a_2 \varrho_1 \varrho_2\Big],$$

also:

$$t^2 = \frac{1}{4n^2}\left[s_1^2 (s_2 a_2 \varrho_2 - s_3 a_3 \varrho_3)^2 - s_1^4 a_1^2 \varrho_1^2 + s_2^2 (s_1 a_1 \varrho_1 - s_3 a_3 \varrho_3)^2 - s_2^4 a_2^2 \varrho_2^2 + s_3^2 (s_1 a_1 \varrho_1 - s_2 a_2 \varrho_2)^2 - s_3^4 a_3^2 \varrho_3^2\right].$$

Nun sind aber:

$$-s_1 a_1 \varrho_1 + s_2 a_2 \varrho_2 + s_3 a_3 \varrho_3 = \varrho_2 \varrho_3, \quad s_1 a_1 \varrho_1 - s_2 a_2 \varrho_2 + s_3 a_3 \varrho_3 = \varrho_1 \varrho_3,$$
$$s_1 a_1 \varrho_1 + s_2 a_2 \varrho_2 - s_3 a_3 \varrho_3 = \varrho_1 \varrho_2$$

und es wird deshalb:

$$t^2 = -\frac{1}{4n^2}\left[s_1^2 \varrho_1^2 \varrho_2 \varrho_3 + s_2^2 \varrho_2^2 \varrho_1 \varrho_3 + s_3^2 \varrho_3^2 \varrho_1 \varrho_2\right] = -\frac{\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3}{4n^2}\left[s_1^2 \varrho_1 + s_2^2 \varrho_2 + s_3^2 \varrho_3\right].$$

Da nun:

$$\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 = \frac{p_1 p_2 p_3 n^3}{8 a_1 a_2 a_3 J^3}$$

und

$$s_1^2 \varrho_1 + s_2^2 \varrho_2 + s_3^2 \varrho_3 = 2 s_1 s_2 s_3 (a_1 \cos\sigma_1 + a_2 \cos\sigma_2 + a_3 \cos\sigma_3),$$

so ist, abgesehen von dem Vorzeichen:

$$t^2 = \frac{R p_1 p_2 p_3 n}{4 a_1 a_2 a_3 J^2}(a_1 \cos\sigma_1 + a_2 \cos\sigma_2 + a_3 \cos\sigma_3).$$

Mit Rücksicht auf 26) und 21) geht nun hervor:

Die Summe der Halbaxenquadrate eines dem Dreieck umschriebenen Kegelschnittes lässt sich durch die Abstände seines Mittelpunktes von den Seiten des Dreiecks, sowie durch die Abstände desselben von den Seiten des Mittendreiecks und durch die Länge der Tangente, die vom Centrum an den Neunpunktkreis des Dreiecks gezogen werden kann, auf folgende Weise ausdrücken:

$$\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 = t^2 \cdot \frac{p_1 p_2 p_3}{p'_1 p'_2 p'_3}. \tag{27}$$

Zugleich geht hieraus hervor, dass der geometrische Ort der Mittelpunkte aller einem Dreieck umschriebenen gleichseitigen Hyperbeln der Neunpunktkreis des Dreiecks ist, weil hierfür $\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 = 0$ wird.

Ein dem Dreieck conjugirter Kegelschnitt hat die Gleichung:

$$K_c \equiv A_1 X_1^2 + A_2 X_2^2 + A_3 X_3^2 = 0,$$

weshalb:

$$a_{11} = A_1, \quad a_{22} = a_2, \quad a_{33} = A_3, \quad a_{23} = a_{13} = a_{12} = 0$$

zu setzen sind; und man hat daher:

$$\mu_1 = -A_2 A_3, \quad \mu_{22} = -A_1 A_3, \quad \mu_{33} = -A_1 A_2, \quad \mu_{23} = \mu_{13} = \mu_{12} = 0;$$

$$X'_1 = -s_1 A_2 A_3, \quad X'_2 = -s_2 A_1 A_3, \quad X'_3 = -s_3 A_1 A_2;$$

$$[a, s] = -(s_1^2 A_2 A_3 + s_2^2 A_1 A_3 + s_3^2 A_1 A_2), \quad [a] = A_1 A_2 A_3$$

und, wenn man:

$$s_1^2 A_2 A_3 + s_2^2 A_1 A_3 + s_3^2 A_1 A_2 = u$$

setzt, so werden:

$$p_1 = \frac{2 s_1 A_2 A_3 J}{u}, \quad p_2 = \frac{2 s_2 A_1 A_3 J}{u}, \quad p_3 = \frac{2 s_3 A_1 A_2 J}{u}.$$

Für den Inhalt F_c der Ellipse K_c findet man somit nach 3) die Beziehung:

$$F_c^2 = \frac{64 \pi^2 J^4 R^2 A_1^2 A_2^2 A_3^2}{u^3};$$

weil aber:

$$p_1 p_2 p_3 = \frac{32 R J^4 A_1^2 A_2^2 A_3^2}{u^3}$$

ist, so ergiebt sich der von Faure bewiesene Satz:

Der Inhalt einer dem Dreieck conjugirten Ellipse ist:

$$F_c = \pi \sqrt{2 R p_1 p_2 p_3}. \tag{28}$$

Aus 7) folgt:

$$d_1^2 = -\frac{64 R^2 J^2 A_1 A_2 A_3}{u (A_2 s_3^2 + A_3 s_2^2)};$$

da aber:

$$A_2 s_3^2 + A_3 s_2^2 = \frac{u}{2 A_1 J}(s_2 p_2 + s_3 p_3) = \frac{u}{2 A_1 J}(2J - s_1 p_1),$$

so ist, wenn man mit h_1 die zur Seite s_1 gehörige Höhe des Fundamentaldreiecks bezeichnet:

$$d_1^2 = \frac{128 R^2 J^3 A_1^2 A_2 A_3}{s_1 u^2 (p_1 - h_1)} = \frac{8 R p_2 p_3}{p_1 - h_1};$$

mit Rücksicht auf 28) folgt somit:

Hat das Centrum einer beliebigen einem Dreieck conjugirten Ellipse von den Seiten des Dreiecks die Abstände p_1, p_2, p_3 und sind ferner h_1, h_2, h_3 die Höhen und R der Umkreisradius des Dreiecks, so bestehen für die zu den Dreiecksseiten parallelen Durchmesser d_1, d_2, d_3 der Ellipse und für deren Inhalt F_c die Beziehungen:

$$d_1^2(p_1 - h_1) = 8 R p_2 p_3, \quad d_2^2(p_2 - h_2) = 8 R p_1 p_3, \quad d_3^2(p_3 - h_3) = 8 R p_1 p_2;$$

$$29) \quad F_c^2 = \frac{\pi}{4} d_1^2 p_1 (p_1 - h_1) = \frac{\pi}{4} d_2^2 p_2 (p_2 - h_2) = \frac{\pi}{4} d_3^2 p_3 (p_3 - h_3).$$

Ferner folgt aus 4)

$$30) \qquad \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 = - \frac{16 J^2 R^2 A_1 A_2 A_3}{u^2} (A_1 + A_2 + A_3).$$

Der Umkreis des Dreiecks hat die Gleichung:

$$s_1 X_2 X_3 + s_2 X_1 X_3 + s_3 X_1 X_2 = 0$$

und die Coefficienten von x^2 und y^2 dieser Gleichung sind:

$$\lambda = s_1 \cos\varepsilon_2 \cos\varepsilon_3 + s_2 \cos\varepsilon_1 \cos\varepsilon_3 + s_3 \cos\varepsilon_1 \cos\varepsilon_2,$$
$$\lambda = s_1 \sin\varepsilon_2 \sin\varepsilon_3 + s_2 \sin\varepsilon_1 \sin\varepsilon_3 + s_3 \sin\varepsilon_1 \sin\varepsilon_2,$$

daher:

$$2\lambda = - s_1 \cos\sigma_1 - s_2 \cos\sigma_2 - s_3 \cos\sigma_3 = - \frac{2J}{R}.$$

Für die Länge t der vom Mittelpunkt des Kegelschnittes K_c an den Umkreis gezogenen Tangente hat man somit:

$$t^2 = - \frac{R}{J} \varkappa,$$

wobei:

$$\varkappa = s_1 p_2 p_3 + s_2 p_1 p_3 + s_3 p_1 p_2 = \frac{4 s_1 s_2 s_3 J^2 A_1 A_2 A_3}{u^2} (A_1 + A_2 + A_3);$$

es wird also nach 30):

$$t^2 = \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2,$$

d. h.:

31) Die Summe der Halbaxenquadrate eines beliebigen dem Dreieck conjugirten Kegelschnittes ist gleich dem Quadrate der von seinem Centrum an den Umkreis des Dreiecks gelegten Tangente.

Es liegen daher auch die Mittelpunkte der einem Dreieck conjugirten Kegelschnitte, wofür die Summe der Halbaxenquadrate constant ist, auf einem Kreise, der das Umkreiscentrum des Dreiecks zum Mittelpunkt hat, und die Mittelpunkte aller einem Dreieck conjugirten gleichseitigen Hyperbeln befinden sich auf dem Umkreise des Dreiecks. —

Ist ein Dreieck und ein beliebiger Punkt p gegeben und wählt man denselben als Mittelpunkt von drei Kegelschnitten K_u, K_e und K_c, welche dem Dreieck beziehungsweise umschrieben, einbeschrieben und conjugirt sind, so haben in den Formeln 10), 14), 22), 25) und 28) die Grössen $p_1, p_2, p_3, p'_1, p'_2, p'_3$ gleiche Werthe und es ergiebt sich zunächst aus 10), 22) und 28):

32) Hat man drei concentrische Kegelschnitte K_u, K_e und K_c, wovon der erste einem gegebenen Dreieck umschrieben, der zweite demselben einbeschrieben und der dritte dem Dreieck conjugirt ist, so besteht für die Inhalte dieser Kegelschnitte die Beziehung:

$$F_c^2 = F_u . F_e.$$

Aus 14) und 25) folgt:

33) Ist von zwei concentrischen Kegelschnitten der eine K_u einem Dreieck umschrieben, der andere K_e demselben einbeschrieben, so ist der Inhalt des Dreiecks das geometrische Mittel zwischen den Flächen jener beiden Dreiecke, welche von den Berührungspunkten des Kegelschnittes K_e und von den Tangenten des Kegelschnittes K_u in den Eckpunkten des gegebenen Dreiecks gebildet werden; d. h.:

$$J^2 = \varDelta_u . \varDelta_e .$$

Ausserdem hat man noch die Relationen:

34) $$F_u : F_e = J : \varDelta_e = \varDelta_u : J.$$

Ist die Lage des Punktes P eine derartige, dass ein Paar der drei concentrischen Kegelschnitte inhaltsgleich wird, so sind alle drei Kegelschnitte flächengleich; zudem haben alsdann die beiden Dreiecke $\varDelta_e$ und $\varDelta_u$ mit dem gegebenen Dreieck gleichen Flächeninhalt. Der erwähnte Fall tritt aber dann ein, wenn für den Punkt P:

$$p_1 p_2 p_3 = 2 p'_1 p'_2 p'_3$$

ist. Bezeichnet man die Coordinaten von p mit X_1, X_2, X_3 und den Ausdruck $s_1 X_1 + s_2 X_2 + s_3 X_3$ mit $\mathfrak{S}$, so hat man zufolge 8) und 9):

$$4 s_1 s_2 s_3 X_1 X_2 X_3 = (\mathfrak{S} - 2 s_1 X_1)(\mathfrak{S} - 2 s_2 X_2)(\mathfrak{S} - 2 s_3 X_3)$$

und es wird daher die Gleichung des geometrischen Ortes für den Punkt P:

$$U \equiv \mathfrak{S}(s_1^2 X_1^2 + s_2^2 X_2^2 + s_3^2 X_3^2 - 2 s_2 s_3 X_2 X_3 - 2 s_1 s_3 X_1 X_3 - 2 s_1 s_2 X_1 X_2) + 12 s_1 s_2 s_3 X_1 X_2 X_3 = 0.$$

Da aber die Gleichung:

$$s_1^2 X_1^2 + s_2^2 X_2^2 + s_3^2 X_3^2 - 2 s_2 s_3 X_2 X_3 - 2 s_1 s_3 X_1 X_3 - 2 s_1 s_2 X_1 X_2 = 0$$

denjenigen Kegelschnitt darstellt, welcher die Seiten des Dreiecks in ihren Mitten berührt, so berührt auch die Curve U die Seiten des Dreiecks in ihren Mitten und enthält überdies noch die unendlich fernen Punkte dieser Seiten.

Zugleich folgt mit Rücksicht auf 27):

35) **Wählt man einen Punkt P der Curve U als Mittelpunkt eines dem Dreieck umschriebenen Kegelschnittes K_u und bezeichnet die Länge der vom Punkte P an den Neunpunktkreis des Dreiecks gelegten Tangente mit t, so ist die Summe der Halbaxenquadrate des Kegelschnittes K_u gleich $2t^2$.**

Betrachtet man einen Punkt M als den gemeinsamen Mittelpunkt zweier Kegelschnitte K_e und K_c, wovon der eine dem Dreieck einbeschrieben, der andere demselben conjugirt ist, so müssen, im Falle für beide Kegelschnitte die Summen der Halbaxenquadrate gleich gross sein sollen, die vom Punkte M an den dem Dreieck conjugirten Kreis und an den Umkreis gelegten Tangenten nach 18) und 31) gleich lang sein, weshalb M der Potenzlinie beider Kreise angehören muss.

Sei $u_1 X_1 + u_2 X_2 + u_3 X_3 = 0$ die Gleichung dieser Geraden, so hat man:

$$\varkappa (s_1 X_2 X_3 + s_2 X_1 X_3 + s_3 X_1 X_2) + \lambda (X_1^2 s_1 \cos\sigma_1 + X_2^2 s_2 \cos\sigma_2 + X_3^2 s_3 \cos\sigma_3)$$
$$\equiv \mu (s_1 X_1 + s_2 X_2 + s_3 X_3) . (u_1 X_1 + u_2 X_2 + u_3 X_3),$$

woraus folgt:

$$u_1 : u_2 : u_3 = \cos\sigma_1 : \cos\sigma_2 : \cos\sigma_3 .$$

Es ist daher die Gleichung der genannten Potenzlinie:

$$X_1 \cos\sigma_1 + X_2 \cos\sigma_2 + X_3 \cos\sigma_3 = 0,$$

welche als die Harmonikale des Punktes $H \equiv \frac{1}{\cos\sigma_1}, \frac{1}{\cos\sigma_2}, \frac{1}{\cos\sigma_3}$, nämlich des Höhenschnittpunktes des Dreiecks $X_1 X_2 X_3$ angesehen werden kann, weshalb sich ergiebt:

36) **Wählt man irgend einen Punkt der Harmonikale des Höhenschnittpunktes eines Dreiecks als Centrum zweier Kegelschnitte, wovon der eine dem Dreieck einbeschrieben, der andere demselben conjugirt ist, so ist für beide Kegelschnitte die Summe der Halbaxenquadrate gleich gross.**

Das Mittendreieck ist mit dem gegebenen Dreieck ähnlich und ähnlich-liegend, und der gemeinschaftliche Schwerpunkt S beider Dreiecke ist ihr Aehnlichkeitspunkt; alle Strecken des Mittendreiecks verhalten sich zu den entsprechenden Strecken im gegebenen Dreieck wie 1:2. Jedem Punkte P des Dreiecks entspricht ein ganz bestimmter Punkt Q im Mittendreieck derart, dass der Schwerpunkt auf der Verbindungslinie beider Punkte liegt und von P doppelt so weit entfernt ist als von Q. Daher sind die Abstände p_1, p_2, p_3 des Punktes P von den Seiten des Dreiecks doppelt so gross als die Abstände q'_1, q'_2, q'_3 des Punktes Q von den Seiten des Mittendreiecks. Bestimmt man nun einen Kegelschnitt, der P zum Centrum hat und dem Dreieck conjugirt ist, so hat man für seine Fläche P_c nach 28): $P_c = \pi \sqrt{2 R p_1 p_2 p_3}$; wählt man ferner

Q zum Mittelpunkt eines dem Dreieck einbeschriebenen Kegelschnittes, so ist dessen Fläche Q_e nach 10): $Q_e = 2\pi\sqrt{Rq'_1 q'_2 q'_3}$; weil aber $q'_1 = \frac{1}{2}p_1$, $q'_2 = \frac{1}{2}p_2$, $q'_3 = \frac{1}{2}p_3$, so folgt: $P_c = 2Q_e$ und man hat den Satz:

37) Bestimmt man zu dem Mittelpunkte eines dem Dreieck conjugirten Kegelschnittes den entsprechenden Punkt im Mittendreieck und wählt diesen als Centrum eines dem Dreieck einbeschriebenen Kegelschnittes, so ist der Inhalt dieses Kegelschnittes halb so gross als der Inhalt des ersteren.

Der Höhenschnittpunkt des Dreiecks hat zum entsprechenden Punkt im Mittendreieck das Umkreiscentrum; berücksichtigt man ferner, dass der dem Dreieck conjugirte Kegelschnitt, welcher den Höhenschnittpunkt zum Centrum hat, der conjugirte Kreis ist, so folgt nach 37):

38) Die Fläche des einem Dreieck conjugirten Kreises ist doppelt so gross als die dem Dreieck einbeschriebene Ellipse, welche das Umkreiscentrum zum Mittelpunkt hat.

Da dem Umkreiscentrum im Mittendreieck das Neunpunktkreiscentrum entspricht, so ergiebt sich auch:

39) Die mit dem Umkreise concentrische dem Dreieck conjugirte Ellipse ist doppelt so gross, als die mit dem Neunpunktkreise concentrische dem Dreieck einbeschriebene Ellipse.

Jeder Kegelschnitt, der mit einem dem Dreieck umschriebenen und durch die Gleichung $K_u \equiv a_1 X_2 X_3 + a_2 X_1 X_3 + a_3 X_1 X_2 = 0$ gegebenen Kegelschnitt homothetisch ist, lässt sich durch die Gleichung darstellen:

$$a_1 X_2 X_3 + a_2 X_1 X_3 + a_3 X_1 X_2 + (s_1 X_1 + s_2 X_2 + s_3 X_3)(\mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 X_3) = 0.$$

Soll dieser Kegelschnitt aber überdies noch dem Dreieck conjugirt sein, so müssen die Beziehungen bestehen:

$$a_1 + s_2\mu_3 + s_3\mu_2 = 0, \quad a_2 + s_1\mu_3 + s_3\mu_1 = 0, \quad a_3 + s_1\mu_2 + s_2\mu_1 = 0,$$

woraus man erhält, wenn man:

$$-a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = \varrho_1, \quad a_1 s_1 - a_2 s_2 + a_3 s_3 = \varrho_2, \quad a_1 s_1 + a_2 s_2 - a_3 s_3 = \varrho_3$$

setzt:

$$\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = s_1 \varrho_1 : s_2 \varrho_2 : s_3 \varrho_3.$$

Daher ist die Gleichung des mit K_u homothetischen und dem Dreieck conjugirten Kegelschnittes:

$$K_c \equiv X_1^2 s_1^2 \varrho_1 + X_2^2 s_2^2 \varrho_2 + X_3^2 s_3^2 \varrho_3 = 0.$$

Der Mittelpunkt P dieses Kegelschnittes hat aber die Coordinaten: $s_2 s_3 \varrho_2 \varrho_3$, $s_1 s_3 \varrho_1 \varrho_3$, $s_1 s_2 \varrho_1 \varrho_2$, weshalb seine Abstände p_1, p_2, p_3 von den Seiten des Dreiecks die folgenden sind:

$$p_1 = \frac{2J\varrho_2\varrho_3}{s_1(\varrho_2\varrho_3 + \varrho_1\varrho_3 + \varrho_1\varrho_2)},$$
$$p_2 = \frac{2J\varrho_1\varrho_3}{s_2(\varrho_2\varrho_3 + \varrho_1\varrho_3 + \varrho_1\varrho_2)},$$
$$p_3 = \frac{2J\varrho_1\varrho_2}{s_3(\varrho_2\varrho_3 + \varrho_1\varrho_3 + \varrho_1\varrho_2)}.$$

Das Centrum Q des Kegelschnittes K_u hat die Coordinaten $a_1\varrho_1$, $a_2\varrho_2$, $a_3\varrho_3$, so dass dessen Abstände von den Seiten des Mittendreiecks sind:

$$q'_1 = \frac{J\varrho_2\varrho_3}{s_1(s_1a_1\varrho_1 + s_2a_2\varrho_2 + s_3a_3\varrho_3)},$$
$$q'_2 = \frac{J\varrho_1\varrho_3}{s_2(s_1a_1\varrho_1 + s_2a_2\varrho_2 + s_3a_3\varrho_3)},$$
$$q'_3 = \frac{J\varrho_1\varrho_2}{s_3(s_1a_1\varrho_1 + s_2a_2\varrho_2 + s_3a_3\varrho_3)}.$$

Da aber:

$$\varrho_2\varrho_3 + \varrho_1\varrho_3 + \varrho_1\varrho_2 = s_1a_1\varrho_1 + s_2a_2\varrho_2 + s_3a_3\varrho_3$$

ist, so folgt:

$$p_1 = 2q'_1, \quad p_2 = 2q'_2, \quad p_3 = 2q'_3$$

und somit hat man nach 37) den Satz:

40) Bestimmt man zu einem dem Dreieck umschriebenen Kegelschnitte K_u den homothetischen dem Dreieck conjugirten Kegelschnitt K_c, so geht die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte durch den Schwerpunkt des Dreiecks, der von dem Centrum des letzteren Kegelschnittes doppelt so weit entfernt ist, als von dem Centrum des ersteren; ferner ist die Fläche des dem Dreieck conjugirten Kegelschnittes doppelt so gross, als diejenige des dem Dreieck einbeschriebenen und mit K_u concentrischen Kegelschnittes.

Kleinere Mittheilungen.

XIV. Zum Normalenproblem der Ellipse.

(Hierzu Taf. VII Fig. 3.)

Das Normalenproblem der Kegelschnitte, d. i. die Construction der durch einen Punkt gehenden Normalen beschäftigte schon die alten Geometer und Appolonius von Pergae löste dasselbe mit Hilfe einer gleichseitigen Hyperbel, welche durch den gegebenen Punkt und den Mittelpunkt des Kegelschnittes geht und deren Asymptoten den Axen des Kegelschnittes parallel sind. Einen einfachen und eleganten Beweis für diese Construction gab Chasles in seinem Traité des sections coniques. Wir befassen uns im Folgenden mit demselben Problem, insofern es sich auf die Ellipse bezieht, und geben für die erwähnte Construction einen neuen auf räumliche Betrachtungen fussenden Beweis.

Sei E (Taf. VII Fig. 3) die durch die Axen AA_1, BB_1 gegebene Ellipse, O ihr Mittelpunkt und M ein in ihrer Ebene gelegener Punkt; es sollen die durch letzteren gehenden Normalen von E, resp. deren Fusspunkte bestimmt werden.

Die Ebene der Ellipse soll im Folgenden stets H genannt werden.

Einem bekannten Theorem von Dandelin zufolge lassen sich durch E zwei Rotationscylinderflächen legen, welche in Bezug auf die Ebene H zu einander in orthogonaler Symmetrie stehen. Heisse R_c eine derselben und sei ϱ ihre durch O gehende Axe, und fassen wir den Punkt M als die Spur einer auf der Ebene H senkrecht stehenden Geraden auf, betrachten weiter diese Gerade als die Leitlinie einer Regelfläche, deren Erzeugenden zur Fläche R_c normal sind und aus letzterem Grunde die Axe ϱ schneiden, sowie auch mit einer auf ϱ senkrecht geführten Ebene r parallel sein müssen, so wird die Fläche P von der Ebene H in einer Curve $\mathfrak{H}$ geschnitten werden, welche durch die Punkte M und O geht. Der Punkt I wäre ein Schnittpunkt von $\mathfrak{H}$ und E; als solcher ist er die Spur einer Erzeugenden e von P auf der Ebene H; der Erzeugung von P zufolge ist e im Punkte I normal zu R_c, also auch normal zu der Tangentialebene von R_c längs der durch I gehenden Erzeugenden, daher die auf die Ebene H bezogene orthogonale Projection von e senkrecht auf der Trace der genannten Tangentialebene, d. i. senkrecht auf der

Tangente der Ellipse im Punkte I — mit anderen Worten: I ist der Fusspunkt einer durch M gehenden Ellipsennormale MI.

Um die Zahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{H}$ und E und damit auch die Zahl der durch einen Punkt gehenden Ellipsennormalen angeben zu können, müssen wir zuvor die Ordnungszahl der Curve $\mathfrak{H}$ resp. der Fläche P feststellen.

Die Fläche P ist ein hyperbolisches Paraboloid von den Leitlinien M, ϱ und der Richtebene r (erstes System). Die Richtebene r_1 des zweiten Systems ist, weil zu M und ϱ parallel, M aber senkrecht auf H steht, rechtwinklig zur Ebene H, d. h. die Richtebenen beider Systeme stehen aufeinander senkrecht oder das Paraboloid P ist ein gleichseitig hyperbolisches. Nachdem nun die Ebene H der Schnittlinie der beiden Richtebenen resp. der Axe des Paraboloids nicht parallel ist, so kann $\mathfrak{H}$ nur eine Hyperbel sein (welche in dem Falle, wo M auf der Axe AA_1 gelegen ist, in zwei zu einander normale Gerade degenerirt; gleichzeitig besteht in diesem Falle das Paraboloid aus zwei zu einander senkrecht stehenden Ebenen). Die Asymptoten von $\mathfrak{H}$ sind die Schnittlinien von H mit den asymptotischen Ebenen der mit H parallelen Erzeugenden beider Systeme von P. Letztere Erzeugende sind, wie leicht zu erkennen, parallel mit AA_1, BB_1, die Spuren der durch sie gehenden asymptotischen Ebenen auf H sind daher zu einander rechtwinklig und somit die Hyperbel $\mathfrak{H}$ eine gleichseitige.

„Die Fusspunkte der durch einen gegebenen Punkt gehenden Normalen einer Ellipse liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel, die durch den gegebenen Punkt und den Mittelpunkt der Ellipse hindurchgeht und deren Asymptoten den Axen der letztern parallel sind."

Da sich $\mathfrak{H}$ und E als Curven zweiten Grades in vier Punkten schneiden, so ist die Zahl der durch einen Punkt gehenden Ellipsennormalen gleich 4.

Wir schliessen hier noch die Construction der Asymptoten und Axen von $\mathfrak{H}$ an, weil sich aus derselben eine nicht uninteressante Folgerung ziehen lässt. Zu dem Ende legen wir der Ebene H die Bedeutung der horizontalen, der Ebene, welche durch AA_1 geht und zu H senkrecht ist, die daher als Richtebene r_1 angesehen werden kann, die Bedeutung einer verticalen Projectionsebene V bei.

Die Erzeugenden von R_c sind parallel den Asymptoten der Focalhyperbel von $\mathfrak{H}$, d. i. einer Hyperbel, welche die Brennpunkte von E zu Scheiteln und die Scheitel von E zu Brennpunkten besitzt und deren Ebene zu H senkrecht, also mit V identisch ist. Ist F_1 ein Brennpunkt von E, so ist BF_1 die Verticalprojection einer mit einer Asymptote der Focalhyperbel parallelen Geraden, daher $\varrho' \| BF_1$ die verticale, AA_1 die horizontale Projection der Axe von R_c, welche uns eine Leitlinie von P repräsentirt, während die andere Leitlinie die horizontal projicirende

Gerade M vorstellt. Die Richtebene $r_v r_h$ ($r_v \perp \varrho'$) des ersten Systems ist eine Verticalprojicirende, die Richtebene des zweiten Systems ist V.

Um die Asymptoten von $\mathfrak{H}$ zu finden, haben wir zuerst die mit H parallelen Erzeugenden beider Systeme von P aufzusuchen. Die mit H parallele Erzeugende des ersten Systems muss, weil sie gleichzeitig der Ebene H und der Ebene r parallel sein soll, parallel sein mit der Geraden BB_1; sie ist daher eine verticalprojicirende Gerade und ihre verticale Projection n' ist der Schnittpunkt von ϱ' mit M'; die asymptotische Ebene derselben ist mit $r_v r_h$ parallel, daher die durch n' zu r_v gezogene Parallele r_1^v die verticale, die durch den Schnittpunkt a der letztern mit r_h gezogene Parallele r_1^h die horizontale Trace derselben. r_1^h stellt sonach die eine Asymptote t_u von $\mathfrak{H}$ vor. Die mit H parallele Erzeugende des zweiten Systems soll gleichzeitig parallel sein mit den Ebenen H und V, folglich auch parallel ihrer Schnittlinie AA_1, und muss alle Erzeugenden des ersten Systems schneiden. Die Gerade n' ist bereits eine Erzeugende des ersten Systems. Um noch eine zweite solche zu finden, führen wir an beliebiger Stelle eine zu $r_v r_h$ parallele Ebene $r_2^v r_2^h$; diese schneidet die Leitlinie M und ϱ in den Punkten (mm') bezw. (vv') und die Verbindungslinie $(mv, m'v')$ dieser ist die zweite Erzeugende des ersten Systems. Eine durch n' zu AA_1 gezogene Parallele stellt nun die verticale Projection der gesuchten mit H parallelen Erzeugenden des zweiten Systems; der Schnittpunkt s dieser Parallelen mit $m'v'$ ist die verticale Projection des Schnittpunktes der Erzeugenden mit der Erzeugenden $(mv, m'v')$, s die zugehörige horizontale Projection und die durch letztere gehende mit AA_1 parallele Gerade t^1_u die horizontale Projection der gesuchten Erzeugenden, und da sie gleichzeitig die Spur der entsprechenden asymptotischen Ebene vorstellt, so ist t^1_u die zweite Asymptote von $\mathfrak{H}$.

Die reelle Axe ist die Halbirungslinie h jenes rechten Winkels, innerhalb dessen die Punkte M und O liegen. Aus den Asymptoten und einem der beiden Punkte, z. B. O, können wir leicht die Länge der reellen Axe, resp. die Scheitel der Hyperbel finden, indem wir letztere auf die Geraden t_u, t^1_u als die Axen eines Coordinatensystems beziehen; es lautet dann die Gleichung der Hyperbel $xy = k^2$ und für die Scheitel gilt speciell $x = y = k$. Die Constanten k finden wir aus den Coordinaten des Punktes O und zwar als deren mittlere geometrische Proportionale $b\sigma$. Machen wir nämlich $bO_1 = bO$ und beschreiben über OO_1 als Durchmesser einen Halbkreis, so wird letzterer von der verlängerten BB_1 in σ getroffen und es ist $b\sigma = k$. Die durch σ zu AA_1 gezogene Parallele schneidet h in einem der gesuchten Hyperbelscheitel $\mathfrak{A}$, wodurch auch der zweite Scheitel $\mathfrak{A}_1$ bekannt ist.

Wenn wir berücksichtigen, dass bei der Bestimmung der Asymptoten t_u, t^1_u von $\mathfrak{H}$ die Axenlängen von E gar nicht in Betracht kamen, sondern dass auf die Lage derselben einzig und allein die Richtung der

Geraden ϱ' resp. BF_1 oder, da letztere durch das Verhältniss der kleinen Halbaxe zur Excentricität gegeben ist, das genannte Verhältniss von Einfluss war, so können wir sofort folgenden Satz aussprechen:

„Der geometrische Ort der Fusspunkte aller durch einen Punkt gehenden Normalen einer Schaar von concentrischen, ähnlich liegenden Ellipsen, bei welchen das Verhältniss zwischen der kleinen Halbaxe und Excentricität ein constantes ist, ist eine gleichseitige Hyperbel, welche durch den gegebenen Punkt und den allen Ellipsen gemeinschaftlichen Mittelpunkt geht und deren Asymptoten parallel sind den gemeinsamen Axen der Schaar."

Aufgabe. Von einer Ellipse sind gegeben die Axen α, β der Lage nach, ferner ist gegeben durch zwei Strecken μ, ν das Verhältniss $\frac{\mu}{\nu}$ der kleinen Halbaxe zur Excentricität und eine Gerade N als Normale der Ellipse; es sollen die Längen der Axen resp. ihre Endpunkte bestimmt werden, sowie auch der Punkt anzugeben ist, für welchen N eine Normale der Ellipse vorstellt.

Nehmen wir auf der Geraden N einen beliebigen Punkt M an, so wissen wir aus den vorigen Betrachtungen, dass die Fusspunkte der vier durch denselben gehenden Normalen der gegebenen Ellipse auf einer gleichseitigen Hyperbel $\mathfrak{H}$ liegen, welche durch die Punkte M und O geht und deren Asymptoten parallel sind den Ellipsenaxen α, β. Es ist daher der Punkt, für welchen N eine Normale der Ellipse vorstellt, der von M verschiedene zweite Schnittpunkt der N mit der Hyperbel $\mathfrak{H}$; letztere ist durch die Punkte M und O einerseits und durch die Gerade $\varrho' \parallel BF_1$, wenn $OB = \mu$, $OF_1 = \nu$ gemacht wurde, andererseits vollkommen bestimmt und die Ermittelung ihrer Asymptoten und Axen hat in der vorangegebenen Weise zu geschehen.

Hat man den Fusspunkt I von N gefunden, so kennt man auch die Tangente der Ellipse in diesem Punkte und mit Hilfe dieser findet man leicht die Axenendpunkte der Ellipse.

Brünn, im Juni 1883. CARL SCHIREK, Cand. prof.

XV. Zur Theorie der Raumcurven.

Theorem: Ist eine Raumcurve $\mu\nu^{\text{ter}}$ Ordnung $R_{\mu\nu}$ als vollständiger Schnitt zweier allgemeinen, weder gewöhnlich, noch stationär sich berührenden Oberflächen μ^{ter} und ν^{ter} Ordnung gegeben, so kann die durch reciproke Abbildung der Schmiegungsebenen von $R_{\mu\nu}$ entstandene Raumcurve

$R_{\varrho\sigma}$ *nicht* als vollständiger Schnitt zweier Oberflächen aufgefasst werden.*

Um dieses Theorem zu beweisen, sei zunächst darauf hingewiesen, dass die Raumcurve $R_{\varrho\sigma}$ keine wirklichen Doppelpunkte enthalten kann, weil sonst $R_{\mu\nu}$ Doppelschmiegungsebenen besitzen müsste; nun hat eine Raumcurve zwar eine bestimmte Anzahl von Schmiegungsebenen, welche für andere Punkte zugleich Tangentialebenen sind; dass aber von den dem Berührungspunkte einer Schmiegungsebene auf dieser entsprechenden $n-3$ übrigen Curvenpunkten zu gleicher Zeit drei coincidirten, kann im Allgemeinen nicht vorkommen.

Es hat nun die Raumcurve $R_{\mu\nu}$ von der Ordnung $O=\mu\nu$

$$D=\frac{O(\mu-1)(\nu-1)}{2}$$

scheinbare Doppelpunkte**, dagegen unserer Voraussetzung zufolge weder wirkliche Doppelpunkte, noch Spitzen. Machen wir nun die Annahme, dass die durch reciproke Abbildung der Schmiegungsebenen von $R_{\mu\nu}$ erhaltene Raumcurve $R_{\varrho\sigma}$ von der Ordnung $C=\varrho\sigma$ der vollständige Schnitt zweier Oberflächen ϱ^{ter} und σ^{ter} Ordnung sei, so findet man als Anzahl ihrer scheinbaren Doppelpunkte die analog gebildete Zahl

$$1)\qquad D'=\frac{C(\varrho-1)(\sigma-1)}{2}.$$

Man sieht, diese Zahl ist abhängig von der Art und Weise, die Grösse C in ein Product zweier Factoren zu zerlegen. Wir können aber den Werth von D' noch auf anderem Wege, unabhängig von der Zerlegung der Ordnungszahl C der Raumcurve $R_{\varrho\sigma}$, bilden. Diese Bestimmung von D' gelingt am einfachsten mittels Anwendung des bekannten Satzes von der Gleichheit des Geschlechts eindeutig aufeinander bezogener Curven auf $R_{\mu\nu}$ und $R_{\varrho\sigma}$.

Nach der Definition*** des Geschlechts p muss daher sein:

$$p=\frac{(O-1)(O-2)}{2}-D=\frac{(C-1)(C-2)}{2}-D'-\varkappa'$$

oder

$$2)\qquad D'=\frac{(C-1)(C-2)}{2}-\varkappa'-\frac{(O-1)(O-1)}{2}+D,$$

worin $\varkappa'$ die Anzahl der Spitzen von $R_{\varrho\sigma}$ bedeutet, die durch stationäre Berührungen der Flächen ϱ^{ter} und σ^{ter} Ordnung hervorgerufen sind.

---

* Ich stelle die Betrachtungen deshalb an der Reciproken der Schmiegungsebenenfläche an, einmal um complicirte Bezeichnungen zu vermeiden, dann um die Anschauung, welche leichter an einem Punktgebilde haftet, zu unterstützen.

** Salmon, Analytische Geometrie des Raumes, II, Art. 106.

*** Salmon, *ibid.*, Art. 107.

Hierin ist $\varkappa'$ noch unbekannt und es handelt sich darum, den Werth dieser Grösse unabhängig von der Zerlegung der Zahl C in ein Product zweier Factoren zu bestimmen.

Bezeichnen wir mit R den Rang der gegebenen Raumcurve $R_{\mu\nu}$ (d. i. die Ordnung der Tangentenfläche), und mit C wie oben die Classe derselben oder die Ordnung der Raumcurve $R_{\varrho\sigma}$, so gelten die Beziehungen:

$$3)\quad \begin{cases} R = O(O-1) - 2D = O(\mu+\nu-2) \\ C = 3O(O-2) - 6D = 3O(\mu+\nu-3), \end{cases}$$

und da der Rang von $R_{\varrho\sigma}$ auf R, die Classe derselben auf O zurückführen muss, so ist analog

$$4)\quad R = C(C-1) - 2D' - 3\varkappa', \quad O = 3C(C-2) - 6D' - 8\varkappa'.$$

Aus den Gleichungen des Systems 4) erhält man leicht den Werth von $\varkappa'$

$$= O - 3(R-C);$$

aus 3) aber folgt

$$o = C - 3(R-O),$$

daher schliesslich

$$\varkappa' = 2(C-O).$$

Setzen wir diesen Werth in 2) ein und vergleichen dann 2) mit 1), so erhalten wir als Resultat:

$$C(\varrho-1)(\sigma-1)$$
$$= (C-1)(C-2) - 4C + 4O - (O-1)(O-2) + O(\mu-1)(\nu-1)$$

oder nach gehöriger Reduction

$$5)\quad C(\varrho+\sigma-8) = O(\mu+\nu-8).$$

Ersetzt man hierin noch C durch $3O(\mu+\nu-3)$ und dividirt beiderseits mit $O(\mu+\nu-3)$, so ergiebt sich:

$$3(\varrho+\sigma-8) = \frac{\mu+\nu-8}{\mu+\nu-3}.$$

Es zeigt sich nun, dass diese Gleichung für kein Werthsystem $\mu \geqq 2$, $\nu \geqq 2$, welches überhaupt reelle doppelt gewundene Curven liefert, erfüllt ist. Den Fall $\mu = 2$, $\nu = 2$ müssen wir besonders discutiren. Er liefert $C = 12$, also $\varrho = 4$, $\sigma = 3$ oder $\varrho = 6$, $\sigma = 2$; die linke Seite wird daher $= -3$ oder Null, die rechte $= -4$; alle übrigen Fälle mögen durch $\mu > 2$, $\nu \geqq 2$ charakterisirt sein; für sie ergiebt sich die linke Seite ausschliesslich als positive ganze Zahl, da das kleinstmögliche Werthsystem $\varrho = \sigma = \sqrt{C}$ bereits für $\mu = 3$, $\nu = 2$ $\varrho + \sigma = 12$ liefert, C aber mit μ und ν beständig wächst. Die rechte Seite dagegen ist entweder negativ oder (von $\mu + \nu > 8$ an) ein positiver echter Bruch, wie man sofort erkennt.

Die Gleichung 5) ist also für alle in Betracht kommenden Werthsysteme μ, ν, ϱ, σ unmöglich, d. h. die Voraussetzung, unter welcher sie bestand, ist unhaltbar. Die Raumcurve $R_{\varrho\sigma}$ kann in keiner Weise als vollständiger Schnitt zweier Oberflächen aufgefasst werden.

Jena, den 22. August 1883. Dr. Carl Hossfeld.

XVI. Geometrischer Beweis der bekanntesten Eigenschaften einer binären cubischen Form.

Es ist bekannt, dass das Hesse'sche Uebertragungsprincip lehrt, wie man mittelst der einfachsten Eigenschaften der Büschel (von Strahlen oder Ebenen) und der Punktreihen viele projectivische Eigenschaften von zusammengesetzteren Gebilden, insbesondere von den Kegelschnitten, erhalten kann. Andererseits haben die Untersuchungen über die binären Formen einer beliebigen Ordnung n und über die Elementengruppe, welche von der Gleichung dargestellt ist, die man erhält, indem man eine beliebige Form zu Null gleich setzt, klar gemacht, wie nützlich es ist, die rationalen Gebilde, von welchen jene Gruppe einen Theil bildet, zuerst unbestimmt zu lassen. In der That giebt jede Bestimmung dieser Gebilde eine Reihe von Sätzen einer besondern geometrischen Figur. Jeder Eigenschaft einer beliebigen dieser Darstellungen entspricht dann eine der Form und umgekehrt; man kann sich daher die Frage stellen, ob es möglich ist, den entgegengesetzten Weg zu gehen, nämlich eine besondere Darstellung einer binären Form zu definiren und aus ihren projectivischen Eigenschaften diejenigen der Form herzuleiten. Dass das im Allgemeinen möglich ist, bedarf keines Beweises; wie man das für die cubische Form bewerkstelligen kann, beweisen die folgenden Zeilen.

Wir werden die cubische Form f auf einem Kegelschnitte K darstellen durch die drei Punkte A, B, C.

Ziehen wir die Tangenten a, b, c zu K in den Punkten A, B, C, die drei geraden Linien, welche A, B, C resp. mit den Punkten bc, ca, ab verbinden, und bestimmen endlich die drei neuen Punkte A', B', C', worin diese Linien K wieder schneiden. Der Wurf A, B, C, C' ist projectivisch seiner Projection vom Punkte A auf die gerade Linie CC'; wenn nun L den Punkt bezeichnet, wo AB und CC' sich begegnen, so kann man schreiben

$$(A, B, C, C') \overline{\wedge} (ab, L, C, C');$$

aber da die gerade Linie AB die Polare des Punktes ab ist, so sind die Punkte ab und L conjugirt in Bezug auf den Kegelschnitt K und daher ist der letzte Wurf harmonisch. Also kann man schliessen, dass

$$(A, B, C, C') = -1.$$

Ebenso beweist man, dass

$$(B, C, A, A') = -1, \quad (C, A, B, B') = -1.$$

Da ferner das Dreiseit abc dem Kegelschnitt K umschrieben ist, gehen die Geraden, welche seine Eckpunkte mit den Berührungspunkten auf den entgegengesetzten Seiten verbinden, durch denselben Punkt O. Infolge dessen ist jedes der Punktepaare

$$A, A'; \quad B, B'; \quad C, C'$$

harmonisch zu den Punkten

$$M, N,$$

in welchen K von der Polaren o des Punktes O geschnitten wird; d. h. A, A; B, B'; C, C' bilden eine Involution. Daher hat man den folgenden allgemeinen Satz:

Sind A, B, C drei Elemente einer rationalen, einfach unendlichen Reihe von Elementen, und A', B', C' diejenigen Elemente derselben, welche den folgenden Gleichungen genügen:

$$(B, C, A, A') = -1, \quad (C, A, B, B') = -1, \quad (A, B, C, C') = -1,$$

so sind

$$A, A'; \quad B, B'; \quad C, C'$$

drei Punktepaare einer und derselben Involution.

Die drei Elemente der cubischen Covariante einer binären cubischen Form kann man definiren als die drei harmonisch Conjugirten jedes Elements der Form in Bezug auf die zwei anderen; wenn demnach der Tripel ABC auf K eine binäre cubische Form darstellt, so wird der Tripel $A'B'C'$ die cubische Covariante Q von f darstellen; den obigen Satz kann man daher folgendermassen aussprechen:

Die drei Elemente einer cubischen Form f und die seiner cubischen Covariante Q bilden drei Paare einer Involution.

Und da es ersichtlich ist, dass, wenn man den Tripel sucht, den man mit den nämlichen Constructionen erhält, die gedient haben, um $A'B'C'$ von ABC zu erhalten, zum Tripel ABC zurückkehrt, so kann man schliessen:

Die cubische Covariante der cubischen Covariante einer binären cubischen Form ist der ursprünglichen Form proportional. (Vergl. Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen, S. 123.)

In der vorigen Darstellung bemerkten wir, dass das Viereck A, A', C, C' dem Kegelschnitte K eingeschrieben ist; daher liegen die drei Punkte

$$AC'.A'C, \quad AA'.C'C, \quad ac$$

in einer geraden Linie, oder die geraden Linien

$$AC', \quad A'C, \quad BB'$$

gehen durch denselben Punkt. Daraus folgt, dass auch die Punktepaare

$$A, C'; \quad A', C; \quad B, B'$$

einer Involution angehören. Auf dieselbe Weise beweist man, dass dasselbe der Fall ist bei den zwei anderen Tripeln von Punktepaaren:

$$B, A'; \quad B', A; \quad C, C';$$
$$C, B'; \quad C', B; \quad A, A'.$$

Infolge dessen können wir einen vorigen Satz vervollständigen, indem wir sagen:

Die drei Elemente einer Form und die seiner cubischen Covariante bilden auf vier verschiedene Weisen drei Paare einer Involution.

Indem wir jetzt zur erstern Involution zurückkehren, erinnern wir daran, dass seine Ordnungselemente M, N die Punkte sind, in welchen K von der Polaren o von O in Bezug auf K geschnitten wird. Die drei Punkte

$$a.BC, \quad b.CA, \quad c.AB$$

liegen auf einer geraden Linie; da diese die Punkte $a.BC$, $b.CA$, $C.AB$ enthält, so ist sie conjugirt in Bezug auf K jeder der geraden Linien

$$A.bc \equiv AA', \quad B.ca \equiv BB', \quad C.ab \equiv CC',$$

d. h. sie deckt sich mit der Polaren o des Punktes O, wo AA', BB', CC sich schneiden. Daher kann man die Axe o der vorigen Involution ansehen als die gerade Linie, welche die Punkte $a.BC$, $b.CA$, $c.AB$ oder die Punkte

$$AA.BC, \quad BB.CA, \quad CC.AB$$

(wo AA die Verbindungslinie darstellt von A mit dem Kegelschnittspunkte, der ihm unendlich nahe liegt u. s. w.) verbindet. Das beweist, dass o die Axe der Homographie ist, welche von den drei folgenden Paaren homologer Punkte bestimmt ist:

$$A, B; \quad B, C; \quad C, A;$$

und dass M, N seine Ordnungselemente sind. Infolge dessen hat man

$$(M, A, B, C) \overline{\wedge} (M, B, C, A); \quad (N, A, B, C) \overline{\wedge} (N, B, C, A)$$

und das giebt uns folgenden Satz:

Jedes der Ordnungselemente M, N der Involution, welche die drei Punktepaare A, A'; B, B'; C, C' enthält, bildet einen äquianharmonischen Wurf mit dem Punkttripel A, B, C.

Diese Eigenschaft macht sogleich klar, dass die Punkte M, N die Hesse'sche Covariante Δ der Form f darstellen, welche durch den Tripel ABC bestimmt ist.

Bemerken wir, dass man zu der geraden Linie o vom Dreieck $A'B'C'$ ausgehend kommt, wie sie erreicht wurde von der Betrachtung des Tripels ABC; also:

Die Hesse'schen Formen einer cubischen Form f und ihrer cubischen Covariante Q sind nur um einen constanten Factor verschieden.

Aus der Construction der Punkte A', B', C', M, N erhellt, dass, wenn die Punkte B, C zusammenfallen in einen einzigen Punkt, sich in diesem auch A', B', C', M, N vereinigen. Daher:

Wenn die Gleichung $f=0$ zwei gleiche Wurzeln hat, so sind die Form Q dem Cubus und die Form Δ dem Quadrate

desjenigen Ausdrucks proportional, wovon f das Quadrat enthält. (Vergl. Clebsch a. a. O. S. 129.)

Ebenso erkennt man:

Wenn die Gleichung $f=0$ drei gleiche Wurzeln hat, so ist die Form Q zu f proportional, während Δ ganz unbestimmt ist.

Wir bemerken noch, dass aus den Eigenschaften, die man schon auseinandergesetzt hat, folgt, dass, wenn die zwei Punkte, welche die Hesse'sche Form Δ darstellen, zusammenfallen, dann auch mindestens zwei der Punkte, die f darstellen, zusammenfallen, und umgekehrt. Diese Bemerkung giebt den Satz:

Die Discriminante der cubischen Form f ist proportional der Discriminante ihrer Hesse'schen Form Δ. (Vergl. Clebsch a. a. O. S. 114.)

Von den drei Punkten A, B, C ist einer, A, immer reell, wenn f reell ist; die Punkte M, N können beide reell oder imaginär (conjugirt) sein; wenn M, N reell sind, so sind B und C imaginär und umgekehrt, da die Würfe $MABC$, $NABC$ äquianharmonisch sein sollen. Man kann also sagen:

Die Gleichung $f=0$ hat drei oder eine reelle Wurzel, je nachdem die Gleichung $\Delta=0$ zwei oder keine imaginäre Wurzel hat, d. h. je nachdem die gemeinsame Discriminante dieser Gleichungen ein gewisses Zeichen oder das entgegengesetzte hat.

Da es immer möglich ist, mittels einer projectivischen Transformation einen Kegelschnitt, von welchem man drei Punkte A, B, C festgestellt hat, in einen Kreis C zu verwandeln,* und zwar so, dass ABC zum Eckpunkttripel eines gleichseitigen in C eingeschriebenen Dreiecks wird, so können wir voraussetzen, dass die binäre cubische Form eben von diesem regulären Dreieck dargestellt sei**. Die cubische Covariante wird so von einem Dreieck $A'B'C'$ dargestellt, welches gleichseitig und in C eingeschrieben ist und das zu ABC in Bezug auf den Mittelpunkt O von C symmetrisch ist; endlich werden die Punkte M, N in die Kreispunkte der Ebene von C übergehen. Diese besondere Darstellung vereinfacht gewisse Beweise. Das folgende Raisonnement kann als ein Beispiel davon dienen. Die geraden Linien, welche den Punkt

* Es ist kaum nöthig, zu bemerken, dass man hier keinen Unterschied macht zwischen reellen und imaginären Elementen.

** Auf diese besondere Darstellung haben auch die Herren Beltrami und Klein aufmerksam gemacht; doch ist ihr Ausgangspunkt vom unsrigen verschieden.

O mit den vier Punkten B, C', M, N verbinden, bilden einen äquianharmonischen Wurf*; daher kann man im Allgemeinen schliessen:

Die Elemente der Hesse'schen Curve Δ einer cubischen Form f bilden ein äquianharmonisches Doppelverhältniss mit jedem der Elementenpaare, welche man erhält, indem man ein Element von f mit einem nicht gleichnamigen von Q vereinigt.

Es werden also äquianharmonisch sein die sechs Würfe:

$$(M, N, B, C'); \quad (M, N, C, A'); \quad (M, N, A, B');$$
$$(M, N, B', C); \quad (M, N, C', A); \quad (M, N, A', B)$$

und die sechs Punktepaare

$$B'C', \quad BC, \quad C'A', \quad CA, \quad A'B', \quad AB,$$

welche die Hesse'schen Covarianten der cubischen Form darstellen, die von den Punkttripeln

$$MNA, \quad MNA', \quad MNB, \quad MNB', \quad MNC, \quad MNC'$$

dargestellt sind.**

Wählen wir nun beliebig auf dem Kegelschnitte (welchen wir nicht mehr als Kreis vorauszusetzen nöthig haben) K einen Punkt A_1 und bestimmen den zweiten Punkt A'_1 des Kegelschnittes, welcher auf der geraden Linie OA_1 liegt, und die Punkte B_1, B'_1, C_1, C'_1 desselben, die von den Bedingungen bestimmt sind, dass die Würfe

$$(MNC'_1A_1), \quad (MNC_1A'_1),$$
$$(MNA'_1B_1), \quad (MNA_1B'_1)$$

äquianharmonisch seien. Man bemerkt dann sogleich, dass die zwei Punkttripel

$$A_1B_1C_1 \text{ und } A'_1B'_1C'_1$$

unter sich dieselben Beziehungen haben, die zwischen

$$ABC \text{ und } A'B'C'$$

bestehen und dass MN die gemeinsame Hesse'sche Covariante darstellt der binären cubischen Formen, die sie darstellen. Und da man sie bestimmt hat vom Punkte A_1 ausgehend, welcher nur gezwungen ist, auf dem Kegelschnitte zu liegen, so kann man die Folgerung ziehen:

Es giebt unendlich viele cubische Formen, die dieselbe Hesse'sche Form haben; man kann sie in Paare ordnen (vergl. Clebsch a. a. O. S. 134), welche die Eigenschaft haben, dass die Formen eines Paares jede die cubische Covariante der andern sind.

---

* Man erkennt das sogleich z. B. indem man bemerkt, dass man für Gleichungen dieser vier geraden Linien die folgenden annehmen kann:

$$x \pm iy = 0, \quad x \pm \sqrt{3}\,y = 0.$$

** Diese Eigenschaft kann man verwerthen, um die Eigenschaften der Figur zu vervollständigen, welche die Basis unserer Untersuchungen bildet.

So erhält man diejenige Schaar von cubischen Formen, welche man gewöhnlich in der Theorie der cubischen Formen mit $\varkappa f + \lambda Q$ bezeichnet. Die Methode, wodurch wir zu dieser Schaar gekommen sind, lehrt:

Die Discriminanten der cubischen Formen der Schaar unterscheiden sich nur um einen constanten Factor (Clebsch a. a. O. S. 123). In der Tripelschaar kommen nur zwei Tripel vor, in welchen Elemente zusammenfallen; es fallen dann jedesmal alle drei zusammen, und zwar geschieht dies in den zwei Punkten, die $\varDelta$ darstellen (a. a. O. S. 131).

Die vorigen Betrachtungen führen eine einfach-unendliche Reihe von in K eingeschriebenen Dreiecken ein, welche zum Dreieck $A_1 B_1 C_1$ analog sind. Man kann sie geometrisch viel einfacher definiren, als vorher geschehen ist. Um das zu beweisen, bedienen wir uns der besondern Darstellung, die wir schon auseinandergesetzt haben; in diesem Falle ist $A_1 B_1 C_1$ ein beliebiges in C eingeschriebenes gleichseitiges Dreieck und die Seiten aller Dreiecke der Reihe berühren einen Kreis, welcher den Mittelpunkt mit dem gegebenen gemein hat. Zum allgemeinen Falle zurückkehrend, können wir also den Satz aussprechen:

Die Punkttripel eines Kegelschnitts, welche die cubischen Formen darstellen, die dieselbe Hesse'sche Covariante haben, sind die Eckpunkte von Dreiecken, welche einem andern Kegelschnitte umschrieben sind, welcher den erstern in den zwei Punkten berührt, welche die gemeinschaftliche Hesse'sche Form darstellen.

Umgekehrt kann immer eine solche Reihe von Dreiecken angesehen werden als die Darstellung einer Schaar $\varkappa f + \lambda Q$ binärer cubischer Formen.

Mantua. Dr. Gino Loria.

XVII. Bemerkungen über perspectivische Dreiecke auf einem Kegelschnitte und über eine specielle Reciprocität.

(Hierzu Taf. VII Fig. 4 u. 5.)

1.

Wir schicken als bekannt den Satz voraus, dass zwei Dreiecke, welche in Bezug auf einen Kegelschnitt K^2 zu einander reciprok sind, sich in perspectivischer Lage befinden.

Sei dann $M_1 M_2 M_3$ ein dem Kegelschnitt K^2 eingeschriebenes Dreieck (Taf. VII Fig. 4)*. Seine Seiten — $M_2 M_3$ oder m_1, $M_1 M_3$ oder m_2 und $M_2 M_1$ oder m_3 — sollen die zwei beliebigen Geraden p, q in den resp. Punkten $P_1 P_2 P_3$, $Q_1 Q_2 Q_3$ schneiden. Zu diesen Punkten construiren wir

* In Fig. 4 und 5 ist an Stelle eines Kegelschnittes ein Kreis gesetzt.

die Polaren in Bezug auf K^2. Sie treffen sich zu dreien in P, resp. Q, den Polen von p und q. Sie schneiden p resp. q in den Punkten $P'_1 P'_2 P'_3$ resp. $Q'_1 Q'_2 Q'_3$, welche die zugeordneten zu $P_1 P_2 P_3$, $Q_1 Q_2 Q_3$ in der Involution harmonischer Pole auf p resp. q sind. Verbinden wir nun $P'_1 P'_2 P'_3$ mit Q, $Q'_1 Q'_2 Q'_3$ mit P, so entsteht durch die Schnittpunkte von $P'_1 Q$, $Q'_1 P$ — $P'_2 Q$, $Q'_2 P$ und $P'_3 Q$, $Q'_3 P$ ein Dreieck $A_1 A_2 A_3$, von dem wir nachweisen können, dass es zu $M_1 M_2 M_3$ perspectivisch liegt.

Wir construiren zu diesem Zwecke einen Kegelschnitt K^{*2}, für den die Involution harmonischer Pole auf p und q dieselbe ist wie für K^2, der also p und q in denselben vier Punkten $ABCD$ schneidet wie K^2. Nehmen wir dann an, dass P der Pol von q in Bezug auf K^{*2} ist, so ist P und der Schnittpunkt — Q^* — von $\overline{PQ}$ mit q ein Paar der Involution harmonischer Pole in $\overline{PQ}$ in Bezug auf K^{*2}. Ein zweites Paar dieser Involution besteht aus den in $\overline{PQ}$ liegenden Diagonalpunkten XY des Vierecks $ABCD$. Also ist diese Involution und mithin auch K^{*2} bestimmt. Zu der erwähnten Involution gehört aber auch Q und der Schnittpunkt P^* von PQ mit p als Paar. Denn nach bekannten Sätzen sind die Punkte XY, PQ, P^*Q^* Paare einer Involution. Eine zweite Involution besteht aus den Paaren XY, PP^*, QQ^*. Daraus folgt, dass auch XY, PQ^*, P^*Q Paare einer Involution sind. Also ist Q der Pol zu p in Bezug auf K^{*2}.

Construiren wir nun zu $M_1 M_2 M_3$ in Bezug auf K^{*2} das reciproke Dreieck, so haben wir $Q'_1 Q'_2 Q'_3$ mit P und $P'_1 P'_2 P'_3$ mit Q zu verbinden und die resp. Linien zum Schnitte zu bringen. Wir erhalten dann das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ und es folgt — wie behauptet —, dass dies zu $M_1 M_2 M_3$ perspectivisch ist.

2.

Sei wieder $M_1 M_2 M_3$ — resp. $m_1 m_2 m_3$ — ein dem Kegelschnitt K^2 eingeschriebenes Dreieck. P und Q seien zwei beliebige Punkte der Ebene. Ziehen wir die Geraden von P und Q nach $M_1 M_2 M_3$, so sollen dieselben K^2 ein zweites Mal in den resp. Punkten $P_1 P_2 P_3$, $Q_1 Q_2 Q_3$ treffen. Dann bestimmen die Verbindungslinien $P_1 Q_1$, $P_2 Q_2$, $P_3 Q_3$ ein Dreieck — $A_1 A_2 A_3$ —, das zu $M_1 M_2 M_3$ perspectivisch gelegen ist (Fig. 5).

Um dies zu beweisen, betrachten wir zuerst das Sechseck $M_1 P_2 M_3 P_1 M_2 P_3$. Dasselbe ist K^2 eingeschrieben. Folglich müssen nach dem Pascal'schen Satze die Schnittpunkte $M_1 P_2$, $M_2 P_1$ — sagen wir P'_3 —, ferner $P_2 M_3$, $P_3 M_2$ — P'_1 — und $M_3 P_1$, $M_1 P_3$ — P'_2 — in einer Geraden p liegen. In unserem speciellen Falle ist p die Polare von P in Bezug auf K^2. In p liegen aber auch die Schnittpunkte von $M_1 M_2$, $P_1 P_2$ von $M_2 M_3$, $P_2 P_3$ und $M_1 M_3$, $P_1 P_3$. Es sind dies die correspondirenden zu $P'_3 P'_1 P'_2$ in der Involution harmonischer Pole auf p.

Wenden wir uns jetzt zu dem Sechseck $M_1 Q_1 P_1 M_2 Q_2 P_2$, so muss in demselben $M_1 Q_1$, $M_2 Q_2$ oder Q mit $Q_1 P_1$, $Q_2 P_2$ oder A_3 und mit $P_1 M_2$,

$P_2 M_1$ oder P'_3 auf einer Geraden liegen. In analoger Weise entnehmen wir aus den Sechsecken $M_2 Q_2 P_2 M_3 Q_3 P_3$ und $M_3 Q_3 P_3 M_1 Q_1 P_1$, dass A_1 mit P'_1 und A_3 mit P'_3 auf Geraden durch Q sich befinden.

Gehen wir nun zu dem Sechseck $M_1 Q_2 M_3 Q_1 M_2 Q_3$ über, so führt uns dasselbe zu drei Punkten $Q'_1 Q'_2 Q'_3$ — den Schnittpunkten von $M_2 Q_3$, $M_3 Q_2$ u. s. f. —, welche in einer Geraden q liegen. Diese ist die Polare zu Q in Bezug auf K^2 und die Punkte $Q'_1 Q'_2 Q'_3$ sind die entsprechenden zu den Schnittpunkten von $m_1 m_2 m_3$ mit q in der Involution harmonischer Pole auf q.

Endlich schliessen wir aus den Sechsecken $M_1 P_1 Q_1 M_2 P_2 Q_2$, $M_2 P_2 Q_2 M_3 P_3 Q_3$ und $M_3 P_3 Q_3 M_1 P_1 Q_1$, dass A_3 mit Q'_3, A_1 mit Q'_1 und A_2 mit Q'_2 auf Geraden durch P liegen.

Wir sehen also, dass das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ als Schnittpunkt der Geraden $P'_1 Q$, $Q'_1 P$ — $P'_2 Q$, $Q'_2 P$ und $P'_3 Q$, $Q'_3 P$ gefunden wird. Folglich muss es nach dem in 1 Gesagten zu $M_1 M_2 M_3$ perspectivisch liegen.

8.

Nehmen wir an, der Punkt Q liege in der Peripherie des Kegelschnittes K^2, so fallen in ihm die Punkte $Q_1 Q_2 Q_3$ zusammen und das Dreieck, welches diese Q mit den gleichnamigen P verbindet, degenerirt in die drei Geraden QP_1, QP_2, QP_3. Nach dem in 2 Bewiesenen müssen diese Geraden die resp. M in Punkten einer Geraden schneiden. Diese muss durch das Perspectivcentrum P der beiden Dreiecke $M_1 M_2 M_3$, $P_1 P_2 P_3$ gehen. Denn sei g diese Gerade, so müssen sich in ihr QP_3, $M_1 M_2$ und QP_2, $M_1 M_3$ schneiden. Nun bilden aber $M_2 M_1 M_3 P_3 Q P$ ein Sechseck, das K^2 eingeschrieben ist und das g zur Pascallinie hat. Folglich müssen sich auch $M_3 P_3$, $M_2 P_2$ in g schneiden, d. h. g muss durch P gehen.

Indem wir die Dreiecke M_1 und P_1 vertauschen, können wir daher sagen:

Sind $M_1 M_2 M_3$, $P_1 P_2 P_3$ zwei zu einander perspectivische Dreiecke, welche einem Kegelschnitt K^2 eingeschrieben sind, und projiciren wir von irgend einem Punkte des Kegelschnittes aus die Ecken des einen Dreiecks auf die resp. Seiten des andern (d. h. P_1 auf $M_2 M_3$ oder M_1 auf $P_2 P_3$ u. s. f.), so liegen diese Projectionen in einer Geraden, welche durch das Perspectivcentrum beider Dreiecke geht.

Lassen wir an Stelle von Q speciell die Punkte $P_1 P_2 P_3$ treten, so erhalten wir als die resp. Projectionen des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ auf die Geraden m diejenigen Schnittpunkte der Seiten der Dreiecke $P_1 P_2 P_3$, $M_1 M_2 M_3$, welche nicht in der Perspectivaxe beider Dreiecke liegen, und ferner die Schnittpunkte der Tangenten in $P_1 P_2 P_3$ an K^2 mit m_1 resp. m_2, m_3. Wir schliessen daher:

Sind $M_1 M_2 M_3$, $P_1 P_2 P_3$ zwei einem Kegelschnitt K^2 eingeschriebene perspectivische Dreiecke, so liegen unter den Schnittpunkten der Dreieckseiten diejenigen sechs, welche sich nicht in einer Geraden befinden, paarweise in Strahlen durch das Perspectivcentrum beider Dreiecke.

Diese sechs Punkte bilden somit zwei neue perspectivische Dreiecke, welche mit den ursprünglichen vier Seiten gemeinsam haben, welche also die nämliche Perspectivaxe besitzen wie diese.

4.

Halten wir nun $M_1 M_2 M_3$ fest, ebenso $P_1 P_2 P_3$ und lassen wir Q die Ebene durchlaufen, so gehört zu jeder seiner Lagen ein Dreieck $Q_1 Q_2 Q_3$ resp. $A_1 A_2 A_3$. Die Seiten des letzteren schneiden $m_1 m_2 m_3$ in Punkten einer Geraden q. Umgekehrt können wir die Schnittpunkte einer Geraden q und m_1 resp. m_2, m_3 mit den resp. Punkten $P_1 P_2 P_3$ verbinden. Diese Verbindungslinien schneiden K^2 ein zweites Mal in den resp. Punkten $Q_1 Q_2 Q_3$. Ihr Dreieck ist dem der Punkte $M_1 M_2 M_3$ perspectivisch in Bezug auf Q als Perspectivcentrum.

Es ist somit jedem Punkte Q der Ebene eine bestimmte Gerade zugeordnet und umgekehrt, d. h. es ist eine Reciprocität in der Ebene festgelegt. Wir heben die speciellen Elemente hervor.

Nach dem in 3 bewiesenen Satze correspondiren den Punkten des Kegelschnittes K^2 die Geraden des Büschels durch P. Den Punkten auf einer Geraden m correspondirt diese Gerade selbst. Den Punkten $M_1 M_2 M_3$ entsprechen die Geraden durch diese Punkte. Die m sind also unendlich vielfache Linien, die M unendlich vielfache Punkte der Reciprocität.

Den Punkten, welche auf einer Geraden durch ein M — z. B. durch M_1 — liegen, entsprechen die Geraden eines Büschels, deren Scheitel in m_1 sich befindet.

Den Punkten einer beliebigen Geraden g entsprechen die Tangenten eines Kegelschnittes. Denn seien Q, R, S, ... Punkte auf g, so construiren wir zu ihnen die Punkte $Q_1 Q_2 Q_3$, $R_1 R_2 R_3$, $S_1 S_2 S_3$, ... Nun sind die Reihen $Q_1 R_1 S_1 \ldots$, $Q_2 R_2 S_2 \ldots$, $Q_3 R_3 S_3 \ldots$ perspectivisch zu $QRS\ldots$ mit den resp. Punkten M als Centren. Also sind diese Reihen zu einander projectivisch. Mithin sind dies auch die Büschel, welche über ihnen aus $P_1 P_2 P_3$ gebildet werden. Diese schneiden aber m_1 resp. m_2, m_3 in den Punkten von Geraden, welche $QRS\ldots$ correspondiren. Also bilden diese Punkte auf den m zueinander projective Reihen. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte sind die den Punkten von g correspondirenden Geraden, umhüllen mithin einen Kegelschnitt. Dieser hat $m_1 m_2 m_3$ zu Tangenten. Seine Tangenten aus P entsprechen den Schnittpunkten von g mit K^2 u. s. f.

Wir unterlassen es, hier weiter auf diese quadratische reciproke Verwandtschaft einzugehen, und erwähnen nur, dass sich dieselbe von einem allgemeinen Gesichtspunkte aus betrachten lässt, wenn wir von der Ebene in den Raum übergehen.

5.

Lassen wir in 2 die Punkte P und Q zusammenfallen, so decken sich auch die resp. Punkte $P_1 Q_1$, $P_2 Q_2$, $P_3 Q_3$. Das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ geht über in ein dem Kegelschnitt K^2 umschriebenes und wir können auch von ihm beweisen, dass es zu $M_1 M_2 M_3$ perspectivisch liegt.

Wie in 2, betrachten wir zuerst das Sechseck $M_1 P_2 M_3 P_1 M_2 P_3$ und finden, dass $P'_3 P'_2 P'_1$ auf einer Geraden p liegen, welche Polare zu P in Bezug auf K^2 ist. Dann wenden wir uns dem degenerirten Sechseck zu, welches aus $M_1 M_2$ und den Tangenten in $P_1 P_2$ besteht. Es muss in demselben $M_1 P_1$, $M_2 P_2$ oder P mit dem Schnittpunkte A_3 der Tangenten in P_1 und P_2 und mit $P_1 M_2$, $P_2 M_1$ oder P'_3 auf einer Geraden liegen. In analoger Weise folgern wir, dass A_1 mit P'_1 und dass A_2 mit P'_2 auf Geraden durch P gelegen sind.

Nun construiren wir einen Kegelschnitt K^{*2}, der dieselbe Involution harmonischer Pole auf P besitzt wie K^2. Geben wir dann von K^{*2} noch eine Involution harmonischer Pole — etwa auf $\overline{PP'_1}$ — durch PP'_1, A und den Schnittpunkt von m_1 mit PP'_1, so ist K^{*2} bestimmt. $A_1 A_2 A_3$ liegt in Bezug auf K^{*2} zu $M_1 M_2 M_3$ reciprok, also auch zu letzterem Dreieck perspectivisch. Wir sagen daher:

Jedes einem Kegelschnitt umschriebene Dreieck ist perspectivisch zu jedem eingeschriebenen, welches zum Dreieck der Berührungspunkte des umschriebenen perspectivisch liegt.

Geht K^2 durch die Diagonalpunkte $M_1 M_2 M_3$ eines Vierecks, so können wir die Seiten desselben als Doppelstrahlen dreier Involutionen auffassen, für welche die resp. Geraden m_1, m_2, m_3 Paare sind. Gehen also durch M_1 die Seiten $g_1 h_1$ des Vierecks, so bestimmen diese eine Involution J_1, für welche $m_2 m_3$ ein Paar ist u. s. f. Diese Involutionen sind dadurch specialisirt, dass ihre Doppelstrahlen sich viermal zu dreien in vier Punkten — den Ecken des Vierecks — schneiden. Sei P einer dieser Punkte und gehen durch ihn die Seiten g_1, g_2, g_3 des Vierecks und schneiden diese K^2 ein zweites Mal in den Punkten P_1, P_2, P_3, so erhalten wir die Pole der in Rede stehenden Involutionen in Bezug auf K^2, indem wir die Tangenten in $P_1 P_2 P_3$ resp. mit $m_1 m_2 m_3$ zum Schnitte bringen. Nach dem oben angeführten Satze ist aber das Dreieck dieser Tangenten perspectivisch zum Dreieck $M_1 M_2 M_3$ — mithin liegen die erwähnten Pole in einer Geraden. Wir schliessen daher:

Wenn drei Involutionen so liegen, dass ihre Doppelstrahlen sich zu dreien in vier Punkten schneiden, und

wenn diese Involutionen auf einen Kegelschnitt übertragen werden, so liegen ihre Pole in einer Geraden.

Die Polaren der Involutionen gehen also durch einen Punkt. Nun ist die Polare von J_1 die Verbindungslinie der Schnittpunkte von $g_1 h_1$ mit K^2. In analoger Weise ergiebt sich, dass die Polaren von J_2, J_3 die Verbindungslinien der Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten des Vierecks mit K^2 sind. Diese Verbindungslinien gehen durch einen Punkt, d. h. die Schnittpunkte sind Paare einer Involution. Nun war K^2 ein beliebiger Kegelschnitt durch $M_1 M_2 M_3$. Wir sagen also:

Legen wir einen Kegelschnitt durch die Diagonalpunkte eines Vierecks, so schneiden die Gegenseiten desselben den Kegelschnitt in Paaren einer Involution.

Zürich, Juni 1884. Dr. C. Beyel.

XVIII. Einfache Construction der Ellipse aus zwei conjugirten Durchmessern.

(Hierzu Taf. VII Fig. 6.)

Bewegt sich eine Gerade — Kante eines Papierstreifens — mit zweien ihrer Punkte auf zwei festen Geraden, so verzeichnet ein beliebiger dritter Punkt eine Ellipse. Stehen insbesondere die Leitgeraden auf einander senkrecht, so sind sie die Hauptaxen der Ellipse; im Allgemeinen sind sie jedoch nicht ein Paar conjugirter Durchmesser. Diese Construction ist für den Techniker wohl die bequemste, namentlich dann, wenn es sich nur um einen Theil der Curve handelt, da man sich stets dort beliebig viele Punkte construiren kann, wo man sie gerade braucht. Nun bestimmt man zwar nach der bekannten Rytz'schen Construction* (neben anderen) leicht die Hauptaxen aus zwei conjugirten Durchmessern und ermöglicht damit die Benutzung obiger Methode. Werden jedoch nicht die Hauptaxen, sondern nur beliebig viele Punkte verlangt, wie es z. B. bei axonometrischen Darstellungen der Fall ist, so kann man bedeutend einfacher verfahren und übrigens schliesslich, wenn es wünschenswerth sein sollte, die Hauptaxen leicht bestimmen.

Es seien gegeben die beiden Durchmesser AA_1 und BB_1 oder d und d'. Man fälle von A ein Perpendikel $AC = OB$ auf d' und ziehe den Durchmesser OC oder d''. Lässt man dann die Punkte D und C mit der Geraden AC auf d' und d'' bezw. hingleiten, so beschreibt A die Ellipse. Zur Construction der Hauptaxen mache man $OE = CD$ und beschreibe

* Mossbrugger, „Grösstentheils neue Aufgaben aus dem Gebiete der Géométrie descriptive etc." 1845, S. 125; oder Fialkowski, „Zeichnende Geometrie." Wien und Leipzig, Klinkhardt; auch Burmester, „Grundzüge der Reliefperspective", S. 16. Leipzig, Teubner.

den Kreis über OE, welcher d in O berührt, ziehe darauf die Verbindungslinie seines Mittelpunktes M mit B, welche den Kreis in zwei Punkten X und Y schneidet. Dann sind:

1. BX und BY die Länge der beiden Halbaxen,
2. OY und OX bezw. ihre Richtungen.

Beweis. Das Momentancentrum der Bewegung für die Lage ADC ist der Schnittpunkt der Normalen der Leitgeraden in den Punkten D und C, d. h. C. Folglich ist die Tangente in A der Linie d' parallel. Dasselbe gilt für A_1. Folglich sind d und d' conjugirte Durchmesser. Die beiden Halbaxenlängen sind Maxima und Minima des Abstandes des beschreibenden Punktes vom Mittelpunkte. Denkt man sich daher für den Augenblick die bewegliche Gerade in der Lage d' festgehalten und die Schenkel des Winkels $BOC = \alpha$ an O und E hingleitend, so beschreibt O den benutzten Kreis und BX und BY sind die fraglichen Axenlängen. Weiter erkennt man aber, dass bei der rückläufigen Bewegung des Winkels $BXO = \beta$ der Schenkel BX stets durch Y gehen muss, d. h. OY ist die Richtung der einen Axe, folglich OX die der andern.

Darmstadt, den 11. Juli 1883. Dr. Carl Rodenberg.

(Aus der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. XXVII S. 803.)

XIII.

Zur Integration der Differentialgleichungen.

Von

WOLD. HEYMANN

in Plauen i. V.

I. Verallgemeinerung einer Jacobi'schen Gleichung.

Jacobi hat gezeigt, dass die Integration der Gleichung

$$1)\qquad M\,dx + N\,dy + P(x\,dy - y\,dx) = 0$$

auf die Bernoulli'sche Gleichung führt, wenn M, N und P homogene Functionen von x und y sind und M und N im Grade übereinstimmen.

Es soll hier diejenige Gleichung obiger Form aufgestellt werden, deren Integration von der allgemeinen Riccati'schen Gleichung abhängt. Man findet, dass M und N homogene Functionen desselben Grades sein müssen, also

$$M = x^n \vartheta\left(\frac{y}{x}\right), \quad N = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

während P additiv aus drei homogenen Functionen von verschiedenem Grade zusammengesetzt sein darf, und zwar in folgender Weise:

$$P = x^{n-1}\chi\left(\frac{y}{x}\right) + x^{p-1}\psi\left(\frac{y}{x}\right) + x^{q-1}\omega\left(\frac{y}{x}\right), \quad p + q = 2n.$$

Man überzeugt sich durch folgende einfache Rechnung von der Richtigkeit der Behauptung.

Für $y = xt$ geht Gleichung 1) über in

$$x^n\{\vartheta(t) + t\varphi(t)\}\frac{dx}{dt} + x^{n+1}\{\varphi(t) + \chi(t)\} + x^{p+1}\psi(t) + x^{q+1}\omega(t) = 0,$$

und für $x = z^r$ erhält man

$$\{\vartheta + t\varphi\}r\frac{dz}{dt} + \{\varphi + \chi\}z + \psi . z^{(p-n)r+1} + \omega . z^{(q-n)r+1} = 0.$$

Weil $p + q = 2n$ sein soll, so lauten die letzten beiden Exponenten von z

$$1 + \frac{p-q}{2}r \text{ resp. } 1 - \frac{p-q}{2}r,$$

und wird r so bestimmt, dass einer derselben verschwindet, so nimmt der andere den Werth 2 an.

Daher wird die letzte Differentialgleichung zu einer Riccati'schen, nämlich

$$2)\qquad f_0\frac{dz}{dt}+f_1z^2+f_2z+f_3=0,$$

unter f Functionen nur von t verstanden. In allen Fällen, in denen Gleichung 2) integrirt werden kann, lässt sich auch das Integral von 1) angeben; beispielsweise also dann, wenn von Gleichung 1) eine particuläre Lösung bekannt ist, welche nicht etwa die Form $\frac{y}{x}=a$ hat, wo a eine bestimmte Constante bedeutet.

Specialisirt man Gleichung 1) insofern, als man nur rationale Coefficienten zulässt und ausserdem $p=n+1$, mithin $q=n-1$ setzt, so liegt vor:

$$3)\qquad \left.\begin{array}{c}(a_0x+a_ny)^n\,dx+(b_0x+b_ny)^n\,dy\\ +\{(\alpha_0x+\alpha_ny)^n+(\beta_0x+\beta_{n-1}y)^{n-1}+(\gamma_0x+\gamma_{n-2}y)^{n-2}\}(x\,dy-y\,dx)\end{array}\right\}=0,$$

wobei symbolisch

$$(a_0x+a_ny)^n=a_0x^n+a_1x^{n-1}y+a_2x^{n-2}y^2+\ldots+a_{n-1}xy^{n-1}+a_ny^n.$$

Für $y=xt$ folgt nun hieraus

$$4)\qquad \begin{array}{c}\{(a_0+a_nt)^n+t(b_0+b_nt)^n\}\frac{dx}{dt}+\{(b_0+b_nt)^n+(\beta_0+\beta_{n-1}t)^{n-1}\}x\\ +(\alpha_0+\alpha_nt)^nx^2+(\gamma_0+\gamma_{n-2}t)^{n-2}=0.\end{array}$$

Die Gleichung 3) ist geometrisch dadurch ausgezeichnet, dass ihr $n+1$ durch den Coordinatenanfang gehende Gerade particulär genügen, deren Gleichungen in der Form $x=\lambda y$ enthalten sind, wobei für λ jede der Wurzeln der Gleichung

$$5)\qquad (a_0\lambda+a_n)^n.\lambda+(b_0\lambda+b_n)^n=0$$

zu setzen ist. Die Gleichung 4) dagegen besitzt $n+1$ particuläre Gerade, welche parallel der x-Axe verlaufen und durch die Gleichung $\lambda t-1=0$ gegeben sind, wo λ die vorige Bedeutung hat.

Dreht man das Coordinatensystem, auf welches die Gleichung 3) bezogen ist, so dass eine der particulären Geraden mit der y-Axe zusammenfällt, so muss eine der Parallelen, welche der Gleichung 4) genügen, in die Unendlichkeit rücken, das heisst aber, es muss in den transformirten Gleichungen der dem b_n analoge Coefficient verschwinden. Mithin wird durch diese Transformation der Grad der Factoren von $\frac{dx}{dt}$ und x in Gleichung 4) um eine Einheit herabgedrückt, was für die Integration vortheilhaft sein kann.

Um die Coordinatendrehung vorzunehmen, substituire man in 3) $x=x_1+\lambda y$, wähle für λ eine der Wurzeln der Gleichung 5) und setze schliesslich $\frac{y}{x_1}=t$. Die neue Gleichung hat die Form

$$(A_0+A_n t)^n \frac{dx_1}{dt}+(B_0+B_{n-2}t)^{n-2}+(C_0+C_{n-1}t)^{n-1}x_1+(D_0+D_n t)^n x_1^2 = 0.$$

Für $x_1 = \frac{1}{z}$ tritt an die zweite Klammer der Factor z^2, während die letzte (nach Multiplication der Gleichung mit z^2) von z frei wird; die Gleichung lautet also jetzt

$$f_0 \frac{dz}{dt}+f_1 z^2+f_2 z+f_3=0,$$

in welcher sich der Grad in Bezug auf beide Variabeln t und z an keiner Stelle über den n^{ten} erhebt.

Wir geben zwei Beispiele.

a) Es sei zu integriren

$$\left.\begin{aligned}&(a_0x^2+a_1xy+a_2y^2)\,dx+(b_0x^2+b_1xy+b_2y^2)\,dy\\&+(\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2+\delta x+\varepsilon y+\zeta)(x\,dy-y\,dx)\end{aligned}\right\}=0.$$

Man setze $x=x_1+\lambda y$ und erhält

$$\left.\begin{aligned}&(a'_0x_1^2+a'_1x_1y+a'_2y^2)\,dx_1+(b'_0x_1^2+b'_1x_1y+b'_2y^2)\,dy\\&+(\alpha'x_1^2+\beta'x_1y+\gamma'y^2+\delta'x_1+\varepsilon'y+\zeta')(x_1\,dy-y\,dx_1)\end{aligned}\right\}=0.$$

Nun wählt man λ so, dass

$$b'_2=(a_0\lambda^2+a_1\lambda+a_2)\lambda+(b_0\lambda^2+b_1\lambda+b_2)=0;$$

dann folgt für $y=x_1t$ und $x_1=\frac{1}{z}$ eine Gleichung von nachstehender Gestalt:

$$(A_0+A_1t+A_2t^2)\frac{dz}{dt}+B_0z^2+(C_0+C_1t)z+D_0+D_1t+D_2t^2=0,$$

und diese kann mittels hypergeometrischer Functionen integrirt werden.

b) Um auch ein Beispiel zu haben, bei welchem mit Hilfe einer particulären Lösung das vollständige Integral gewonnen wird, sei vorgelegt

$$\alpha)\quad \left.\begin{aligned}&(a_0x^3+a_1x^2y+a_2xy^2+a_3y^3)\,dx+(b_0x^3+b_1x^2y+b_2xy^2+b_3y^3)\,dy\\&+(\alpha x^3+\beta x^2y+\gamma xy^2+\delta y^3+\varepsilon x^2+\zeta xy+\eta y^2+\vartheta x+\iota y)(x\,dy-y\,dx)\end{aligned}\right\}=0.$$

Dieser Gleichung genügen zunächst vier Gerade $x=\lambda y$, wobei λ aus der biquadratischen Gleichung

$$\beta)\qquad (a_0\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3)\lambda+(b_0\lambda^3+b_1\lambda^2+b_2\lambda+b_3)=0$$

zu berechnen ist. Genügt ihr noch ein durch den Coordinatenanfang gehender Kegelschnitt

$$\gamma)\qquad \mu_0x^2+\mu_1xy+\mu_2y^2+\nu_0x+\nu_1y=0,$$

so lässt sie sich durch gewöhnliche Quadraturen integriren. — Um dies einzusehen, transformire man die Gleichung α) mittels der früher aufgestellten Substitutionen $x=\lambda y+x_1$, $y=x_1t$, $x_1=\frac{1}{z}$, d. h. mittels

$$x = \frac{\lambda t + 1}{z}, \quad y = \frac{t}{z},$$

unter λ eine der Wurzeln von Gleichung β) gedacht.

Die veränderte Gleichung steht unter der Form

$$\delta) \quad (A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3) \frac{dz}{dt} + (B_0 + B_1 t) z^2 + (C_0 + C_1 t + C_2 t^2) z + D_0 + D_1 t + D_2 t^2 + D_3 t^3 = 0,$$

während der Kegelschnitt γ) in einen andern übergeht, nämlich

$$\varepsilon) \quad \mu'_0 + \mu'_1 t + \mu'_2 t^2 + (\nu'_0 + \nu'_1 t) z = 0,$$

welcher nun der Gleichung δ) zu genügen hat.

Führt man den Werth von z aus der letzten Gleichung in die vorhergehende Differentialgleichung ein, so entsteht eine Gleichung fünften Grades bezüglich t, welche identisch verschwinden soll. Indem man daher die Coefficienten dieser Gleichung gleich Null setzt, gewinnt man vier Gleichungen zur Bestimmung der Verhältnisse der Kegelschnittscoefficienten; die anderen zwei Gleichungen drücken Bedingungen aus, welchen die Coefficienten der vorgelegten Differentialgleichung infolge Voraussetzung der particulären Lösung ε) unterliegen.

Schliesslich sei bemerkt, dass das particuläre Integral der Differentialgleichung α) eine Curve m^{ter} Ordnung sein darf, deren Gleichung symbolisch folgendermassen zu lauten hat:

$$(\mu_0 x + \mu_m y)^m + (\nu_0 x + \nu_{m-1} y)^{m-1} = 0.$$

Denn durch Einführung der früheren Substitutionen leitet man hieraus eine Curve ab, deren Gleichung

$$(\mu'_0 + \mu'_m t)^m + (\nu'_0 + \nu'_{m-1} t)^{m-1} . z = 0$$

ist und welche, wie eine ähnliche Abzählung ergiebt, ebenfalls unter zwei Bedingungen der Differentialgleichung δ) particulär genügt.

II. Verwerthung von integrirenden Factoren bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Euler hat im V. und VI. Capitel des II. Abschnittes im II. Bande seiner Integralrechnung auf den Vortheil hingewiesen, welchen integrirende Factoren bei der Integration von Differentialgleichungen zweiter Ordnung — besonders auch bei nicht linearen — gewähren können, und an dieser Stelle mehrere charakteristische Beispiele gegeben. Es soll in Folgendem auf einige neue Beispiele aufmerksam gemacht werden.

Sei vorgelegt

$$1) \quad \sqrt{x^3} \frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right).$$

Für $\frac{y}{\sqrt{x}} = z$ entsteht hieraus

$$2)\qquad x^2\frac{d^2 z}{dx^2}+x\frac{dz}{dx}=F(z),$$

wobei

$$F(z)=f(z)+\tfrac{1}{4}z.$$

Der integrirende Factor der letzten Gleichung ist $\frac{dz}{dx}$, und selbige lässt sich unter Verwendung dieses Factors folgendermassen schreiben:

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dz}{dx}\right]^2=2\frac{d}{dx}\int F(z)\,dz,$$

oder integrirt

$$x\frac{dz}{dx}=\sqrt{c_1+2\int F(z)\,dz}.$$

Eine nochmalige Integration liefert

$$\int\frac{dz}{\sqrt{c_1+2\int F(z)\,dz}}=lx+c_2,$$

und dieser Ausdruck genügt der Gleichung 2); für Gleichung 1) hingegen hat man das Integral

$$\int\frac{dz}{\sqrt{c_1+\frac{1}{4}z^2+2\int f(z)\,dz}}=lx+c_2,\qquad z=\frac{y}{\sqrt{x}}.$$

Auf Gleichung 1) kommt die allgemeine Euler'sche Gleichung

$$3)\qquad R^3\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(\frac{y}{R}\right),\quad R=\sqrt{\alpha+2\beta x+\gamma x^2}$$

zurück, denn substituirt man in letztere

$$x=\frac{1+\lambda u}{u},\quad y=\frac{v}{u},\quad \text{mithin}\quad y''=u^3v'',$$

so entsteht

$$R_1{}^3\frac{d^2v}{du^2}=f\left(\frac{v}{R_1}\right),\quad R_1=\sqrt{\{\gamma+2(\beta+\gamma\lambda)u+(\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2)u^2\}}.$$

Nimmt man für λ eine der beiden Wurzeln der Gleichung

$$\alpha+2\beta\lambda+\lambda\gamma^2=0$$

und setzt an Stelle von

$$\gamma+2(\beta+\gamma\lambda)u$$

eine neue Variabele s, so erhält man

$$\sqrt{s}^3\frac{d^2v}{ds^2}=\varkappa f\left(\frac{v}{\sqrt{s}}\right),$$

also eine Gleichung, welche mit Gleichung 1) bis auf einen constanten Factor $\varkappa$ übereinstimmt, welcher bei der Integration nicht weiter stört. Der integrirende Factor von Gleichung 3) lautet

$$\varrho=\frac{d\left(\frac{v}{\sqrt{s}}\right)}{ds}$$

oder in den ursprünglichen Variabelen mit Benutzung der Substitutionen

$$\varrho = \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{R}\right).$$

Die Gleichung 3) bietet einige interessante Specialfälle dar, so z. B. die von Euler behandelte Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{Ay}{(By^2 + C + 2Dx + Ex^2)^2} = 0.$$

Ein Fall, welcher neu sein dürfte, ist folgender:

$$4) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{[Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F]^{3/2}}.$$

Substituirt man hier

$$y = y_1 + \mu x + \nu,$$

so entsteht

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{1}{[A_1 x^2 + B_1 y_1^2 + 2C_1 x y_1 + 2D_1 x + 2E_1 y_1 + F_1]^{3/2}},$$

und nun kann man über μ und ν so verfügen, dass die Coefficienten

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = B\mu + C \\ E_1 = B\nu + E \end{array}\right\} \quad B \gtrless 0$$

verschwinden. Die vereinfachte Gleichung lässt sich offenbar in der Form

$$[A_1 x^2 + 2D_1 x + F_1]^{3/2} \frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{1}{\left[B_1 \frac{y_1^2}{A_1 x^2 + 2D_1 x + F_1} + 1\right]^{3/2}}$$

geben und ist sonach ein specieller Fall von Gleichung 3); man hat nämlich

$$R^3 \frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{1}{\left[B_1 \left(\frac{y_1}{R}\right)^2 + 1\right]^{3/2}} = f\left(\frac{y_1}{R}\right), \quad R = \sqrt{A_1 x^2 + 2D_1 x + F_1}.$$

Sollte $B = 0$ sein, so lassen sich die Substitutionscoefficienten μ und ν nicht bestimmen. In diesem Falle benutze man die schon bei der allgemeineren Gleichung 3) verwendeten Substitutionen

$$x = \frac{1 + \lambda u}{u}, \quad y = \frac{v}{u}, \quad y'' = u^3 v''.$$

Vermöge dieser Ausdrücke geht die Differentialgleichung 4) über in eine derselben Form, nämlich

$$5) \qquad \frac{d^2 v}{du^2} = \frac{1}{[A_2 u^2 + 2C_2 uv + 2D_2 u + 2E_2 v + F_2]^{3/2}},$$

und nun kann man über λ so verfügen, dass

$$C_2 = C\lambda + E = 0.$$

Ist etwa auch $C = 0$, so wird diese Bestimmung unmöglich und überflüssig. Die vereinfachte Gleichung kann integrirt werden, denn sie ist ein Specialfall von

$$\frac{d^2 v}{d u^2} = \varphi(v + a u^2 + b u + c),$$

welcher Gleichung, wie leicht zu finden, das Integral

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{dw}{\sqrt{k_1 + 2aw + 2\int \varphi(w)\, dw}} = u + k_2 \\ w = v + a u^2 + b u + c \end{aligned}\right\}$$

zukommt.

In einfacher Weise lässt auch die Differentialgleichung

6) $$y y'' = \frac{\varepsilon}{y^2 + \alpha + 2\beta x + \gamma x^2}$$

die Integration zu, weil sie auf die Form

$$R^3 y'' = \frac{\varepsilon}{\left(\frac{y}{R}\right)^3 + \left(\frac{y}{R}\right)} = f\left(\frac{y}{R}\right), \quad R = \sqrt{\alpha + 2\beta x + \gamma x^2}$$

gebracht werden kann.

Wir bemerken weiter, dass auch die Gleichung

7) $$x^3 y'' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

als Specialfall von 3) integrirt werden kann. Ihr integrirender Factor ist

$$\varrho = \frac{dz}{dx}, \quad z = \frac{y}{x}$$

und ihr Integral

$$\int \frac{dz}{\sqrt{c_1 + 2\int f(z)\, dz}} = \frac{1}{x} + c_2.$$

Dieses Resultat ist insofern bemerkenswerth, als die Integration der Gleichung

$$x^n y'' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

in allen anderen Fällen als $n = 3$ zur Zeit nicht geleistet werden kann.

Von Gleichung 7) ausgehend, findet man ohne Mühe einige andere Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche einfache integrirende Factoren besitzen. Wir geben sogleich die Resultate.

Der Gleichung

8) $$x^3 y'' + \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \cdot (x y' - y)^2 + \psi\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

kommt der integrirende Factor

$$\varrho = e^{2\int \varphi(t)\, dt} \frac{dt}{dx}, \quad t = \frac{y}{x}$$

zu, und daher lautet das Integral

$$\int \frac{e^{\int \varphi(t)\, dt}\, dt}{\sqrt{c_1 - 2\int \psi(t)\, e^{2\int \varphi(t)\, dt}\, dt}} = \frac{1}{x} + c_2.$$

Für die Gleichung

$$9)\qquad x^3y''+\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\cdot(xy'-y)^2+\psi\left(\frac{y}{x}\right)\cdot(xy'-y)=0$$

findet man

$$\varrho=x^{-2}e^{\int\varphi(t)\,dt},\quad t=\frac{y}{x},$$

$$\int\frac{e^{\int\varphi(t)\,dt}dt}{c_1-\int\psi(t)\,e^{\int\varphi(t)\,dt}dt}=\frac{1}{x}+c_2.$$

Für

$$10)\qquad x^3y''+\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\cdot(xy'-y)^2+\psi(x).(xy'-y)=0$$

ist

$$\varrho=x^{-2}e^{\int\varphi(t)\,dt+\int\psi(x)\cdot\frac{dx}{x^3}},\quad t=\frac{y}{x},$$

$$\int e^{\int\varphi(t)\,dt}dt+c_1\int e^{-\int\psi(x)\cdot\frac{dx}{x^3}}\frac{dx}{x^2}=c_2.$$

III. Auflösung gewisser algebraischer Gleichungen mittels Integration von Differentialgleichungen.

Der Gedanke, algebraische Gleichungen auf dem Wege der Integration von Differentialgleichungen zu lösen, findet sich wohl zuerst bei Joh. Landen, welcher im Jahre 1755 in The Mathematical lucubrations die cubische Gleichung in gedachter Weise behandelte.

Landen geht von der Gleichung*

$$q=-(x^3-px)$$

aus, sieht x als unabhängige, q als abhängige Variabele an; er differenzirt die Gleichung successive dreimal und erhält

$$\frac{d^3q}{dx^3}=-6.$$

Durch einen zweifachen Integrationsprocess gelangt er rückwärts zu einer Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{1}{3}p}}=-\frac{dq}{3\sqrt{q^2-\frac{4}{27}p^3}},$$

und durch eine nochmalige Integration gelingt es, x durch p und q explicite darzustellen; es erscheint die Cardani'sche Formel.

Bei genauerer Betrachtung der Landen'schen Methode bemerkt man, dass eine dreimalige Differentiation und rückwärts geleitete Integration nicht nöthig ist; es genügt ein einmaliger Process. — Wir wollen dies an der Gleichung

* Vergl. Matthiessen, Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen, § 133.

1) $$y = x^3 - 3a^2x$$

zeigen. Differenzirt man selbige nach x, so folgt

$$\frac{dy}{dx} = 3(x^2 - a^2),$$

und quadrirt man beide Gleichungen, so entsteht

$$y^2 = x^6 - 6a^2x^4 + 9a^4x^2 = (x^2 - 4a^2)(x^4 - 2a^2x^2 + a^4) + 4a^6,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 9(x^4 - 2a^2x^2 + a^4).$$

Durch eine einfache Combination dieser Gleichungen erhält man

$$y^2 - 4a^6 = (x^2 - 4a^2) \cdot \tfrac{1}{9}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

und hier lassen sich die Variabelen trennen, nämlich

2) $$\frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4a^2}} = \frac{dy}{3\sqrt{y^2 - 4a^6}}.$$

Nun ergiebt die Integration

$$l\left(x + \sqrt{x^2 - 4a^2}\right) = \tfrac{1}{3}l\left(y + \sqrt{y^2 - 4a^6}\right) + c,$$

und da für $x = 0$ auch $y = 0$, so ist $c = \frac{1}{3}l4$.

Nach Beseitigung der Logarithmen findet sich

$$x + \sqrt{x^2 - 4a^2} = \sqrt[3]{y + \sqrt{y^2 - 4a^6}}\,\sqrt[3]{4} \cdot \varepsilon,$$

oder $$\varepsilon^3 = 1,$$

$$x - \sqrt{x^2 - 4a^2} = \sqrt[3]{y - \sqrt{y^2 - 4a^6}}\,\sqrt[3]{4} \cdot \varepsilon^2,$$

und durch Addition gelangt man zu der Cardani'schen Formel

$$x = \sqrt[3]{\frac{y + \sqrt{y^2 - 4a^6}}{2}} \cdot \varepsilon + \sqrt[3]{\frac{y - \sqrt{y^2 - 4a^6}}{2}} \cdot \varepsilon^2.$$

Bei dieser Behandlung der Gleichung erledigt sich der *casus irreducibilis*, wie schon Landen bemerkte, in der natürlichsten Weise. Die Differentialgleichung 2) gestattet nämlich auch folgende Schreibweise:

$$\frac{dx}{\sqrt{4a^2 - x^2}} = \frac{dy}{3\sqrt{4a^6 - y^2}},$$

und dies giebt integrirt

$$\arcsin\frac{x}{2a} = \tfrac{1}{3}\arcsin\frac{y}{2a^3} + c.$$

Setzt man

$$\arcsin\frac{y}{2a^3} = \omega,$$

so ist

$$\arcsin\frac{x}{2a} = \tfrac{1}{3}\omega + c$$

oder, wenn man zu den Umkehrungsfunctionen übergeht,

$$\sin\omega = \frac{y}{2a^3}, \quad x = 2a\sin\left(\tfrac{1}{3}\omega + c\right).$$

Durch die letzten beiden Ausdrücke sind die drei Lösungen der Gleichung 1) gegeben, wenn festgesetzt wird, dass

$$c = \frac{2m\pi}{3}; \quad m = 0, 1, 2.$$

Moivre hat bekanntlich die Gleichung*

$$3)\quad y = x^n - \frac{n}{1} a^2 x^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2} a^4 x^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3} a^6 x^{n-6} + \dots$$

aufgestellt und gelöst. Dieselbe kann mittels einer Parameterdarstellung folgendermassen geschrieben werden:

$$4)\qquad x = a(t + t^{-1}), \quad y = a^n(t^n + t^{-n}),$$

und hierdurch ist man von ihrer algebraischen Auflösung nicht mehr weit entfernt.

Will man jedoch die Auflösung durch Integration bewerkstelligen, so bilde man

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a}{t}(t - t^{-1}), \quad \frac{dy}{dt} = \frac{na^n}{t}(t^n - t^{-n}).$$

Quadrirt man diese Ausdrücke und beachtet die Gleichungen 4), so ergiebt sich

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{t^2}(x^2 - 4a^2), \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{n^2}{t^2}(y^2 - 4a^{2n})$$

oder nach Division

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{x^2 - 4a^2}{n^2(y^2 - 4a^{2n})}.$$

Hier lassen sich wieder die Variabelen trennen; man erhält**

---

* Euler, Analysis des Unendlichen, Bd. 3 S. 16.

** Dieses Resultat lässt sich auch folgendermassen aussprechen. Das Integral

$$\frac{1}{n}\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 4a^{2n}}}$$

wird durch die Substitution

$$y = x^n - \frac{1}{n} a^2 x^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2} a^4 x^{n-4} - \dots$$

übergeführt in

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4a^2}}.$$

Solche Transformationen sind in der Theorie der hyperelliptischen Integrale von Wichtigkeit. Würde man etwa in das elliptische Integral

$$\frac{1}{n}\int \frac{dy}{\sqrt{(y^2 - 4a^{2n})(y - b)}}$$

für y das Moivre'sche Polynom einsetzen, so würde das complicirte Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 4a^2)\left(x^n - \frac{n}{1} a^2 x^{n-2} + \dots - b\right)}}$$

entstehen und also letzteres auf das vorhergehende reducirbar sein. Es würde sonach beispielsweise das hyperelliptische Integral

5) $$\frac{dx}{\sqrt{x^2-4a^2}}=\frac{dy}{n\sqrt{y^2-4a^{2n}}},$$

und hieraus folgt analog wie früher

6) $$x=\sqrt[n]{\frac{y+\sqrt{y^2-4a^{2n}}}{2}}\cdot\varepsilon+\sqrt[n]{\frac{y-\sqrt{y^2-4a^{2n}}}{2}}\cdot\varepsilon^{n-1},\quad \varepsilon^n=1,$$

oder auch

7) $$x=2a\sin\frac{\omega+2m\pi}{n},\quad \sin\omega=\frac{y}{2a^n},\quad m=0,1,2,\ldots n-1.$$

Es ist leicht zu sehen, dass die allgemeine Gleichung, welche gegeben ist durch

8) $$x=a(kt+(kt)^{-1}),\quad y=a^n(t^n+t^{-n})$$

und welche in rationaler Form vom $2n^{\text{ten}}$ Grade in x ist,* derselben Differentialgleichung 5) genügt, und dass das Integral explicite in y ausgedrückt folgendermassen lautet:

9) $$x=k\sqrt[n]{\frac{y+\sqrt{y^2-4a^{2n}}}{2}}\cdot\varepsilon+k^{-1}\sqrt[n]{\frac{y-\sqrt{y^2-4a^{2n}}}{2}}\cdot\varepsilon^{n-1},\quad \varepsilon^n=1.$$

Da die Grösse k in der Differentialgleichung 5) nicht vorkommt, so stellen die Ausdrücke 8) oder 9) das allgemeine Integral der Gleichung 5) dar.

Es liegt nahe, diejenige Differentialgleichung zweiter Ordnung aufzustellen, für welche

10) $$\frac{dx}{\sqrt{x^2-4a^2}}=\frac{dy}{h\sqrt{y^2-4a^{2n}}},\quad h=const.$$

ein erstes Integral ist.** Man findet

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-4a^2)(x^3-3a^2x-b)}}$$

vermöge der Substitution

$$y=x^3-3a^2x$$

zurückführbar sein auf das elliptische

$$\tfrac{1}{3}\int\frac{dy}{\sqrt{(y^2-4a^6)(y-b)}}.$$

Vergl. Königsberger, Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen (1882), S. 156.

* Ist beispielsweise $n=3$, so liegt folgende Gleichung sechsten Grades vor:

$$(x^3-3a^2x-\alpha y)^2+\beta^2(4a^6-y^2)=0,$$

worin

$$\alpha=\tfrac{1}{2}(k^3+k^{-3}),\quad \beta=\tfrac{1}{2}(k^3-k^{-3}).$$

** Fragt man allgemeiner, von welcher Differentialgleichung zweiter Ordnung das exacte Differential

$$\varphi(x)\,dx+\varkappa\,\psi(y)\,dy=0,\quad \varkappa=const.$$

ein erstes Integral ist, so findet man

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\frac{dy}{dx}+\frac{\psi'(y)}{\psi(y)}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0.$$

11) $$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{x}{x^2-4a^2}\frac{dy}{dx}-\frac{y}{y^2-4a^{2n}}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0,$$

und für diese Differentialgleichung lautet daher das allgemeine Integral

12) $$x=a(kt+(kt)^{-1}),\quad y=a^n(t^h+t^{-h})$$

oder

13) $$x=a\left\{k\sqrt[h]{\frac{y+\sqrt{y^2-4a^{2n}}}{2a^n}}\cdot\varepsilon+k^{-1}\sqrt[h]{\frac{y-\sqrt{y^2-4a^{2n}}}{2a^n}}\cdot\varepsilon^{h-1}\right\},\quad \varepsilon^h=1,$$

wo h und k die willkürlichen Constanten sind.

Von besonderem Interesse sind gewisse lineare Differentialgleichungen, deren Integrale zugleich algebraischen Gleichungen genügen.*

Wir wenden uns an eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, um mittels Integration derselben die Auflösung der cubischen Gleichung zu bewerkstelligen. Es ist dies die Gleichung

14) $$(4a^6-x^2)y''-xy'+\tfrac{1}{9}y=0,$$

welcher particulär

15) $$y^3-3a^2y-x=0$$

genügt. Um zunächst darzuthun, dass der Ausdruck 15) der Gleichung 14) Genüge leistet, bilde man

$$y'=\frac{1}{3(y^2-a^2)},\quad y''=-\frac{2y}{9(y^2-a^2)^3}$$

und führe dies in 14) ein; es entsteht

$$y^7-3a^2y^5-3xy^4+3a^4y^3+6a^2xy^2+2x^2y-9a^6y-3a^4x.$$

Dieses ist zwar nicht identisch Null; da man aber hierfür auch

$$(y^3-3a^2y-x)(y^4-2xy+3a^4)$$

schreiben kann, so verschwindet es infolge Auftretens des Factors

$$y^3-3a^2y-x=0.$$

Um nun direct ein Integral der Gleichung 14) herzuleiten, substituire man in jene

---

Vergleicht man die letzte Gleichung mit

a) $$\frac{d^2y}{dx^2}+X\frac{dy}{dx}+Y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0,$$

so hat man augenblicklich

$$\varphi'=-X\varphi,\quad \psi'=Y\psi,\quad \text{mithin}\quad \varphi=\alpha e^{-\int X\,dx},\quad \psi=\beta e^{\int Y\,dy},$$

und dies giebt, in

$$\int\varphi\,dx+\varkappa\int\psi\,dy=const.$$

eingesetzt, das Integral der von Liouville auf anderem Wege integrirten Differentialgleichung a), nämlich

$$\int e^{-\int X\,dx}\,dx+A\int e^{\int Y\,dy}\,dy=B.$$

* Vergl. Spitzer, Untersuchungen im Gebiete linearer Differentialgleichungen, 1. Heft (1884).

$$x = 2a^3 \cos\varphi,$$

wodurch diese Differentialgleichung übergeht in

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} + \tfrac{1}{9}y = 0.$$

Der letzten Gleichung genügt

$$y = C_1 \cos\frac{\varphi}{3} + C_2 \sin\frac{\varphi}{3},$$

wofür auch bei veränderten Constanten

$$y = C'_1(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{1/3} + C'_2(\cos\varphi - i\sin\varphi)^{1/3}$$

gesetzt werden darf. Beachtet man, dass $\cos\varphi = \frac{x}{2a^3}$, so erhält man schliesslich

$$16)\qquad y = A\sqrt[3]{\frac{x+\sqrt{x^2-4a^6}}{2}} + B\sqrt[3]{\frac{x-\sqrt{x^2-4a^6}}{2}},$$

und das ist das allgemeine Integral der Gleichung 14). Soll dasselbe coincidiren mit

$$y^3 - 3a^2y - x = 0,$$

so muss

$$A = \varepsilon,\quad B = \varepsilon^2$$

sein, wo ε der Reihe nach die Wurzeln der Gleichung

$$\varepsilon^3 = 1$$

bedeutet.

Der *casus irreducibilis* erledigt sich auf diesem Wege gleich anfänglich, bevor man noch zu Wurzelgrössen übergeht. Es bestimmen sich die Constanten in

$$y = C_1 \cos\frac{\varphi}{3} + C_2 \sin\frac{\varphi}{3}$$

zu

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= 2a\cos\frac{2m\pi}{3} \\ C_2 &= -2a\sin\frac{2m\pi}{3} \end{aligned}\right\},$$

mithin ist die Lösung

$$17)\qquad y = 2a\cos\frac{2m\pi+\varphi}{3},\quad \cos\varphi = \frac{x}{2a^3};\quad m = 0, 1, 2.$$

In gleicher Weise kann man zeigen, dass der allgemeinere Ausdruck

$$18)\qquad \left.\begin{aligned} y &= C_1\cos\frac{\varphi}{n} + C_2\sin\frac{\varphi}{n} \\ \cos\varphi &= \frac{x}{2a^n} \end{aligned}\right\}$$

oder auch

$$19)\qquad y = A\sqrt[n]{\frac{x+\sqrt{x^2-4a^{2n}}}{2}} + B\sqrt[n]{\frac{x-\sqrt{x^2-4a^{2n}}}{2}}$$

der Differentialgleichung

20) $$(4a^{2n}-x^2)y''-xy'+\frac{1}{n^2}y=0$$

genügt. Ist speciell

$$C_1=2a\cos\frac{2m\pi}{n},\quad C_2=-2a\sin\frac{2m\pi}{n};\quad m=0,1,2,\ldots n-1,$$

resp.

$$A=\varepsilon,\quad B=\varepsilon^{n-1};\quad \varepsilon^n=1,$$

so stellen die Ausdrücke für y, wie schon früher bemerkt, die Lösung der Moivre'schen Gleichung

$$x=y^n-\frac{n}{1}a^2y^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1.2}a^4y^{n-4}-\ldots$$

oder in Parameterdarstellung

$$x=a^n(t^n+t^{-n}),\quad y=a(t+t^{-1})$$

vor.

Specialisirt man die Constanten nicht, so lautet das Integral in Parameterdarstellung

21) $$x=a^n(t^n+t^{-n}),\quad y=a(At+Bt^{-1}),$$

und das ist nach Elimination von t in rationaler Gestalt ein Ausdruck, der bezüglich y bis zum $2n^{\text{ten}}$ Grade aufsteigt. Im Falle $n=3$ hat man beispielsweise

22) $$(y^3-3AB\,a^2y-\alpha x)^2+\beta^2(4a^6-x^2)=0$$

und hierin bedeuten

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=\frac{1}{2}(A^3+B^3)\\ \beta=\frac{1}{2}(A^3-B^3)\end{array}\right\},\quad \text{d. h.}\quad \left.\begin{array}{l}A=\sqrt[3]{\alpha+\beta}\\ B=\sqrt[3]{\alpha-\beta}\end{array}\right\};$$

der Gleichung 22) genügt sonach

$$y=\sqrt[3]{\alpha+\beta}\sqrt[3]{\frac{x+\sqrt{x^2-4a^6}}{2}}\cdot\varepsilon+\sqrt[3]{\alpha-\beta}\sqrt[3]{\frac{x-\sqrt{x^2-4a^6}}{2}}\cdot\varepsilon^2,\quad \varepsilon^3=1.$$

Da die Gleichung 22) ungeändert bleibt, wenn A und B untereinander vertauscht werden, so hat man als weitere drei Lösungen

$$y=\sqrt[3]{\alpha-\beta}\sqrt[3]{\frac{x+\sqrt{x^2-4a^6}}{2}}\cdot\varepsilon+\sqrt[3]{\alpha+\beta}\sqrt[3]{\frac{x-\sqrt{x^2-4a^6}}{2}}\cdot\varepsilon^2,\quad \varepsilon^3=1.$$

Ist $x^2-4a^6>0$, so sind zwei der Wurzelformen (nämlich die, welche zu $\varepsilon=1$ gehören) reell, die anderen vier complex.

Ist $x^2-4a^6<0$, so muss, falls die vorgelegte algebraische Gleichung 22) reelle Coefficienten haben soll, $\beta^2<0$ sein; dann besitzt die Gleichung sechs reelle Wurzeln, welche aber in der imaginären Gestalt

$$y=\sqrt[3]{\alpha\pm\gamma i}\sqrt[3]{u+vi}.\varepsilon+\sqrt[3]{\alpha\mp\gamma i}\sqrt[3]{u-vi}.\varepsilon^2,\quad \beta^2=-\gamma^2$$

erscheinen. Um diesen *casus irreducibilis* zu lösen, führe man in Gleichung 22) die Substitutionen

$$x=2a^3\cos\varphi,\quad y=2a\varrho\cos\tau;\quad \alpha=\varrho^3\cos\psi,\quad \gamma=\varrho^3\sin\psi$$

ein, wodurch selbige übergeht in

$$(4\cos\tau^3 - 3\cos\tau - \cos\varphi\cos\psi)^2 - \sin^2\varphi\sin^2\psi = 0$$

oder

$$4\cos\tau^3 - 3\cos\tau = \cos\varphi\cos\psi \pm \sin\varphi\sin\psi$$

oder

$$\cos 3\tau = \cos(2m\pi + \varphi \mp \psi).$$

Mithin genügen der Gleichung 22) im vorliegenden Falle folgende sechs reelle Grössen:

$$y = 2a\varrho\cos\frac{2m\pi + \varphi \mp \psi}{3}, \quad m = 0, 1, 2,$$

wobei

$$\varrho = \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{2a^2}, \quad tg\,\psi = \frac{\gamma}{\alpha}; \quad \gamma^2 = -\beta^2 > 0.$$

Ganz analoge Formeln gelten, wenn man es mit der erwähnten Gleichung $2n^{ten}$ Grades zu thun hat.

Obwohl alle die hier behandelten Gleichungen eine rein algebraische Auflösung zulassen und der Differentialbegriff nur künstlich in die Rechnung gezogen wird, so darf man das angegebene Verfahren doch nicht als eine überflüssige Complication einfacher Beziehungen ansehen. Denn einmal wird durch Untersuchungen gedachter Art ein Streiflicht auf die Integrale gewisser Differentialgleichungen geworfen, und das andere Mal sind die Mittel und Wege für die Auflösung höherer algebraischer Gleichungen vorwiegend in der Theorie der Differentialgleichungen zu suchen, wie das durch die Jacobi'schen und Abel'schen Untersuchungen über die Modulargleichungen der elliptischen Functionen und deren Differentialgleichungen genugsam bekannt ist.

XIV.

Ueber einige Abel'sche Integrale erster Gattung.

Von

Prof. H. J. Rink

in Groningen (Holland).

Auf den folgenden Seiten betrachten wir einige Abel'sche Integrale von der Form $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{R(x)^k}}$, wobei $R(x)^k = (x-a_1)^{\mu_1}(x-a_2)^{\mu_2}\ldots(x-a_m)^{\mu_m}$. Abel hat in seiner berühmten Abhandlung „Mémoire sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transcendantes"* in diesem Falle untersucht, wie gross die kleinste Zahl von Integralen ist, worauf die Summe einer willkürlichen Zahl von Integralen reducirt werden kann. Wie bekannt, ist diese Zahl die nämliche, wie die später von Riemann durch den Namen Geschlecht angedeutete, und wir fragen erstens, welche Werthe von n, μ_1, μ_2, ... μ_m das Geschlecht von $\sqrt[n]{R(x)^k} = 1$ ausmachen.

Das Geschlecht p wird in diesem Falle gegeben durch die Formel

$$p = \tfrac{1}{2}\{(n-1)(m-1) - (\nu_0 - 1) - (\nu_1 - 1) - \ldots - (\nu_m - 1)\},$$

wo

ν_0 den grössten gemeinsamen Theiler von n und $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_m$,
ν_1 „ „ „ „ „ n „ μ_1,
ν_2 „ „ „ „ „ n „ μ_2 u. s. w.

bezeichnet.

Wir nehmen weiter an, dass n, μ_1, μ_2, ... μ_m ganze Zahlen bedeuten, die nicht sämmtlich einen gemeinsamen Theiler haben; dass μ_1, μ_2, ... μ_m sämmtlich kleiner wie n und $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_m$ grösser wie n sind.

Wir bemerken nun, dass der grösste Werth, den ν_0 haben kann, n ist und dass ν_1, ν_2, ... ν_m nie grösser wie $\frac{n}{2}$ sein können. Ausgenommen den Fall, dass $n = 2$, können nicht sämmtliche ν_1, ν_2, ... ν_m den Werth $\frac{n}{2}$ haben. Somit ist, wenn $n > 2$,

---

* Oeuvres complêtes, Nouvelle Edition T. I p. 148.

$$p < \tfrac{1}{2}\left\{(n-1)(m-1)-(m-1)-m\left(\frac{n}{2}-1\right)\right\}$$

oder

$$p < 1+\frac{n}{2}(m-4).$$

Hieraus folgt, dass, wenn $n>2$, die Zahl p nur $=1$ sein kann, wenn $m<4$, also $m=3$ oder $m=2$. Nur im Falle $n=2$ kann $m=4$ werden.

Betrachten wir den Fall $m=3$, dann ist

$$p=1+\frac{2n-\nu_0-\nu_1-\nu_2-\nu_3}{2}.$$

p ist $=1$, wenn $\nu_0+\nu_1+\nu_2+\nu_3=2n$. Diese Gleichung kann nur dann erfüllt werden, wenn $\nu_0=n$, weil ν_1, ν_2, ν_3 nicht grösser wie $\frac{n}{2}$ und nicht sämmtlich mit n diesen Werth haben können; ausgenommen ist wieder der Fall, dass $n=2$ ist. Somit soll $\nu_1+\nu_2+\nu_3=n$ sein, und diese Gleichung kann nur erfüllt werden in den Fällen

$$\nu_1=\frac{n}{3},\quad \nu_2=\frac{n}{3},\quad \nu_3=\frac{n}{3};$$
$$\nu_1=\frac{n}{2},\quad \nu_2=\frac{n}{4},\quad \nu_3=\frac{n}{4};$$
$$\nu_1=\frac{n}{2},\quad \nu_2=\frac{n}{3},\quad \nu_3=\frac{n}{6};$$

damit aber n, μ_1, μ_2, μ_3 keinen Theiler gemeinsam haben, kann im ersten Falle n nur $=3$, im zweiten nur $=4$ und im dritten nur $=6$ sein.

Ist $m=2$, dann ist $p=1+\frac{1}{2}(n-\nu_0-\nu_1-\nu_2)$; p wird $=1$, wenn $\nu_0+\nu_1+\nu_2=n$. Durch ähnliche Betrachtungen wie im Falle $m=3$ findet man, dass folgende Werthe dieser Gleichung genügen können:

$$\begin{aligned}
n=6,\quad &\nu_0=3,\quad \nu_1=2,\quad \nu_2=1,\\
&\nu_0=2,\quad \nu_1=1,\quad \nu_2=3,\\
&\nu_0=1,\quad \nu_1=3,\quad \nu_2=2;\\
n=4,\quad &\nu_0=2,\quad \nu_1=1,\quad \nu_2=1,\\
&\nu_0=1,\quad \nu_1=2,\quad \nu_2=1;\\
n=3,\quad &\nu_0=1,\quad \nu_1=1,\quad \nu_2=1.
\end{aligned}$$

Wir werden also zu dem Resultat geführt, dass $\int\frac{\partial x}{\sqrt[n]{R(x)^k}}$ vom Geschlecht **eins** ist, wenn $\sqrt[n]{R(x)^k}$ eine der folgenden Formen hat:

1) $\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}$,
2) $\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}$,
3) $\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}$,
4) $\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^4}$,
5) $\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5}$,
6) $\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2}$,
7) $\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3}$,
8) $\sqrt[4]{(x-a)^3(x-b)^3}$,
9) $\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^4}$,
10) $\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^5}$,
11) $\sqrt[6]{(x-a)^4(x-b)^5}$.

Aus unserer Voraussetzung, dass sämmtliche $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_m$ kleiner wie n, und $\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_m$ grösser wie n sein sollen, folgt, dass $\int \frac{\partial x}{\sqrt[n]{R(x)^k}}$ für keinen Werth von x (weder $x=a_1, a_2, \dots a_m$, noch $x=\infty$) unendlich wird und also erster Gattung ist. Ohne Hinzufügung einer logarithmischen Function kann deshalb die Summe zweier solcher Integrale zu einem dritten solchen Integral reducirt werden und das Abel'sche Theorem giebt die algebraische Relation, welche zwischen den oberen Grenzen dieser Integrale stattfindet. Diese algebraische Gleichung ist aber das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dx_1}{\sqrt[n]{R(x_1)^k}}+\frac{dx_2}{\sqrt[n]{R(x_2)^k}}=0$$

und die obere Grenze des dritten Integrals ist die Constante der Differentialgleichung.

Wollen wir also eine algebraische Integralgleichung dieser Differentialgleichung finden, wobei $\sqrt[n]{R(x)^k}$ eine der oben bezeichneten elf Formen hat, so brauchen wir nur nach dem von Abel gelernten Verfahren die Relation zwischen x_1, x_2, x_3 aufzusuchen, wenn

$$\int^{x_1}\frac{\partial x_1}{\sqrt[n]{R(x_1)^k}}+\int^{x_2}\frac{\partial x_2}{\sqrt[n]{R(x_2)^k}}+\int^{x_3}\frac{\partial x_3}{\sqrt[n]{R(x_3)^k}}=0.$$

Wie bekannt, besteht dies Verfahren darin, dass man mit der Gleichung $y^n=R(x)^k$ eine andere $\nu_0+\nu_1 y+\dots+\nu_{n-1}y^{n-1}=0$ verbindet, wobei $\nu_0, \nu_1, \dots \nu_{n-1}y^{n-1}$ ganze rationale Functionen von x sind. Diese Functionen müssen und können in unserem Falle so bestimmt werden, dass, wenn man y zwischen beide Gleichungen eliminirt, die resultirende Gleichung nur drei Wurzeln hat, die von zwei arbiträren Coefficienten abhängen, die in den Functionen ν vorkommen. Alle übrigen Wurzeln sollen nur abhängen von den Constanten, welche in $R(x)$ vorkommen.

Man braucht schliesslich diese arbiträren Coefficienten nur zu eliminiren aus den Relationen, welche diese Coefficienten mit den drei Wurzeln x_1, x_2, x_3 verbinden, um die gesuchte Gleichung zu erhalten.

Wir wollen diese Methode anwenden zur Integration der elf Gleichungen, welche entstehen, wenn man in der Gleichung $\frac{dx_1}{\sqrt[n]{R(x_1)^k}}+\frac{dx_2}{\sqrt[n]{R(x_2)^k}}=0$ die oben angedeuteten Formen giebt.

In Betreff dieser Gleichungen bemerken wir, dass die erste die bekannte elliptische Differentialgleichung ist und dass die dritte von Allégret* betrachtet ist. Dieser nämlichen Gleichung hat Capitän Mac

* Comptes rendus, T. 66 p. 1144.

Mahon* eine ausführliche Abhandlung gewidmet und Cayley hat eine höchst interessante Note dazugefügt. Uebrigens entstehen die Gleichungen 2), 6), 7), 8), 9), 10), 11) aus den übrigen, wenn eine der Grössen a, b, c, d unendlich wird.

Vollständigkeitshalber werden wir doch alle diese Gleichungen lösen.

$$\text{I)}\quad \frac{\partial x_1}{\sqrt{(x_1-a)(x_1-b)(x_1-c)(x_1-d)}}+\frac{\partial x_2}{\sqrt{(x_2-a)(x_2-b)(x_2-c)(x_2-d)}}=0.$$

Man betrachte die Gleichungen

$$y^2=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=x^4+px^3+qx^2+rx+s$$

und

$$\nu_0+\nu_1 y=0,$$

wo ν_0 und ν_1 ganze rationale Functionen von x sind. Nach Elimination von y entsteht die Gleichung

$$\nu_0^2-\nu_1^2(x^4+px^3+qx^2+rx+s)=0.$$

Die Functionen ν_0 und ν_1 werden nun so bestimmt, dass sie sämmtlich zwei willkürliche Coefficienten enthalten und nur drei oder vier Wurzeln von diesen Coefficienten abhängen. Dies geschieht, wenn $\nu_0=x^2+\alpha x+\beta$ und $\nu_1=1$ gesetzt wird. Die Gleichung dritten Grades ist dann:

$$(2\alpha-p)x^3+(\alpha^2+2\beta-q)x^2+(2\alpha\beta-r)x+(\beta^2-s)=0.$$

Die algebraische Relation zwischen den Wurzeln x_1, x_2, x_3 dieser Gleichung ist die Integralgleichung; wenn y_1, y_2, y_3 die zu x_1, x_2, x_3 gehörigen Werthe von y sind in der Gleichung $y^2=x^4+px^3+qx^2+rx+s$, so bedeutet diese Relation, dass die Werthe x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3 der Gleichung $x^2+\alpha x+\beta+y=0$ genügen, und sie ist in Determinantenform

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1, & x_1, & 1\\ x_2^2+y_2, & x_2, & 1\\ x_3^2+y_3, & x_3, & 1\end{vmatrix}=0.$$

Hierbei ist noch unbestimmt, welche der beiden Wurzeln von y^2: y_1, y_2, y_3 bedeuten. Hinsichtlich y_1 und y_2 kann man beliebig wählen, aber dann ist y_3 dadurch bestimmt, dass x_3, y_3 beiden Gleichungen genügen müssen. Diese Form der Integralgleichung ist eine andere, wie die gewöhnlich gegebene; aber auch diese von Lagrange gegebene Form wird leicht aus unseren Gleichungen abgeleitet. Offenbar besteht die folgende Relation:

$$(x_1+x_2+x_3)(2\alpha-p)=q-\alpha^2-2\beta$$

oder

$$(\alpha+x_1+x_2)^2=q+p(x_1+x_2)+(x_1+x_2)^2-2(\beta+\alpha x_3)+px_3.$$

Aus der Gleichung $y=-(x^2+\alpha x+\beta)$ folgt aber:

$$\alpha+x_1+x_2=-\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\quad\text{und}\quad \beta+\alpha x_3=-(y_3+x_3^2),$$

also

* Quarterly Journal of Mathematics, Febr. 1888, p. 158.

$$\left(\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)^2 = q+p(x_1+x_2)+(x_1+x_2)^2+2y_3+2x_3+px_3$$
$$= \left(\frac{y_3}{x_3}+x_3\right)^2-\frac{r}{x_3}+\frac{s}{x_3^2}+p(x_1+x_2)+(x_1+x_2)^2$$
$$= C+p(x_1+x_2)+(x_1+x_2)^2.$$

II) $$\frac{\partial x_1}{\sqrt{((x_1-a)(x_1-b)(x_1-c))^2}}+\frac{\partial x_2}{\sqrt{((x_2-a)(x_2-b)(x_2-c))^2}}=0.$$

Die beiden zu betrachtenden Gleichungen sind:

$$y^3=(x-a)(x-b)(x-c)=x^3+px^2+qx+r$$

und

$$\nu_0+\nu_1 y+\nu_2 y^2=0.$$

Es ist leicht zu sehen, dass, wenn man $\nu_0=\alpha x+\beta$, $\nu_1=1$ und $\nu_2=0$ setzt, die Gleichung, die nach Elimination von y entsteht, die schon mehrmals erwähnte Form haben wird. Diese Gleichung ist:

$$(\alpha^3+1)x^3+(3\alpha^2\beta-(a+b+c))x^2+(3\alpha\beta^2+(ab+ac+bc))x$$
$$+(\beta^3-abc)=0.$$

Sind x_1, x_2, x_3 die Wurzeln dieser Gleichung und y_1, y_2, y_3 die correspondirenden Werthe von y in $y^3=(x-a)(x-b)(x-c)$, so erhält man die Integralgleichung, indem man die Bedingung schreibt, dass x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3 der Gleichung $\alpha x+\beta+y=0$ genügen. Diese Bedingung ist:

$$\begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

und das ist die von Cayley gegebene Form der Integralgleichung. Für y_1, y_2 kann nach Willkür einer der drei Werthe von $\sqrt[3]{y^3}$ genommen werden, aber y_3 ist dann wiederum bestimmt.

Auch die von Mac Mahon gegebene Form der Integralgleichung wird leicht abgeleitet, denn es bestehen die folgenden Relationen:

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{3\alpha^2\beta-(a+\beta+c)}{\alpha^3+1},$$
$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{3\alpha\beta^2+(ab+ac+bc)}{\alpha^3+1},$$
$$x_1x_2x_3=-\frac{\beta^3-abc}{\alpha^3+1}.$$

Hieraus folgt:

$$abc-\tfrac{1}{3}(ab+ac+bc)(x_1+x_2+x_3)+\tfrac{1}{3}(a+b+c)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$$
$$-x_1x_2x_3=\frac{(\beta+a\alpha)(\beta+b\alpha)(\beta+c\alpha)}{\alpha^3+1}.$$

Eliminirt man aber x aus den Gleichungen

$$y^3=(x-a)(x-b)(x-c) \text{ und } y+\alpha x+\beta=0,$$

dann findet man

$$y_1 y_2 y_3 = -\frac{(\beta + a\alpha)(\beta + b\alpha)(\beta + c\alpha)}{\alpha^3 + 1}$$

und somit

$$y_1^3 y_2^3 y_3^3 = [x_1 x_2 x_3 - \tfrac{1}{3}(a+b+c)(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) + \tfrac{1}{3}(ab+ac+bc)(x_1 + x_2 + x_3) - abc]^3.$$

Hier ist das Integral rational in x_1, x_2 und x_3, und in dieser Form ist dasselbe zuerst von Mac Mahon gegeben.

III) $$\frac{\partial x_1}{\sqrt[4]{(x_1 - a)^2 (x_1 - b)^3 (x_1 - c)^3}} + \frac{\partial x_2}{\sqrt[4]{(x_2 - a)^2 (x_2 - b)^3 (x_2 - c)^3}} = 0.$$

Die beiden zu betrachtenden Gleichungen sind:

$$y^4 = (x-a)^2 (x-b)^3 (x-c)^3 \quad \text{und} \quad \nu_0 + \nu_1 y + \nu_2 y^2 + \nu_3 y^3 = 0.$$

Ist ω eine primitive vierte Wurzel aus der Einheit, dann ist die Gleichung, die nach Elimination von y entsteht (wir schreiben der Kürze halber $x_2 - a = A$, $x - b = B$, $x - c = C$):

$$\begin{aligned}
&(\nu_0 + \nu_1 A^{1/2} B^{3/4} C^{3/4} + \nu_2 A B^{3/2} C^{3/2} + \nu_3 A^{3/2} B^{9/4} C^{9/4}) \\
&(\nu_0 + \nu_1 \omega A^{1/2} B^{3/4} C^{3/4} - \nu_2 A B^{3/2} C^{3/2} - \nu_3 \omega A^{3/2} B^{9/4} C^{9/4}) \\
&(\nu_0 - \nu_1 A^{1/2} B^{3/4} C^{3/4} + \nu_2 A B^{3/2} C^{3/2} - \nu_3 A^{3/2} B^{9/4} C^{9/4}) \\
&(\nu_0 - \nu_1 \omega A^{1/2} B^{3/4} C^{3/4} - \nu_2 A B^{3/2} C^{3/2} + \nu_3 \omega A^{3/2} B^{9/4} C^{9/4}) = 0.
\end{aligned}$$

Macht man $\nu_0 = A^2 B^2 C^2$, $\nu_1 = \alpha A^2 BC$, $\nu_2 = \beta AB$, $\nu_3 = \gamma$, so kann man $A^6 B^7 C^6$ aus dem Producte austreten lassen, und der übrig bleibende Theil ist vom fünften Grade. Wir haben aber noch drei Coefficienten und können nun diesen solche Werthe beilegen, dass noch ein Factor vom zweiten Grade austritt. Dies geschieht, wenn man $\gamma = 0$ macht. A^2 wird Factor und die resultirende Gleichung, entstehend aus der Elimination von y aus

$$y^4 = (x-a)^2 (x-b)^3 (x-c)^3$$

und

$$(x-a)(x-b)(x-c)^2 + \alpha(x-a)(x-c)y + \beta y^2 = 0$$

ist:

$$(x-b)((x-c) + \beta^2(x-b))^2 + (x-c)(2\beta(x-b) - \alpha^2(x-a))^2 = 0.$$

Die Eliminirung von α und β aus den Relationen zwischen den Wurzeln x_1, x_2, x_3 und den Coefficienten dieser Gleichung würde das Integral der Differentialgleichung in rationeller Form geben; weil diese aber äusserst complicirt ist, beschränken wir uns darauf, das Integral in der Form zu schreiben, dass es die Bedingung ausdrückt, dass die Werthe $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ der Gleichung

$$(x-a)(x-b)(x-c)^2 + \alpha(x-a)(x-c)y + \beta y^2 = 0$$

genügen, wobei y_1, y_2, y_3 die zu x_1, x_2, x_3 correspondirenden Werthe von y in der Gleichung $y^4 = (x-a)^2 (x-b)^3 (x-c)^3$ sind. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn

$$\begin{vmatrix}
(x_1 - a)(x_1 - b)(x_1 - c)^2 & (x_1 - a)(x_1 - c) y_1 & y_1^2 \\
(x_2 - a)(x_2 - b)(x_2 - c)^2 & (x_2 - a)(x_2 - c) y_2 & y_2^2 \\
(x_3 - a)(x_3 - b)(x_3 - c)^2 & (x_3 - a)(x_3 - c) y_3 & y_3^2
\end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} (x_1-b)^{1/4}(x_1-c)^{1/2} & (x_1-a)^{1/2}(x_1-c)^{1/4} & (x_1-b)^{3/4} \\ (x_2-b)^{1/4}(x_2-c)^{1/2} & (x_2-a)^{1/2}(x_2-c)^{1/4} & (x_2-b)^{3/4} \\ (x_3-b)^{1/4}(x_3-c)^{1/2} & (x_3-a)^{1/2}(x_3-c)^{1/4} & (x_3-b)^{3/4} \end{vmatrix} = 0.$$

IV) $$\frac{\partial x_1}{\sqrt[6]{(x_1-a)^3(x_1-b)^4(x_1-c)^5}} + \frac{\partial x_2}{\sqrt[6]{(x_2-a)^3(x_2-b)^4(x_2-c)^5}} = 0.$$

Die beiden Gleichungen, woraus das Integral abgeleitet wird, sind:

$$y^6 = (x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5$$

und

$$\nu_0 + \nu_1 y + \nu_2 y^2 + \nu_3 y^3 + \nu_4 y^4 + \nu_5 y^5 = 0.$$

Schreiben wir wiederum $(x-a) = A$, $(x-b) = B$, $(x-c) = C$ und ist ω eine primitive sechste Wurzel aus der Einheit, so haben wir durch Elimination von y:

$$\begin{aligned}
&(\nu_0 + \nu_1 A^{1/2} B^{2/3} C^{5/6} + \nu_2 A B^{4/3} C^{5/6} + \nu_3 A^{3/2} B^2 C^{5/2} + \nu_4 A^2 B^{8/3} C^{10/3} + \nu_5 A^{5/2} B^{10/3} C^{25/6}) \\
&(\nu_0 + \nu_1 \omega A^{1/2} B^{2/3} C^{5/6} + \nu_2 \omega^2 A B^{4/3} C^{5/3} - \nu_3 A^{3/2} B^2 C^{5/2} - \nu_4 \omega A^2 B^{8/3} C^{10/3} - \nu_5 \omega^2 A^{5/2} B^{10/3} C^{25/6}) \\
&(\nu_0 + \nu_1 \omega^2 A^{1/2} B^{2/3} C^{5/6} - \nu_2 \omega A B^{4/3} C^{5/6} + \nu_3 A^{3/2} B^2 C^{5/2} + \nu_4 \omega^2 A^2 B^{8/3} C^{10/3} - \nu_5 \omega A^{5/2} B^{10/3} C^{25/6}) \\
&(\nu_0 - \nu_1 A^{1/2} B^{2/3} C^{5/6} + \nu_2 A B^{4/3} C^{5/3} - \nu_3 A^{3/2} B^2 C^{5/2} + \nu_4 A^2 B^{8/3} C^{10/3} - \nu_5 A^{5/2} B^{10/3} C^{25/6}) \\
&(\nu_0 - \nu_1 \omega A^{1/2} B^{2/3} C^{5/6} + \nu_2 \omega^2 A B^{4/3} C^{5/3} + \nu_3 A^{3/2} B^2 C^{5/2} - \nu_4 \omega A^2 B^{8/3} C^{10/3} + \nu_5 \omega^2 A^{5/2} B^{10/3} C^{25/6}) \\
&(\nu_0 - \nu_1 \omega^2 A^{1/2} B^{2/3} C^{5/6} - \nu_2 \omega A B^{4/3} C^{5/3} - \nu_3 A^{3/2} B^2 C^{5/2} + \nu_4 \omega^2 A^2 B^{8/3} C^{10/3} + \nu_5 \omega A^{5/2} B^{10/3} C^{25/6}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Macht man $\nu_0 = \alpha A^2 B^4 C^4$, $\nu_1 = \beta A^2 B^3 C^3$, $\nu_2 = \gamma A B^3 C^2$, $\nu_3 = \delta A B^2 C$, $\nu_4 = BC$, $\nu_5 = \varepsilon$, dann kommt in obige Gleichung der Factor $A^{12} B^{20} C^{21}$ und der übrig bleibende Theil ist vom siebenten Grade. Wir haben aber fünf willkürliche Coefficienten α, β, γ, δ, ε und drei von diesen können so bestimmt werden, dass noch ein Factor vom vierten Grade austritt; dazu machen wir $\gamma = 0$, $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$ und $B^2 C^2$ wird ein Factor. Wir bekommen also das Resultat, dass die Elimination von y aus den Gleichungen

$$y^6 = (x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5$$

und

$$\alpha(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3 + \beta(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2 y + y^4 = 0$$

zu der Gleichung führt:

$$[(x-c) - \beta^2(x-a)]^3 + \alpha^3(x-b)(x-c)[\alpha^3(x-b) + b\beta^2(x-a) + 2(x-c)] = 0.$$

Das Integral entsteht wiederum, wenn α und β eliminirt werden aus den Gleichungen, die sie verbinden mit den Wurzeln x_1, x_2, x_3 dieser Gleichung, und das Integral würde dann eine rationale Form haben. Sind y_1, y_2, y_3 die mit x_1, x_2, x_3 correspondirenden Werthe von y, dann kann man das Integral auch schreiben:

$$\begin{vmatrix} (x_1-a)^2(x_1-b)^3(x_1-c)^3 & (x_1-a)^2(x_1-b)^2(x_1-c)^2 y_1 & y_1^4 \\ (x_2-a)^2(x_2-b)^3(x_2-c)^3 & (x_2-a)^2(x_2-b)^2(x_2-c)^2 y_2 & y_2^4 \\ (x_3-a)^2(x_3-b)^3(x_3-c)^3 & (x_3-a)^2(x_3-b)^2(x_3-c)^2 y_3 & y_3^4 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} (x_1-b)^{1/3}(x_1-c)^{1/6} & (x_1-a)^{1/3} & (x_1-c)^{1/2} \\ (x_2-b)^{1/3}(x_2-c)^{1/6} & (x_2-a)^{1/3} & (x_2-c)^{1/2} \\ (x_3-b)^{1/3}(x_3-c)^{1/6} & (x_3-a)^{1/3} & (x_3-c)^{1/2} \end{vmatrix} = 0.$$

Die übrigen Differentialgleichungen entstehen aus den hier gelösten, indem man einen der Werthe a, b, c, d unendlich gross werden lässt. Und auch die Integrale dieser Gleichungen werden aus den bis jetzt gefundenen abgeleitet, wenn man in den zweiten Determinanten einen der Factoren $(x-a)$, $(x-b)$ oder $(x-c)=1$ setzt. Die directe Lösung dieser Differentialgleichungen kann in ganz derselben Weise stattfinden, wie die behandelte, und darum beschränken wir uns darauf, nur die Integrale mitzutheilen.

V) $$\frac{\partial x_1}{\sqrt{(x_1-a)(x_1-b)(x_1-c)}} + \frac{\partial x_2}{\sqrt{(x_2-a)(x_2-b)(x_2-c)}} = 0.$$

Aus den Gleichungen

$$y^2 = (x-a)(x-b)(x-c) \quad \text{und} \quad y + \alpha x + \beta = 0$$

folgt, dass das Integral ist:

$$\begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$4(x_1 x_2 x_3 - abc)(x_1 + x_2 + x_3 - a - b - c) \\ = (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 - ab - ac - bc)^2.$$

VI) $$\frac{\partial x_1}{\sqrt[3]{(x_1-a)^2(x_1-b)^2}} + \frac{\partial x_2}{\sqrt[3]{(x_2-a)^2(x_2-b)^2}}.$$

Die beiden Gleichungen sind:

$$y^3 = (x-a)(x-b) \quad \text{und} \quad y + \alpha x + \beta = 0$$

und das Integral:

$$\begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$y_1^3 y_2^3 y_3^3 + (ab - \tfrac{1}{3}(a+b)(x_1 + x_2 + x_3) + \tfrac{1}{3}(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3))^3 = 0.$$

VII) $$\frac{\partial x_1}{\sqrt[4]{(x_1-a)^2(x_1-b)^3}} + \frac{\partial x_2}{\sqrt[4]{(x_2-a)^2(x_2-b)^3}} = 0.$$

Die beiden Gleichungen sind:

$$y^4 = (x-a)^2(x-b)^3 \quad \text{und} \quad y^2 + \alpha(x-a)y + \beta(x-a)(x-b) = 0$$

und das Integral:

$$\begin{vmatrix} (x_1-a)(x_1-b) & (x_1-a)y_1 & y_1^2 \\ (x_2-a)(x_2-b) & (x_2-a)y_2 & y_2^2 \\ (x_3-a)(x_3-b) & (x_3-a)y_3 & y_3^2 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} (x_1-b)^{1/4} & (x_1-a)^{1/2} & (x_1-b)^{3/4} \\ (x_2-b)^{1/4} & (x_2-a)^{1/2} & (x_2-b)^{3/4} \\ (x_3-b)^{1/4} & (x_3-a)^{1/2} & (x_3-b)^{3/4} \end{vmatrix} = 0.$$

VIII) $$\frac{\partial x_1}{\sqrt[4]{((x_1-a)(x_1-b))^3}} + \frac{\partial x_2}{\sqrt[4]{((x_2-a)(x_2-b))^3}} = 0.$$

Die beiden Gleichungen sind:

$$y^4 = (x-a)(x-b) \quad \text{und} \quad y^2 + \alpha(x-b)y + \beta(x-a)(x-b)^2 = 0$$

und das Integral:

$$\begin{vmatrix} (x_1-a)^2(x_1-b)^2 & (x_1-b)y_1 & y_1^2 \\ (x_2-a)^2(x_2-b)^2 & (x_2-b)y_2 & y_2^2 \\ (x_3-a)^2(x_3-b)^2 & (x_3-b)y_3 & y_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

oder

$$\begin{vmatrix} (x_1-a)^{1/4}(x_1-b)^{1/2} & (x_1-b)^{1/4} & (x_1-a)^{3/4} \\ (x_2-a)^{1/4}(x_2-b)^{1/2} & (x_2-b)^{1/4} & (x_2-a)^{3/4} \\ (x_3-a)^{1/4}(x_3-b)^{1/2} & (x_3-b)^{1/4} & (x_3-a)^{3/4} \end{vmatrix} = 0.$$

IX) $$\frac{\partial x_1}{\sqrt[6]{(x_1-a)^3(x_1-b)^4}} + \frac{\partial x_2}{\sqrt[6]{(x_2-a)^3(x_2-b)^4}}.$$

Die beiden Gleichungen sind:

$$y^6 = (x-a)^3(x-b)^4 \quad \text{und} \quad y^5 + \alpha(x-a)(x-b)y^3 + \beta(x-a)^3(x-b)^3$$

und das Integral ist:

$$\begin{vmatrix} (x_1-a)^3(x_1-b)^3 & (x_1-a)(x_1-b)y_1^3 & y_1^5 \\ (x_2-a)^3(x_2-b)^3 & (x_2-a)(x_2-b)y_2^3 & y_2^5 \\ (x_3-a)^3(x_3-b)^3 & (x_3-a)(x_3-b)y_3^3 & y_3^5 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} (x_1-a)^{1/2} & (x_1-b)^{1/3} & 1 \\ (x_2-a)^{1/2} & (x_2-b)^{1/3} & 1 \\ (x_3-a)^{1/2} & (x_3-b)^{1/3} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

X) $$\frac{\partial x_1}{\sqrt[6]{(x_1-a)^3(x_1-b)^5}} + \frac{\partial x_1}{\sqrt[6]{(x_2-a)^3(x_2-b)^5}} = 0.$$

Die beiden Gleichungen sind:

$$y^6 = (x-a)^3(x-b)^5 \quad \text{und} \quad y^5 + \alpha(x-a)(x-b)^2y^3 + \beta(x-a)^3(x-b)^4 = 0$$

und das Integral ist:

$$\begin{vmatrix} (x_1-a)^3(x_1-b)^4 & (x_1-a)(x_1-b)^2 y_1^3 & y_1^5 \\ (x_2-a)^3(x_2-b)^4 & (x_2-a)(x_2-b)^2 y_2^3 & y_2^5 \\ (x_3-a)^3(x_3-b)^4 & (x_3-a)(x_3-b)^2 y_3^3 & y_3^5 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} (x_1-b)^{1/6} & (x_1-b)^{1/2} & (x_1-a)^{1/2} \\ (x_2-b)^{1/6} & (x_2-b)^{1/2} & (x_2-a)^{1/2} \\ (x_3-b)^{1/6} & (x_3-b)^{1/2} & (x_3-a)^{1/2} \end{vmatrix} = 0.$$

XI) $$\frac{dx_1}{\sqrt[6]{(x_1-a)^4(x_1-b)^5}} + \frac{dx_1}{\sqrt[6]{(x_2-a)^4(x_2-b)^5}} = 0.$$

Die beiden Gleichungen sind:

$y^6=(x-a)^4(x-b)^5$ und $y^5+\alpha(x-a)(x-b)^2y^3+\beta(x-a)^3(x-b)^4=0$

und das Integral ist:

$$\begin{vmatrix} (x_1-a)^3(x_1-b)^4 & (x_1-a)(x_1-b)^2 y_1^3 & y_1^5 \\ (x_2-a)^3(x_2-b)^4 & (x_2-a)(x_2-b)^2 y_2^3 & y_2^5 \\ (x_3-a)^3(x_3-b)^4 & (x_3-a)(x_3-b)^2 y_3^3 & y_3^5 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} (x_1-a)^{1/3}(x_1-b)^{1/6} & (x_1-b)^{1/2} & 1 \\ (x_2-a)^{1/3}(x_2-b)^{1/6} & (x_2-b)^{1/2} & 1 \\ (x_3-a)^{1/3}(x_3-b)^{1/6} & (x_3-b)^{1/2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Wie bekannt, sind die Integrale $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{R(x)^k}}$, wenn $\sqrt[n]{R(x)^k}$ vom Geschlecht eins ist, reducirbar zu elliptischen Integralen. Am einfachsten kann das geschehen, wenn man den von Königsberger* gegebenen Regeln folgt. Eine dieser Regeln sagt aus, dass, wenn $\int f(x, \sqrt[n]{R(x)^k})\,dx$ reducirbar sein soll zu elliptischen Integralen, n den Werth 3, 4 oder 6 haben soll, und diese haben wir bestätigt gefunden; wir werden sehen, dass auch die übrigen Bedingungen in unserem Falle erfüllt werden können.

Die Reduction von $\int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{((x-a)(x-b)(x-c))^2}}$ ist von Königsberger** selbst schon angeführt und kann also hier weggelassen werden. Wir werden uns beschränken auf die Reduction der Integrale

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}} \quad \text{und} \quad \int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5}},$$

weil die Reduction der übrigen ganz einfach aus diesen abgeleitet wird.

---

* Crelle's Journ. Bd. 86 und 89; Mathem. Ann. Bd. 15.

** Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen. Leipzig 1882. § 15 S. 220.

Zur Reduction des ersten setzen wir:

$$z=\sqrt[4]{\alpha}\,\frac{(x-b)(x-c)}{y}\quad \text{oder}\quad z^4=\alpha\,\frac{(x-b)(x-c)}{(x-a)^2}$$

und bestimmen α so, dass $\sqrt{z^4-1}$ rational wird. Dann muss α der Gleichung genügen

$$4(\alpha-1)(\alpha\, b c-a^2)=(2a-\alpha(b+c))^2,$$

woraus

$$\alpha=\frac{4(a-b)(c-a)}{(b-c)^2}.$$

Dadurch wird

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}}=g\int\frac{\partial z}{\sqrt{1-z^4}},$$

wo

$$g=\frac{2\sqrt{2}}{(a-c)^{1/4}(c-b)^{1/4}(b-a)^{1/4}}.$$

Zur Reduction von $\int\frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5}}$ setzen wir

$$z=\frac{\alpha(x-a)^2(x-b)(x-c)^2}{(x-\beta)\,y^2}\quad \text{oder}\quad z^3=\frac{\alpha^3(x-a)^3(x-c)}{(x-\beta)^3(x-b)},$$

dann ist:

$$\sqrt{z(z^3-1)}=\sqrt{\alpha}\,\frac{(x-a)(x-c)}{(x-\beta)^2 y}\sqrt{\alpha^3(x-a)^3(x-c)-(x-\beta)^3(x-b)}$$

und wir müssen jetzt α und β so bestimmen, dass

$$\sqrt{\alpha^3(x-a)^3(x-c)-(x-\beta)^3(x-b)}$$

rational wird.

Einfacher ist es aber, α und β durch folgende Ueberlegung zu bestimmen.

Durch unsere Substitution wird

$$\frac{\partial z}{\sqrt{z(z^3-1)}}=\frac{\sqrt{\alpha}}{3}\cdot\frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5}}$$
$$\times\frac{(x-\beta)(x-b)(4x-3c-a)-(x-a)(x-c)(4x-3b-\beta)}{\sqrt{\alpha^3(x-a)^3(x-c)-(x-\beta)^3(x-b)}}.$$

Weil z und $\sqrt{z(z^3-1)}$ rational in x und y ausgedrückt werden sollen, muss auch $\int\frac{\partial z}{\sqrt{z(z^3-1)}}$ nur auf ein einziges Abel'sches Integral führen, und das geschieht nur dann, wenn α und β so bestimmt werden können, dass

$$\frac{(x-\beta)(x-b)(4x-3c-a)-(x-a)(x-c)(4x-3b-\beta)}{\sqrt{\alpha^3(x-a)^3(x-c)-(x-\beta)^3(x-b)}}$$

einen constanten Werth k bekommt, und das ist hier möglich. Denn setzt man in der Gleichung vierten Grades:

$$[(x-\beta)(x-b)(4x-3c-a)-(x-a)(x-c)(4x-3b-\beta)]^2$$
$$-k^2[\alpha^3(x-a)^3(x-c)-(x-\beta)^3(x-b)]=0$$

$x=a$, $x=b$, $x=c$, so findet man

$$k^2 = (c-a)(9a-8b-c),$$
$$\alpha^2 = \frac{64(b-a)(b-c)^3}{(c-a)(9a-8b-c)^3},$$
$$\beta = -\frac{9bc-8ac-ab}{9a-8b-c}.$$

Setzt man diese Werthe von α, β, k in obige Gleichung ein, so überzeugt man sich leicht, dass noch zwei andere beliebige Werthe von x (z. B. $x=0$ und $x=\infty$) der Gleichung genügen. Die Gleichung wird also durch obige Werthe von α, β, k eine Identität.

Die Conclusion ist, dass, wenn man setzt

$$z=\frac{4(b-c)(b-a)^{1/3}}{(9a-8b-c)(c-a)^{1/3}}\cdot\frac{(x-a)(x-c)^{1/3}}{\left(x+\frac{9bc-8ac-ab}{9a-8b-c}\right)(x-b)^{1/3}},$$

$\int\frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5}}$ übergeht in $g\int\frac{\partial z}{\sqrt{z(z^3-1)}}$, wo

$$g=\frac{3}{2(c-a)^{1/3}(b-a)^{1/6}(b-c)^{1/3}}.$$

XV.

Das ebene Kreissystem und seine Abbildung auf den Raum.

Von

J. THOMAE,

Professor an der Universität Jena.

Veranlasst durch Reye's Werkchen über die Geometrie der Kugeln im Raume, als einer linearen Geometrie von vier Ausdehnungen, habe ich in meinem Seminar im Winter 1883/84 Aufgaben behandeln lassen, welche sich auf ein Kugelgebüsch beziehen, dessen Kugeln ihren Mittelpunkt in einer Ebene haben. Da diese Kugeln durch ihre Schnittkreise mit jenen Ebenen völlig bestimmt sind, so beziehen sich diese Aufgaben wesentlich auf ein System von Kreisen in einer Ebene, auf das „ebene Kreissystem". Die Mannichfaltigkeit dieser Kreise ist ein Inbegriff von dreifacher Ausdehnung und lässt sich auf die Punkte des Raumes eindeutig beziehen. Gerade diese Beziehung war es, welche mich veranlasste, dem Kreissystem für seminaristische Uebungen den Vorzug vor dem allgemeinen Kugelsystem zu geben, weil es so dem Lernenden leichter werden mochte, eine nicht aus Punkten oder Ebenen bestehende Mannichfaltigkeit aufzufassen, indem er durch jene Beziehung ein Bild derselben in der Punktmannichfaltigkeit des gemeinen Raumes vorfindet. Auch konnte jene Beziehung die Quelle werden für die Bildung der einfachsten Mannigfaltigkeiten einer und zweier Ausdehnungen im System. Jedem Punktgebilde im Raume muss eine Configuration von Kreisen des Systems entsprechen. Jedem Axiom über Ebenen, Gerade und Punkte im Raume, jedem Postulat über die Verbindung jener Elemente muss ein Satz, eine Construction im Kreissystem entsprechen. So ergab sich eine Fülle von Aufgaben, zum Theil von Steiner, Poncelet und Anderen bereits gelöst, die hier unter neuen anregenden Gesichtspunkten auftreten und auf welche durch den Spiegel des Raumes neues Licht fällt. Auch giebt die Beziehung zum Raume Anlass genug zur Stellung und Lösung völlig neuer Probleme, zur Entwickelung neuer Sätze, so dass mir ein Hinlenken des grössern mathematischen Publicums auf diesen Gegenstand nützlich erscheint, weshalb ich hier das, was in dieser Sache in meinem Seminar zur Sprache kam, und Einiges mehr

mittheile. Dabei beabsichtige ich, diesen Mittheilungen soviel als möglich ein geometrisches Gewand zu geben, weshalb ich erläuternde Rechnungen unter den Text verlege. Allerdings muss ich hierzu manche Kenntnisse der Geometrie des Raumes voraussetzen, namentlich die Kenntniss der Polarentheorie und der stereographischen Projection. Diese Projection ist es eben, durch welche die Beziehung zwischen den Kreisen des Systems und den Punkten des Raumes hergestellt wird.

Auf die Systemebene S setze ich eine Kugel auf, deren Durchmesser als Maasseinheit gelten mag und die ich fernerhin die Kugel K nennen will. Der Berührungspunkt mag Südpol, der gegenüberliegende Nordpol genannt werden. Vom Nordpol aus projicirt man die Kreise des Systems auf die Kugel, wo sie bekanntlich wieder als Kreise abgebildet werden, und umgekehrt, nur dass allen Kugelkreisen durch den Nordpol gerade Linien des Systems entsprechen. Allein diese geraden Linien sind selbstredend dem System zuzurechnen, etwa als Kreise mit unendlich grossem Radius. Diese bekannte, zur Herstellung von Planigloben viel benutzte, die stereographische Projection hat die Eigenschaft, dass Linien der Systemebene, welche sich unter einem Winkel φ schneiden, Linien auf der Kugel entsprechen, welche sich dort genau unter demselben Winkel φ schneiden, oder dass Bild und Original in den kleinsten Theilen ähnlich sind.

Construirt man nun zu einem beliebigen Kreise $\mathfrak{k}$ in S sein Bild $\varkappa$ auf K und bestimmt zur Ebene des Kreises $\varkappa$ den Pol k in Bezug auf K, so giebt es zu jedem Kreise $\mathfrak{k}$ in S einen und nur einen Punkt k im Raume, der ihm entspricht. Aber umgekehrt? Umgekehrt giebt es zu jedem Punkte k im Raume ausserhalb der Kugel K eine diese in einem Kreise $\varkappa$ schneidende Polarebene und einen $\varkappa$ stereographisch abbildenden Kreis $\mathfrak{k}$ in S, welcher den Radius Null hat, ein Punktkreis ist, wenn der Punkt k auf die Kugel fällt, und den Radius Unendlich hat, d. h. in eine Gerade ausartet, wenn $\varkappa$ durch den Nordpol geht, also wenn k in der Tangentialebene N des Nordpols n liegt. Den Punkten im Innern der Kugel aber entsprechen Polarebenen, welche die Kugel nur in imaginären Kreisen treffen, deren stereographische Bilder daher auch imaginär sind. Sollten auch diesen Punkten reale Objecte entsprechen, so liesse sich das dadurch erwirken, dass man statt der Kreise die durch sie bestimmten Polarsysteme einführte, was jedoch die Vorstellung erschweren würde, weshalb es unterbleibt.

Bekanntlich versteht man unter Potenz des Punktes $\mathfrak{m}$ in Bezug auf den Kreis $\mathfrak{k}$ den Inhalt des Rechtecks, welches aus den beiden durch $\mathfrak{k}$ bestimmten Segmenten einer Secante durch $\mathfrak{m}$ gebildet wird, positiv genommen, wenn $\mathfrak{m}$ ausserhalb $\mathfrak{k}$ liegt, negativ genommen im andern Falle. Diese Grösse $\mathfrak{p}_\mathfrak{m}$ ist unabhängig von der Wahl der Secante und also für einen äussern Punkt dem Quadrat der Tangente von $\mathfrak{m}$ an $\mathfrak{k}$

gleich, so dass ein mit dem Radius $\mathfrak{r} = \sqrt{\mathfrak{p}_m}$ um $\mathfrak{m}$ geschlagener Kreis $\mathfrak{k}$ **rechtwinklig** schneidet.* Liegt $\mathfrak{m}$ innerhalb $\mathfrak{k}$, so schneidet $\mathfrak{k}$ den um $\mathfrak{m}$ mit dem Radius $\mathfrak{r} = \sqrt{-\mathfrak{p}_m}$ geschlagenen Kreis **diametral**. Durch Angabe des Mittelpunktes eines Kreises $\mathfrak{k}$ und seiner Potenz $\mathfrak{p}$ in Bezug auf den Südpol der Kugel K, also durch drei Grössen ist derselbe völlig bestimmt.

Ist aber $\mathfrak{p}$ grösser als das Quadrat der Entfernung δ des Mittelpunktes vom Südpol, so ist der Radius $\sqrt{(\delta\delta - \mathfrak{p})}$ des Kreises imaginär, so dass unsere Mannichfaltigkeit die Eigenthümlichkeit hat, dass in ihr reellen Bestimmungsstücken, reellen Coördinaten, imaginäre Objecte entsprechen können.

Es ist für's Folgende nützlich, einen Satz über Kugelkreise voraufgehen zu lassen. — Legt man durch einen Punkt des Raumes P Ebenen, welche die P ausschliessende Kugel in Kreisen $(\varkappa)$ schneiden, so stehen die Kreise $(\varkappa)$ sämmtlich rechtwinklig auf dem Kreise π, welcher durch die Polarebene von P bestimmt wird. — Es ist evident, dass von den Kreisen $(\varkappa)$ diejenigen Kreise $(\varkappa')$ auf π senkrecht stehen, welche durch die Verbindungslinie MP des Kugelmittelpunktes und des Punktes P gehen. Von den übrigen Kreisen aus $(\varkappa)$ berührt ein jeder, wie ein Blick auf den Tangentialkegel lehrt, zwei Kreise der Schaar $(\varkappa')$ auf dem Kreise $\varkappa$ und folglich stehen auch sie senkrecht auf π, w. z. b. w.

Liegt P im Innern der Kugel K, so trifft jede Ebene durch P die Kugel. Von den so bestimmten Kugelkreisen $(\varkappa)$ ist derjenige der kleinste, der seinen Mittelpunkt in P hat. Dieser wird von allen übrigen Kreisen $(\varkappa)$ diametral geschnitten, weil ihre Ebenen durch seinen Mittelpunkt gehen.

Wir fragen nun zuerst: Was für eine Configuration von Kreisen in S entspricht den Punkten einer Ebene im Raume? Wir nennen diese Configuration **Kreisbündel**; sie bildet selbstredend eine Schaar von

---

* Nimmt man $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ zu rechtwinkligen Coordinaten in der Ebene S, den Südpol von K zum Anfang derselben, und bestimmt durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ den Mittelpunkt eines Kreises $\mathfrak{k}$, durch die Potenz $\mathfrak{p}$ des Coordinatenanfangs in Beziehung auf $\mathfrak{k}$ seinen Halbmesser, so ist $\mathfrak{k}$ durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{p}$ völlig bestimmt, und zwar ist sein Halbmesser

$$\mathfrak{r} = \sqrt{(\mathfrak{x}\mathfrak{x} + \mathfrak{y}\mathfrak{y} - \mathfrak{p})}.$$

Der entsprechende Punkt k im Raume mag die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z haben und die x- und y-Axe mögen bez. mit der $\mathfrak{x}$- und $\mathfrak{y}$-Axe zusammenfallen. Alsdann bestehen die Beziehungen

$$\mathfrak{x} = x:(1-z), \quad \mathfrak{y} = y:(1-z), \quad \mathfrak{p} = z:(1-z);$$
$$x = \mathfrak{x}:(1+\mathfrak{p}), \quad y = \mathfrak{y}:(1+\mathfrak{p}), \quad z = \mathfrak{p}:(1+\mathfrak{p});$$
$$\mathfrak{r}\mathfrak{r} = \frac{xx + yy + z(z-1)}{(1-z)(1-z)} = \frac{p}{(1-z)(1-z)} = p(1+\mathfrak{p})(1+\mathfrak{p}),$$

wenn p die Potenz von k in Bezug auf K ist. Nun ist p negativ für das Innere der Kugel (Null auf der Kugel), folglich ist $\mathfrak{r}$ für solche Punkte imaginär, während $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, d. h. die Coordinaten des Mittelpunktes des Kreises, immer reell sind.

zweifach-unendlicher Mannichfaltigkeit, eine Schaarschaar.* Wir betrachten zunächst solche Ebenen E, welche die Kugel K schneiden.

Die Polarebenen aller Punkte von E gehen durch einen Punkt o ausserhalb K, den Pol von E, und treffen die Kugel K in Kreisen ($\varkappa$), welche den Kreis ω, den E aus der Kugel schneidet, sämmtlich rechtwinklig treffen. Die stereographischen Projectionen ($\mathfrak{k}$) der Kreise ($\varkappa$) treffen mithin die Projection $\mathfrak{o}$ von ω auch sämmtlich rechtwinklig, weshalb wir $\mathfrak{o}$ den Orthogonalkreis des Bündels nennen. Umgekehrt, alle Kreise ($\mathfrak{k}$), welche einen Kreis $\mathfrak{o}$ rechtwinklig treffen, bilden sich stereographisch auf Kreise der Kugel K ab, die die Projection ω von $\mathfrak{o}$ rechtwinklig treffen, deren Ebenen durch einen Punkt e ausserhalb K gehen, deren Pole in einer Ebene E liegen, die durch ω geht. Den Punkten von E im Innern von K entsprechen keine realen Kreise, den Punkten auf K entsprechen Punktkreise des Systems, welche die Kreislinie $\mathfrak{o}$ ausfüllen. Der Kreis $\mathfrak{o}$ als solcher gehört nicht zum Bündel, ebenso wenig als o auf E liegt, wenn E nicht Tangentialebene ist. Den Schnittpunkten von E und N entsprechen gerade Linien in S, welche $\mathfrak{o}$ rechtwinklig schneiden und daher alle durch den Mittelpunkt von $\mathfrak{o}$ gehen. Schneidet ein Kreis $\mathfrak{k}$ den Kreis $\mathfrak{o}$ rechtwinklig, so ist seine Tangente im Schnittpunkte zugleich Radius von $\mathfrak{o}$, und folglich ist das Quadrat dieses Radius — $\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_0$ — die Potenz dieser Kreise. Alle Kreise, welche $\mathfrak{o}$ orthogonal schneiden, also alle Kreise des Bündels $\mathfrak{C}$ haben in Bezug auf die Mitte von $\mathfrak{o}$, den Potenzpunkt des Bündels, dieselbe Potenz, genannt Bündelpotenz. Ist E Tangentialebene, so gehen alle Kreise der entsprechenden Bündel $\mathfrak{C}$ durch einen Punkt, den einzigen Punktkreis des Bündels, der zugleich Orthogonalkreis und die Projection des Berührungspunktes von E an K ist. Umgekehrt bilden die Kreise durch einen Punkt ein Bündel, dessen entsprechende Ebene Tangentialebene ist. Da die Bündelpotenz Null ist, so wollen wir einen solchen Bündel Nullbündel nennen.

---

* Ist $Ax+By+Cz-D=0$ die Gleichung der Ebene, so ist die Gleichung des entsprechenden Bündels
$$A\mathfrak{x}+B\mathfrak{y}+(C-D)\mathfrak{p}-D=0.$$
Zwei Kreise $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}$; $\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{p}'$ schneiden sich rechtwinklig, wenn
$$\mathfrak{x}\mathfrak{x}'+\mathfrak{y}\mathfrak{y}'-\tfrac{1}{2}(\mathfrak{p}+\mathfrak{p}')=0$$
ist; folglich schneiden alle Kreise des Bündels den Kreis $\mathfrak{o}$, dessen Coordinaten
$$\mathfrak{x}_0=\frac{A}{2(D-C)},\quad \mathfrak{y}_0=\frac{B}{2(D-C)},\quad \mathfrak{p}_0=\frac{D}{2(D-C)}$$
sind, rechtwinklig. Dieser Kreis, der Orthogonalkreis des Bündels, hat den Radius
$$\mathfrak{r}_0=\sqrt{(AA+BB+4D(D-C))}:2\sqrt{(D-C)},$$
dessen Quadrat zugleich die Potenz aller Kreise des Bündels in Bezug auf den Mittelpunkt des Kreises $\mathfrak{o}$ ist und daher Bündelpotenz heisst, auch wenn $\mathfrak{r}_0$ imaginär ist. Die Potenz des Punktes $\mathfrak{x}', \mathfrak{y}'$ in Bezug auf den Kreis $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}$ ist
$$\mathfrak{x}'\mathfrak{x}'+\mathfrak{y}'\mathfrak{y}'-2\mathfrak{x}\mathfrak{x}'-2\mathfrak{y}\mathfrak{y}'+\mathfrak{p}.$$

Irgend zwei diametral gegenüberliegende Punkte des Orthogonalkreises $\mathfrak{o}$ sind für alle Kreise des Bündels conjugirt, und umgekehrt, alle Kreise, die zwei gegebene Punkte zu conjugirten haben, liegen in einem Bündel, dessen Orthogonalkreis die Verbindungslinie jener zwei Punkte zum Durchmesser hat.

Ehe wir zu Ebenen übergehen, die K nicht treffen, betrachten wir eine Gerade im Raume. Sie mag bezeichnet werden durch zwei Ebenen (E_1, E_2), deren Schnitt sie ist, oder durch zwei Punkte (k_1, k_2), deren Verbindungslinie sie ist.

Ist die Gerade (E_1, E_2) Tangente an die Kugel K, so haben alle Ebenen, welche Polarebenen der Punkte dieser Geraden sind, die Gerade (o_1, o_2) zur Axe, welche senkrecht auf (E_1, E_2) steht und die Kugel in demselben Punkte als jene berührt. Alle Kreise $(\varkappa)$, welche durch die Polarebenen auf K bestimmt werden, berühren sich, also müssen sich auch die stereographischen Bilder $(\mathfrak{k})$ dieser Kreise berühren. Man nennt die Configuration von Kreisen, welche den Punkten einer Geraden entsprechen, ein **Kreisbüschel** und bezeichnet diesen entweder durch zwei Kreisbündel $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$ oder durch zwei Kreise $(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2)$. Alle Kreise, welche sich in **einem** Punkte berühren, entsprechen einer Tangente an die Kugel; einen solchen Büschel wollen wir einen Berührungsbüschel nennen. Ist (E_1, E_2) Tangente an die Kugel und also auch ihre Polare (o_1, o_2), so schneiden die Kreise des Büschels $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$ die Kreise des Büschels $(\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2)$, welcher der Polare (o_1, o_2) entspricht, sämmtlich senkrecht, weil dies offenbar mit den Kreisen auf der Kugel der Fall ist, welche die stereographische Projection dieser Büschel sind. Im Büschel $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$ ist eine Gerade mit enthalten, ebenso in $(\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2)$, welche Potenzlinie des Büschels heisst, weil jeder ihrer Punkte die evidente Eigenschaft hat, für jeden Kreis des Büschels dieselbe Potenz zu haben. Die Potenzlinie des Büschels $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$ ist die Centrale des Büschels $(\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2)$.

Trifft die Gerade (E_1, E_2) die Kugel K, so gehen die Polarebenen ihrer Punkte durch eine Gerade (o_1, o_2), die Polare von (E_1, E_2), welche die Kugel nicht trifft. Die Polarebenen der Punkte auf (E_1, E_2) schneiden sich daher auf K nicht, mithin schneiden sich auch die Kreise des zugehörigen Büschels $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$ in S **nicht**, wie aus der stereographischen Verwandtschaft folgt. Zum Büschel $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$ gehören aber zwei Punktkreise, die den Schnitten von (E_1, E_2) mit K entsprechen. Eine Ebene E durch (E_1, E_2) trifft die Kugel in einem Kreise ω, dessen stereographische Projection $\mathfrak{o}$ in S von jedem Kreise des Büschels $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$ rechtwinklig getroffen wird, weil $\mathfrak{o}$ Orthogonalkreis **des** Bündels $\mathfrak{E}$ ist, der der Ebene E entspricht. Die Gesammtheit der Kreise $\mathfrak{o}$ bildet aber denjenigen Büschel, welcher der Polare (o_1, o_2) von (E_1, E_2) entspricht. Sind zwei Gerade im Raume einander polar in Bezug auf K, so haben die entsprechenden Büschel die Eigenschaft, dass die Kreise des einen die

des andern senkrecht schneiden. Umgekehrt entsprechen Büscheln, deren Kreise sich senkrecht schneiden, polare Gerade im Raume. Die sämmtlichen Kreise des einen dieser Büschel, dessen entsprechende Gerade K nicht trifft, gehen durch zwei feste Punkte, die Doppelpunkte des Büschels, die Punktkreise desjenigen Büschels, welcher der Polare entspricht, denn auch diese müssen von allen Kreisen des ersten Büschels rechtwinklig getroffen werden. Die Verbindungslinie der Doppelpunkte hat die evidente Eigenschaft, dass jeder ihrer Punkte in Bezug auf alle Kreise des Büschels dieselbe Potenz hat; sie gehört selbst mit zum Büschel und entspricht dem Schnittpunkte der Geraden (E_1, E_2) mit der Ebene N im Raume. Sie heisst die Potenzlinie des Büschels. Sie ist die Centrale desjenigen Büschels, der zur Polare der dem Büschel im Raume entsprechenden Geraden gehört. Zu einem Büschel mit Doppelpunkten gehört ein kleinster Kreis, auf welchem die Doppelpunkte diametral liegen. Zu einer Geraden, welche die Kugel trifft, gehört ein Büschel, dessen Kreise sich nicht schneiden, deren Mittelpunkte aber auch auf einer Geraden liegen, der Verbindungslinie der Punktkreise. Die Potenzlinie des zur Polare gehörenden Büschels muss nämlich alle Kreise des ersten Büschels senkrecht schneiden, also durch alle Mittelpunkte gehen. Zu einem Büschel ohne doppelte Punkte gehört auch eine Gerade, der Kreis (so zu sagen), welcher dem Schnitt der Geraden im Raume mit N entspricht; da sie die Kreise des Polarbüschels rechtwinklig schneidet, so ist sie die Centrale des letzteren, woraus sofort folgt, dass ihre Punkte für alle Kreise des Büschels dieselbe Potenz haben, dass sie die Potenzlinie des Büschels ist.

Liegt die Gerade in der Ebene N, so besteht der entsprechende Büschel aus einem gewöhnlichen Strahlenbüschel, wir haben nur einen Doppelpunkt. Die Polare dieser Geraden geht durch den Nordpol, ihr entsprechen concentrische Kreise, deren Potenzlinie die unendlich ferne Gerade der Systemebene ist. Liegt eine Gerade in N und geht sie zugleich durch den Nordpol, so entspricht ihr ein Parallelstrahlenbüschel.

Projicirt man einen Punkt k vom Nordpol, so geht der Projectionsstrahl durch den Mittelpunkt $\mathfrak{m}$ des Kreises $\mathfrak{k}$, welchem k entspricht, weil den Punkten des Projectionsstrahles concentrische Kreise entsprechen. Hiervon lässt sich sofort eine schöne Anwendung machen. Allen Kreisen in S, welche eine Curve $\mathfrak{C}$ berühren, entsprechen die Punkte einer abwickelbaren, die Kugel K berührenden Fläche im Raume, denn die Schaar von Kreisen, welche $\mathfrak{C}$ in einem Punkte berühren, entspricht den Punkten einer die Kugel K berührenden Geraden. Dem Krümmungskreise von $\mathfrak{C}$ aber in jenem Punkte entspricht der Schnittpunkt zweier unendlich nahe benachbarten Geraden, also ist die Fläche abwickelbar. Projicirt man nun die Wendecurve dieser abwickelbaren Fläche vom Nordpol in die Systemebene S, so sind die Projectionspunkte die Mittel-

punkte der Krümmungskreise, also ist die Evolute von $\mathfrak{C}$ die Projection der Wendecurve der Fläche.

Trifft die Ebene E die Kugel nicht, so entsprechen den Punkten der Geraden (E, N) gerade Linien. Diese geraden Linien gehen alle durch einen Punkt, den Punktkreis des concentrischen Büschels, welcher der Polare (o, n) der Geraden (E, N) entspricht, welche durch den Nordpol n geht. Dieser Punkt ist die Projection des Poles o von E von n aus in die Ebene S. Der Punkt, in welchem (o, n) die Ebene E trifft, sei d, der Kreis des Bündels $\mathfrak{C}$, welcher ihm entspricht, sei $\mathfrak{d}$. Dann hat $\mathfrak{d}$ zum Mittelpunkt das Centrum des der Geraden (E, N) entsprechenden Strahlenbüschels und wird von diesen Strahlen diametral geschnitten. Legen wir durch d alle Geraden, welche E erzeugen, so erhalten wir eine Reihe von Büscheln, welche den Kreis $\mathfrak{d}$ gemein haben und deren Kreise diesen Kreis $\mathfrak{d}$ sämmtlich diametral schneiden, weil dies die Potenzlinien der Büschel thun, woraus von selbst folgt, dass $\mathfrak{d}$ der kleinste Kreis des Bündels ist, er heisse D i a m e t r a l k r e i s desselben. Die Potenz des Mittelpunktes von $\mathfrak{d}$ in Bezug auf alle Kreise des Bündels ist das Quadrat des Halbmessers von $\mathfrak{d}$, negativ genommen, weil jeder Kreis einen Durchmesser von $\mathfrak{d}$ zur Sehne hat. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist also der P o t e n z p u n k t des B ü n d e l s, und das negative Quadrat seines Radius $\mathfrak{r}_\mathfrak{d}$ ist die B ü n d e l p o t e n z.

Den Postulaten der Raumgeometrie stehen im Kreissystem nicht Postulate, sondern Constructionsaufgaben gegenüber, weil man für die Constructionen im System nicht neue Postulate setzen, sondern die der gemeinen Geometrie annehmen wird, auf welche die Correlate jener Postulate nicht unmittelbar führen. Dies wird sofort erkannt werden.

Zwei Punkte im Raume bestimmen eine Gerade. Postulat: Die Gerade durch zwei Punkte zu construiren. — Zwei Kreise $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$ bestimmen einen Büschel. Aufgabe: Den zwei Kreise enthaltenden Büschel zu construiren. — Schneiden sich $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$ reell, so ist die Verbindungslinie der Schnittpunkte die Potenzlinie, die Verbindungslinie der Mittelpunkte die Centrale des Büschels. Ist nun ein Kreis $\mathfrak{k}$ des Büschels $(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2)$ zu construiren, dessen Mittelpunkt, oder von dem ein dritter Punkt gegeben ist, so ist die Lösung elementar. Schneiden sich aber $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$ nicht (reell), so ist die Centrale auch wieder unmittelbar gegeben. Auf ihr bestimmt eine Tangente, welche von beiden Kreisen, aber auf verschiedener Seite berührt wird, den Fusspunkt der auf der Centrale senkrechten Potenzlinie (innerer Aehnlichkeitspunkt), womit diese gefunden ist. Später werden sich jedoch für diese Construction einfachere Mittel ergeben.

Von einem beliebigen Punkte $\mathfrak{m}$ der Potenzlinie ziehe man eine Tangente an $\mathfrak{k}$ und schlage mit ihr als Radius um $\mathfrak{m}$ einen Kreis. Die Schnittpunkte desselben mit der Centrale sind die Punktkreise des Büschels. Soll nun ein Kreis $\mathfrak{k}$ des Büschels durch den Punkt $\mathfrak{m}'$ gelegt

werden, so zeichne man zuerst den Kreis $\mathfrak{k}'$, der durch $\mathfrak{m}'$ und die Punktkreise geht. Die Tangente des Kreises $\mathfrak{k}'$ in $\mathfrak{m}'$ trifft die Centrale im Mittelpunkte des gesuchten Kreises. Denn dieser Kreis ist der einzige, der seinen Mittelpunkt auf der Centrale hat, durch $\mathfrak{m}'$ geht und $\mathfrak{k}'$ rechtwinklig schneidet, Eigenschaften, die der gesuchte Kreis $\mathfrak{k}$ haben muss.

Diese Construction lehrt, dass die Mittelpunkte der Kreise $\mathfrak{k}$ des Bündels $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$ die Centrale nicht vollständig ausfüllen, sondern ausserhalb der Punktkreise liegen. Die Kreise, deren Mittelpunkte zwischen ihnen liegen, haben imaginäre Radien. Ist von dem gesuchten Kreise $\mathfrak{k}$ nicht ein Punkt seiner Peripherie, sondern der Mittelpunkt $\mathfrak{m}$ gegeben, so ziehe man durch die Punktkreise einen beliebigen Kreis, der seinen Mittelpunkt auf der Potenzlinie hat. Von $\mathfrak{m}$ ziehe man an diesen Kreis eine Tangente und schlage mit ihr als Radius um $\mathfrak{m}$ einen Kreis, er ist der Kreis $\mathfrak{k}$.

Drei Punkte bestimmen eine Ebene. Postulat: sie zu construiren. — Drei Kreise bestimmen ein Bündel. Aufgabe: denselben zu construiren. Wir betrachten den Bündel als construirt, wenn wir seinen Potenzpunkt und seinen Orthogonalkreis $\mathfrak{o}$ oder seinen Diametralkreis $\mathfrak{d}$ construirt haben. — Die drei Kreise $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$, $\mathfrak{k}_3$ bestimmen paarweise ein Büschel, mithin drei Potenzlinien. Der Schnittpunkt der Potenzlinien von $(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2)$ mit $(\mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_3)$ muss auch auf der Potenzlinie $(\mathfrak{k}_3, \mathfrak{k}_1)$ liegen, weil von ihm aus die Potenz für alle drei Kreise dieselbe ist. Er ist unbestimmt, wenn die drei Kreise in einem Büschel liegen. Giebt es von diesem Punkte aus eine Tangente an einen und mithin an alle drei Kreise $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$, $\mathfrak{k}_3$, so ist sie der Radius des Kreises $\mathfrak{o}$. Giebt es keine Tangente, so zeichnen wir die kleinste Sehne für einen der drei Kreise, sie ist der Durchmesser des Diametralkreises $\mathfrak{d}$, womit die Aufgabe erledigt ist.

Zwei Ebenen bestimmen eine Gerade. Postulat: diese Gerade zu construiren. — Zwei Bündel $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ bestimmen ein Büschel. Aufgabe: denselben zu construiren. — Diese Aufgabe zerfällt in die drei: 1. alle Kreise $\mathfrak{k}$ zu zeichnen, welche $\mathfrak{o}_1$, $\mathfrak{o}_2$ orthogonal schneiden; 2. alle Kreise $\mathfrak{k}$ zu zeichnen, welche $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$ diametral schneiden; 3. alle Kreise $\mathfrak{k}$ zu zeichnen, welche $\mathfrak{o}$ orthogonal und $\mathfrak{d}$ diametral schneiden.

Erster Fall. Man bestimme die Potenzlinie zu $\mathfrak{o}_1$, $\mathfrak{o}_2$; sie ist die Centrale des gesuchten Büschels und die Centrale $\mathfrak{o}_1$, $\mathfrak{o}_2$ ist die Potenzlinie desselben. Hat der Büschel $(\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2)$ reelle Doppelpunkte, so sind sie die Punktkreise des gesuchten Büschels; hat er Punktkreise, so sind sie die Doppelpunkte derselben.

Zweiter Fall: Die Potenzlinie, also ein erster Kreis des gesuchten Büschels ist die Centrale $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$, die beide Kreise diametral trifft. Die Endpunkte der Durchmesser von $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$, die auf der Centrale senkrecht stehen, bilden ein Antiparallelogramm, folglich ein Kreisviereck, und bestimmen

so einen zweiten Kreis des gesuchten Büschels, womit derselbe construirt ist. Er hat immer Doppelpunkte.

Dritter Fall. Soll $\mathfrak{o}$ orthogonal und $\mathfrak{d}$ diametral geschnitten werden, so ist wieder die Potenzlinie, also ein erster Kreis des gesuchten Büschels die Centrale $\mathfrak{o}\mathfrak{d}$. Beliebig viele andere Kreise des Büschels findet man, wenn man durch irgend zwei Diametralpunkte von $\mathfrak{d}$ einen Kreis zieht, der $\mathfrak{o}$ orthogonal trifft. Diese Aufgabe ist nur ein specieller Fall der bereits gelösten, zu drei Kreisen $\mathfrak{o}_1$, $\mathfrak{o}_2$, $\mathfrak{o}_3$ den Orthogonalkreis zu zeichnen, indem hier zwei derselben zu Punktkreisen zusammengeschrumpft sind.

Der Fall, dass einer der Bündel $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ oder beide Berührungsbündel sind, kann seiner Einfachheit wegen übergangen werden.

Postulat: Den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene zu finden. — Aufgabe: Den Kreis zu zeichnen, den ein Bündel $\mathfrak{E}$ und ein Büschel $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$ gemein haben. — Man construire zwei Orthogonalkreise $\mathfrak{o}_1$, $\mathfrak{o}_2$ des Büschels $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$ und zeichne den Kreis, der diese und den Orthogonalkreis $\mathfrak{o}$ von $\mathfrak{E}$, wenn ein solcher vorhanden ist, ebenfalls rechtwinklig schneidet; es ist der gesuchte. Besitzt aber $\mathfrak{E}$ einen Diametralkreis $\mathfrak{d}$, so zeichnen wir zwei Kreise des Büschels $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$, welche $\mathfrak{d}$ schneiden. Die Verbindungslinien der Schnittpunkte $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{d}$ gehen durch den Potenzpunkt $\mathfrak{m}$ des Bündels $(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \mathfrak{d})$, welcher Bündel auch den gesuchten Kreis enthält. Zieht man daher durch $\mathfrak{m}$ einen Durchmesser an $\mathfrak{d}$, so bestimmt er die Schnittpunkte des gesuchten Kreises mit $\mathfrak{d}$.

Zieht man von $\mathfrak{m}$ Tangenten an $\mathfrak{d}$, so liefern sie die Berührungspunkte der beiden Kreise, welche dem Büschel $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$ angehören und $\mathfrak{d}$ berühren. Somit ist nebenbei die wichtige Aufgabe gelöst: Die beiden Kreise eines Büschels zu finden, welche einen gegebenen Kreis berühren.

Postulat: Durch den Schnitt zweier Ebenen und einen gegebenen Punkt eine Ebene zu legen. — Aufgabe: Ein Büschel ist durch zwei Bündel $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ gegeben, man soll denjenigen Bündel construiren, der diesen Büschel und einen Kreis $\mathfrak{k}_3$ enthält. — Man construire zu zwei Kreisen des Büschels $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$ und zu $\mathfrak{k}_3$ den Orthogonal- oder Diametralkreis, so ist der Bündel bestimmt.

Ist nicht der Kreis $\mathfrak{k}_3$ gegeben, sondern wird verlangt, dass der Bündel, der $(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2)$ enthält, ein Nullbündel sei, was nur möglich ist, wenn $(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2)$ reelle Doppelpunkte hat, so sind die beiden Bündel, welche je einen der Doppelpunkte zu Orthogonalkreisen, hier Punktkreisen, haben, die gesuchten.

Postulat: Drei Ebenen bestimmen einen Punkt; denselben zu zeichnen. — Aufgabe: Drei Bündel bestimmen einen Kreis; denselben zu zeichnen. — Sehen wir von dem einfacheren Falle ab, dass unter den gegebenen Bündeln sich Nullbündel vorfinden, so zerfällt die Aufgabe in die vier:

Einen Kreis zu zeichnen, der

1. $\mathfrak{o}_1$, $\mathfrak{o}_2$, $\mathfrak{o}_3$ orthogonal,
2. $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{d}_3$ diametral,
3. $\mathfrak{o}_1$, $\mathfrak{o}_2$ orthogonal, $\mathfrak{d}_3$ diametral,
4. $\mathfrak{o}_1$ orthogonal, $\mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{d}_3$ diametral

trifft. — Im Falle 1 ist der gemeinsame Potenzpunkt Mittelpunkt, und die Tangente von ihm an einen der Kreise ist der Radius des gesuchten Kreises, der auch imaginär sein kann. In den anderen drei Fällen ist die Lösung immer reell, weil der Punkt, den die drei den Bündeln entsprechenden Ebenen gemein haben, ausserhalb der Kugel $\mathfrak{K}$ liegt, wenn eine von ihnen $\mathfrak{K}$ nicht trifft. Uebrigens sind alle vier Aufgaben bereits erledigt, denn zwei der gegebenen Kreise bestimmen ein Büschel, und es ist nur der Kreis zu ziehen, welchen dieser Büschel mit dem durch den dritten gegebenen Bündel gemein hat. Diese Aufgabe ist aber schon gelöst.

Weiss man *a priori*, dass zwei Büschel einen Kreis gemein haben, so ist er mit den bisher gegebenen Mitteln auch leicht zu finden. Zwei Büschel mit Doppelpunkten haben einen Kreis gemein, wenn diese ein Kreisviereck bilden.

Dies dürften die Fundamentalconstructionen sein, auf welche die linearen Aufgaben zwischen Kreisen, Büscheln und Bündeln führen; ehe wir aber zu Gebilden zweiter Ordnung übergehen, fügen wir noch einige nützliche Aufgaben und Bemerkungen an.

Die Aufgabe, denjenigen Kreis zu finden, für welchen zwei Paare von Punkten einander conjugirt sind, führt auf ein Büschel. Denn die Verbindungslinien der Punkte je eines Paares sind die Durchmesser der Orthogonalkreise zweier Bündel, denen die gesuchten Kreise angehören. Ein specieller Fall ist der, dass alle Kreise gefunden werden sollen, für welche ein Punkt und eine Gerade einander polar sein sollen. Denn der Punkt bildet mit zwei beliebigen Punkten auf der Polare zwei Paare conjugirter Punkte, mit der Beschränkung, dass ein Punkt beiden Paaren gemeinsam ist.

Sucht man die Kreise eines Büschels $(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2)$, für welche ein Paar von Punkten conjugirt sind, so folgt aus dem Gesagten, dass die Aufgabe darauf hinauskommt, den Schnitt eines Bündels mit einem Büschel zu finden. In einem Büschel aber befindet sich nicht immer ein Kreis, für welchen zwei Paare von Punkten conjugirt sind, weil zwei Büschel nicht immer einen Kreis gemein haben. Dasselbe gilt für Pol und Polare. Ist aber *a priori* die Gewissheit der Existenz eines solchen Kreises vorhanden, so ist auch der Kreis selbst leicht gefunden. Ein solcher Fall tritt ein bei der Aufgabe: diejenigen Kreise eines Büschels zu finden, für welche zwei Gerade einander conjugirt sind. Die Pole der einen Geraden in Bezug auf die Kreise des Büschels liegen bekanntlich auf

einem Kegelschnitte. Hat man daher fünf solcher Pole construirt, so construirt man (mit Hilfe von Zirkel und Lineal) die beiden Schnittpunkte $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}'$ des Kegelschnittes mit der zweiten Geraden. Dann sind diejenigen beiden Kreise zu suchen, für welche die erste Gerade und $\mathfrak{m}$ oder $\mathfrak{m}'$ Pol und Polare sind. Die Existenz dieser beiden Kreise hier ist evident.

Es war noch von einer Vereinfachung der Construction der Potenzlinie zweier Kreise $(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2)$ gesprochen. Sie geht durch den Potenzpunkt der drei Kreise $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$, $\mathfrak{k}_3$. Wählt man $\mathfrak{k}_3$ so, dass dieser Kreis $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ schneidet, so liefert der Schnittpunkt der Verbindungslinien der $\mathfrak{k}_3$ und $\mathfrak{k}_1$ gemeinsamen Punkte und der $\mathfrak{k}_3$ und $\mathfrak{k}_2$ gemeinsamen Punkte einen Punkt der Potenzlinie, wodurch dieser bestimmt ist.

Büscheln, welche dieselbe Potenzlinie haben, entsprechen im Raume Gerade, welche sich in einem Punkte der Ebene N schneiden; Büscheln, welche dieselbe Gerade zur Centrale haben, entsprechen im Raume Gerade, welche in einer Ebene durch den Nordpol n liegen; Büscheln, welche dasselbe Geradenpaar zu Centrale und Potenzlinie haben, entsprechen die Strahlen eines ebenen Strahlenbüschels, dessen Ebene durch n geht und dessen Centrum in N liegt.

Allen Raumpunkten zwischen den Ebenen S und N entsprechen Kreise (auch wenn sie imaginäre Radien haben), deren Potenz in Bezug auf den Südpol positiv ist, den Punkten ausserhalb solche, deren Potenz negativ ist. Den Punkten der Aequatorebene entsprechen alle Kreise in S, welche den um den Südpol gezogenen Einheitskreis orthogonal schneiden. Derjenige Bündel, dessen Kreise denselben Kreis diametral schneiden, entspricht der unendlich fernen Ebene des Raumes.

Ein fruchtbares Hilfsmittel zur Vereinfachung mancher Sätze sowohl, als auch zur Ausführung von Constructionen liefert für das Kreissystem die Möbius'sche Kreisverwandtschaft, die Abbildung durch reciproke Radii vectores, welche sowohl durch einen reellen, als auch durch einen imaginären Kreis vermittelt werden kann. Das Princip ist allgemein bekannt und braucht deshalb hier nicht auseinandergesetzt zu werden. Diese Verwandtschaft bildet das Kreissystem auf sich selbst ab. Ist $\mathfrak{k}$ der Kreis, in Bezug auf welchen die Abbildung vorgenommen wird, so bildet sich jeder den Kreis $\mathfrak{k}$ rechtwinklig schneidende Kreis auf sich selbst ab,* woraus sich eine neue Lösung der Aufgabe ergiebt, $\mathfrak{o}$ orthogonal, $\mathfrak{d}$ diametral durch einen Kreis zu schneiden. Man bilde in Bezug auf $\mathfrak{o}$ zwei Diametralpunkte von $\mathfrak{d}$ kreisverwandt ab, so bestimmen die Bildpunkte mit den Diametralpunkten ein Kreisviereck und somit den gesuchten Kreis. — Bildet man drei Kreise von einem Punkte ihres Or-

* Zwei Kreise $\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{p}'$; $\mathfrak{x}'', \mathfrak{y}'', \mathfrak{p}''$ sind einander in Bezug auf den Kreis $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}$ verwandt, wenn die Beziehung statt hat

$$\mathfrak{x}' - \mathfrak{x} : \mathfrak{y}' - \mathfrak{y} : \mathfrak{p}' - \mathfrak{p} = \mathfrak{x}'' - \mathfrak{x} : \mathfrak{y}'' - \mathfrak{y} : \mathfrak{p}'' - \mathfrak{p}.$$

thogonalkreises ab, so liegen die Mittelpunkte der Bilder auf einer Geraden. — Bildet man die Schaar von Kreisen durch einen Punkt, welche einen Kreis a unter dem Winkel A schneiden, von jenem Punkte aus ab (d. h. vermittelst eines Kreises, dessen Centrum jener Punkt ist), so wird aus der Kreisschaar eine Schaar von Geraden, welche das Bild a' von a unter dem Winkel A schneiden und also einen Kreis berühren. Die Winkel werden bei der Abbildung erhalten, weil dieselbe eine conforme ist. Die Kreise eines Nullbündels oder die Kreise durch einen Punkt, welche einen Kreis unter festem Winkel schneiden, berühren einen andern Kreis.

Von den Gebilden zweiter Ordnung will ich hauptsächlich diejenigen betrachten, welche geradlinigen Flächen entsprechen, aber über die allgemeinen einige Bemerkungen vorausschicken.

Eine Oberfläche F zweiten Grades trifft die Kugel k in einer Curve vierter Ordnung, folglich bilden die Punktkreise der ihr entsprechenden Schaarschaar $\mathfrak{F}$ eine Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten. Zerfällt diese Curve in zwei Curven zweiter Ordnung, so sind diese allemal Kreise, weil ebene Curven auf K immer Kreise sind, deren stereographische Projectionen wieder Kreise, gelegentlich gerade Linien sind. Nur diejenigen Flächen F machen eine Ausnahme, welche K im Nordpol berühren. Die durch sie bestimmte Curve vierter Ordnung liegt in einem Kegel, dessen Spitze n ist, und wird auf einen Kegelschnitt in S projicirt, so dass also in diesem Falle die Nullkreise der Schaarschaar $\mathfrak{F}$ einen Kegelschnitt erfüllen. Berührt eine Oberfläche F vom zweiten Grade die Kugel K längs einer Linie, so bilden die Punktkreise von $\mathfrak{F}$ in S nur eine Kreislinie, die doppelt zu zählen ist. Ist F eine Kugel, so füllen die Punktkreise von F in S nur einen (einfachen) Kreis aus, der natürlich auch imaginär sein kann. Durch die Punktkreise und einen Kreis ist die Schaarschaar zweiten Grades im Allgemeinen gegeben. Zwei Flächen zweiten Grades F_1, F_2 schneiden sich in einer Raumcurve vierter Ordnung (erster Familie). Die Mittelpunkte der Kreise, welche den Punkten jener Curve entsprechen, liegen auf einer Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten, der Projection der Raumcurve von n aus. Diese Curve kann auch in zwei Kegelschnitte, oder in eine Gerade und eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte zerfallen. Diese Curve vierter Ordnung enthält acht Punktkreise, die natürlich zum Theil oder auch alle imaginär sein können.

Zu den Kreisen, welche denselben Radius haben, gehören auch solche, deren Mittelpunkt unendlich weit entfernt ist, mithin berührt die zugehörige Oberfläche die Kugel K, weil die unendlich fernen Kreise die einzigen Punktkreise der Schaarschaar sind. Die Fläche ist offenbar eine Rotationsfläche. Ist der Radius der Kreise kleiner als Eins, so liegt die Polarebene desjenigen unter ihnen, dessen Mittelpunkt der Südpol der

Kugel K ist, mit diesem auf derselben Seite des Aequators, die Fläche ist ein die Kugel einschliessendes Ellipsoid. Ist der Radius gleich Eins, so ist sie ein Rotationsparaboloid; ist er grösser als Eins, so ist die Fläche ein Rotationshyperboloid mit zwei Mänteln.*

Besonders einfach sind die Gebilde, welche geradlinigen Flächen zweiter Ordnung entsprechen, welche wir jetzt untersuchen.

Alle Kreise, welche einen gegebenen Kreis orthogonal oder diametral schneiden, liegen in einem linearen Bündel. Es liegt nahe,** zu fragen: was für eine Mannichfaltigkeit bilden die Kreise, welche einen Kreis $\mathfrak{a}$ unter dem Winkel φ oder der Sehne σ schneiden? Ist $\sigma = 0$, so ist auch φ gleich Null oder gleich zwei Rechten. Dieser einfache Fall wird zuerst betrachtet.

Alle Kreise $\mathfrak{k}$, welche den Kreis $\mathfrak{a}$ in demselben Punkte berühren, bilden einen Berührungsbüschel, dessen Correlat im Raume eine die Kugel berührende Gerade ist. Alle diese Büschel haben den Kreis $\mathfrak{a}$ gemein, alle entsprechenden Geraden im Raume haben den Punkt $\mathfrak{a}$ gemein, der dem Kreise $\mathfrak{a}$ entspricht. Also entsprechen alle Kreise einer Schaarschaar $\mathfrak{F}$, welche einen Kreis $\mathfrak{a}$ berühren, den Punkten eines Kegels F, welcher die Kugel im stereographischen Bilde α von $\mathfrak{a}$ berührt und seine Spitze in a hat. Er ist ein Rotationskegel.

Ein Kegelschnitt auf einem Berührungskegel F entspricht einer Schaar von Kreisen, welche einen Kreis orthogonal oder diametral schneiden

---

* Alle Kreise mit dem Radius $\mathfrak{r}$ befriedigen die Gleichung

$$\mathfrak{x}\mathfrak{x} + \mathfrak{y}\mathfrak{y} - \mathfrak{p} = \mathfrak{r}\mathfrak{r}$$

und folglich ist die Gleichung der entsprechenden Fläche

$$xx + yy + zz(1 - \mathfrak{r}\mathfrak{r}) + z(2\mathfrak{r}\mathfrak{r} - 1) = \mathfrak{r}\mathfrak{r}.$$

Die Schaarschaar $\mathfrak{x}\mathfrak{x} + \mathfrak{y}\mathfrak{y} + \mathfrak{p}\mathfrak{p} = c$ gehört zur Fläche

$$xx + yy + zz = c(1 - z)(1 - z).$$

** Alle Kreise $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{p}$, welche den Kreis $\mathfrak{x}_\mathfrak{a}$, $\mathfrak{y}_\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}_\mathfrak{a}$ unter dem Winkel φ schneiden, befriedigen die Gleichung

$$\cos^2\varphi\,(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 - \mathfrak{p})(\mathfrak{x}_\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{y}_\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{p}_\mathfrak{a}) = (\mathfrak{x}\mathfrak{x}_\mathfrak{a} + \mathfrak{y}\mathfrak{y}_\mathfrak{a} - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{p} + \mathfrak{p}_\mathfrak{a}))^2.$$

Die entsprechende Fläche hat die Gleichung

$$\cos^2\varphi\,(x^2 + y^2 + z(z-1))(x_\mathfrak{a}^2 + y_\mathfrak{a}^2 + z_\mathfrak{a}(z_\mathfrak{a} - 1)) = (xx_\mathfrak{a} + yy_\mathfrak{a} + zz_\mathfrak{a} - \tfrac{1}{2}(z + z_\mathfrak{a}))^2.$$

Für $\varphi = 0$ oder $\varphi = \pi$ ist dies die Gleichung desjenigen die Kugel berührenden Kegels, dessen Spitze der Punkt a ist, welcher dem Kreise $\mathfrak{a}$ im Raume entspricht. Für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ wird aus der Fläche eine Ebene, doppelt genommen. Für beliebig reelle Werthe von φ ist die Fläche ein Rotationshyperboloid, welches die Kugel in dem Kreise α berührt, welcher die stereographische Projection von $\mathfrak{a}$ ist. Ist der Radius des Kreises imaginär, so ist die Fläche nicht geradlinig. Ist z. B.

$$\mathfrak{x}_\mathfrak{a} = \mathfrak{y}_\mathfrak{a} = 0, \quad \mathfrak{p}_\mathfrak{a} = -\mathfrak{l}\mathfrak{l}, \quad \text{also} \quad x_\mathfrak{a} = 0, \quad y_\mathfrak{a} = 0, \quad z_\mathfrak{a} = \mathfrak{l}\mathfrak{l} : (\mathfrak{l}\mathfrak{l} - 1),$$

so ist die Gleichung der Fläche

$$-\cos^2\varphi\,(x^2 + y^2 + z(z-1))\,\mathfrak{l}\mathfrak{l} = (\tfrac{1}{2}z(1 + \mathfrak{l}\mathfrak{l}) + \mathfrak{l}\mathfrak{l})^2$$

und sie ist daher ein Rotationsellipsoid. — Ist $F_{(\mathfrak{a},\varphi)}$ die Fläche, welche dem Kreise $\mathfrak{a}$ und dem Winkel φ zugehört, $F_{(\mathfrak{b},\varphi)}$ die zu $\mathfrak{b}$ und φ gehörende, so sind die Schnittebenen derselben unabhängig von φ.

und einen andern berühren. Da durch einen solchen Kegelschnitt immer noch ein zweiter K berührender Kegel geht, so berühren diese Kreise, wenn sie nicht durch einen Punkt gehen, noch einen zweiten Kreis. Durch einen Punkt gehen die Kreise, wenn der Kegelschnitt in einer Tangentialebene liegt. — Berührt ein Kegelschnitt die Kugel K in zwei Punkten, so giebt es stets zwei Berührungskegel, in denen er liegt.

An diese Sätze lässt sich naturgemäss die Lösung der Apollonischen Probleme anschliessen, als Correlat der Aufgabe, die acht Schnittpunkte dreier Kegel zu finden, welche ein und dieselbe Kugel berühren. Man bedarf dazu des geometrischen Satzes: Berühren zwei Oberflächen zweiten Grades ein und dieselbe dritte, so schneiden sie sich in ebenen Curven. Drei ebensolche Oberflächen schneiden sich in acht Punkten, die in vier Geraden von solcher Beschaffenheit liegen, dass durch jede drei Ebenen gehen, welche Ebenen die Schnitte je zweier Oberflächen sind, so dass diese Geraden schon durch die Schnittebenen von zweien der Oberflächen bestimmt sind.*

Alle Kreise $(\mathfrak{k}, \mathfrak{a})$, $(\mathfrak{k}, \mathfrak{b})$, $(\mathfrak{k}, \mathfrak{c})$, welche bez. die Kreise $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ berühren, entsprechen im Raume Kegeln, welche die Kugel K berühren, und ihre Spitzen in a, b, c den $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ entsprechenden Punkten haben. Die Kegel (a), (b) und die Kegel (b), (c) und ebenso (c), (a) schneiden sich in ebenen Curvenpaaren, etwa in

$$(a, b)_1, \quad (a, b)_2;$$
$$(b, c)_1, \quad (b, c)_2;$$
$$(c, a)_1, \quad (c, a)_2.$$

Es seien μ, ν die Combinationen 1, 1; 1, 2; 2, 1; 2, 2. Die Ebenen $(a, b)_\mu$, $(b, c)_\mu$ bestimmen vier Gerade, bezeichnet etwa durch $(a, b, c)_{\mu,\nu}$, durch welche paarweise auch die Ebenen $(c, a)_1$, $(c, a)_2$ gehen. Diese vier Geraden treffen die Kegel (a), (b), (c) in acht Punkten, welche für jeden Kegel dieselben sind. Es wird daher im Allgemeinen acht Kreise geben, welche $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ zugleich berühren.

Der Geraden $(a, b, c)_{\mu,\nu}$ entspricht ein Büschel, welcher leicht zu construiren ist. Die Kreise $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_\mu$ (in leicht verständlicher Bezeichnung) liegen in einem Bündel, von welchem man drei Kreise zu construiren

---

* Ist F eine Oberfläche zweiten Grades, sind E_1, E_2, E_3 Ebenen, λ_1, λ_2, λ_3 Constante, so sind die Gleichungen dreier F berührenden Oberflächen

$$F_1 = F + \lambda_1 E_1 E_1 = 0, \quad F_2 = F + \lambda_2 E_2 E_2 = 0, \quad F_3 = F + \lambda_3 E_3 E_3 = 0.$$

Die Ebenenpaare, in denen sie sich schneiden, haben die Gleichungen

$$(\sqrt{\lambda_1} E_1 - \sqrt{\lambda_2} E_2)(\sqrt{\lambda_1} E_1 + \sqrt{\lambda_2} E_2) = 0,$$
$$(\sqrt{\lambda_2} E_2 - \sqrt{\lambda_3} E_3)(\sqrt{\lambda_2} E_2 + \sqrt{\lambda_3} E_3) = 0,$$
$$(\sqrt{\lambda_3} E_3 - \sqrt{\lambda_1} E_1)(\sqrt{\lambda_3} E_3 + \sqrt{\lambda_1} E_1) = 0.$$

Die Ebenen des dritten Paares gehen durch die Schnitte je zweier Ebenen des ersten und zweiten Paares. Alle Ebenen gehen durch den Schnittpunkt von E_1, E_2, E_3.

hat. Man zeichne drei Kreise, welche $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ von aussen oder innen, und drei Kreise, welche den einen von aussen, den andern von innen berühren. Die durch die beiden Kreistripel bestimmten Bündel $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_1$, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_2$ entsprechen den Ebenen $(a, b)_1$, $(a, b)_2$. Da zu den Berührungskreisen die Tangenten mit gehören, so liefern diese, wenn sie vorhanden sind, sofort die Potenzpunkte der Bündel, welche äusserer und innerer Aehnlichkeitspunkt heissen (auch wenn sie nicht durch die Tangenten zu finden sind). Die Construction der beiden Tripel und folglich der Aehnlichkeitspunkte ist immer elementar, ebenso die Construction des Orthogonal- und Diametralkreises der Bündel, die zu den Tripeln gehören.

In gleicher Weise können die Bündel $(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})_1$, $(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})_2$, $(\mathfrak{c}, \mathfrak{a})_1$, $(\mathfrak{c}, \mathfrak{a})_2$ leicht construirt werden, man bedarf aber nur der beiden ersten oder der beiden letzten. Um die Kreise zu finden, welche $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ zugleich berühren, hat man die Kreise des Büschels $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})_{\mu,\nu}$, welcher den Bündeln $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_\mu$, $(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})_\nu$ gemein ist, zu construiren und dann diejenigen Kreise derselben zu zeichnen, welche $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{c}$ berühren, wozu die Mittel früher gegeben sind. Jeder solcher Kreis berührt alle drei zugleich. Die Aufgabe ist also gelöst.

Die Potenzlinien der Büschel $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})_{\mu,\nu}$ gehen durch die Potenzpunkte der Bündel $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_\mu$, $(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})_\nu$, sind also die sogenannten Aehnlichkeitsaxen. Da es nun, wie wir sahen, nur einen solchen Büschel giebt und also auch nur vier Potenzlinien, so liegen die acht Aehnlichkeitspunkte auf einer Geraden, auf jeder liegen drei. Die vier Geraden $(a, b)_\mu$, $(b, c)_\nu$ gehen durch einen Punkt, den Pol der Kegelspitzenebene abc. Die vier Büschel $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_\mu$, $(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})_\nu$ haben einen gemeinsamen Kreis, den Orthogonalkreis zu $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$. Mithin gehen die Centralen der vier Büschel durch einen Punkt, den Mittelpunkt des Orthogonalkreises zu $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, welcher dem Pol der Ebene abc entspricht. Die Centralen sind also die Potenzlinien der Büschel $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, $(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$, $(\mathfrak{c}, \mathfrak{a})$. Auf jeder Centrale liegen zwei Mittelpunkte der acht unsere Aufgabe lösenden Kreise.

Nun untersuchen wir diejenige Schaarschaar $\mathfrak{F}$ von Kreisen, welche einen Kreis $\mathfrak{a}$ unter dem Winkel φ schneiden. Zieht man an $\mathfrak{a}$ eine Sehne, welche $\mathfrak{a}$ unter dem Winkel φ schneidet — es giebt durch jeden Punkt von $\mathfrak{a}$ zwei solcher Sehnen —, und zieht in dem einen Schnittpunkte derselben mit $\mathfrak{a}$ alle möglichen die Sehne dort berührenden Kreise, so schneiden diese $\mathfrak{a}$ sämmtlich unter dem Winkel φ. Zu jedem Punkte von $\mathfrak{a}$ giebt es also zwei $\mathfrak{F}$ angehörende Berührungsbüschel, denen Kugeltangenten im Raume entsprechen. Die $\mathfrak{F}$ entsprechende Fläche ist eine geradlinige, die Kugel im stereographischen Bilde α von $\mathfrak{a}$ berührende; durch jeden Berührungspunkt giebt es zwei Gerade der Fläche. Jeder Büschel hat mit $\mathfrak{F}$ zwei Kreise gemein, die natürlich auch imaginär sein können, d. h. deren Mittelpunkt imaginär sein kann. Wir begnügen uns,

dies für den Fall nachzuweisen, in welchem der Büschel reelle Doppelpunkte hat. — Wir schlagen um einen der Doppelpunkte des Büschels einen Kreis und bilden in Bezug auf diesen Kreis den Büschel und $\mathfrak{a}$ (kreisverwandt) ab. Aus dem Büschel wird ein Strahlenbüschel, das Bild von $\mathfrak{a}$ ist ein Kreis $\mathfrak{a}'$. Nun ist es evident, dass es nur zwei Strahlen des Büschels giebt, welche den Kreis $\mathfrak{a}'$ unter dem Winkel φ schneiden, oder keine. Folglich giebt es, weil die Abbildung conform ist, nur zwei Kreise des ursprünglichen Büschels, welche $\mathfrak{a}$ unter'm Winkel φ schneiden. Die Fläche F ist demnach vom zweiten Grade, ist ein K berührendes Rotationshyperboloid, die Schaarschaar $\mathfrak{F}$ ist ein Gebilde zweiten Grades, wie eine früher ausgeführte Anmerkung (auf S. 297) bestätigt. Fallen die beiden Doppelpunkte des Büschels zusammen und auf $\mathfrak{a}$, so liefert die angewandte kreisverwandte Abbildung ein Parallelstrahlenbüschel, dessen Strahlen $\mathfrak{a}'$ alle unter demselben Winkel schneiden. Der Büschel gehört dann $\mathfrak{F}$ ganz an. Uebrigens ist (man vergl. eine nachfolgende Bemerkung des Herrn Hossfeld) der Winkel φ das Complement des Winkels, welchen jede Erzeugende des Hyperboloids mit dem Berührungskreise α macht. Denn projicirt man eine Erzeugende G von n aus, so bestimmt die Projectionsebene auf K einen Kreis γ, der mit α denselben Winkel bildet als G, oder in Zeichen: es ist $\angle(\gamma, \alpha) = \angle(G, \alpha)$. Die Projection von γ in S ist aber eine $\mathfrak{a}$ unter dem Winkel (γ, α) schneidende Gerade $\mathfrak{g}$, welche die Centrale eines Büschels ist, dessen Kreise $\mathfrak{a}$ unter dem Winkel φ schneiden. Also ist $\varphi = \frac{1}{2}\pi - \angle(G, \alpha)$, w. z. b. w.

Eine beliebige Ebene E trifft F in einem Kegelschnitte, durch welchen sich ein oder im Allgemeinen zwei Berührungskegel legen lassen, denn der E und F gemeinsame Kegelschnitt berührt K in zwei Punkten. Mithin berühren die Kreise eines Büschels $\mathfrak{E}$, welche zugleich $\mathfrak{F}$ angehören, einen Kreis $\mathfrak{s}$ oder im Allgemeinen zwei Kreise. Und so ist es nicht schwer, die beiden Kreise eines Büschels zu construiren, welche den Kreis $\mathfrak{a}$ unter dem Winkel φ schneiden. Zu dem Büschel $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$ zeichnen wir zwei Orthogonalkreise $\mathfrak{o}_1$, $\mathfrak{o}_2$. Da man die Bündel $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, welche den Büschel bestimmen, nach dem Früheren immer so wählen kann, dass sie Orthogonalkreise besitzen, so darf man sich $\mathfrak{o}_1$, $\mathfrak{o}_2$ als die Orthogonalkreise von $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ denken. Um beliebig viele Kreise zu zeichnen, welche $\mathfrak{o}_1$ rechtwinklig und $\mathfrak{a}$ unter dem Winkel φ schneiden, ist nur der gemeinsame Kreis eines Berührungsbüschels und eines Bündels zu bestimmen, nämlich desjenigen Berührungsbüschels, der eine $\mathfrak{a}$ unter φ schneidende Sehne zur Potenzlinie und deren Punkt auf $\mathfrak{a}$ zum Punktkreise hat mit dem Bündel $\mathfrak{E}_1$. Drei oder genauer vier solcher Kreise bestimmen den Kreis $\mathfrak{s}$, dessen im Bündel $\mathfrak{E}_1$ enthaltene Berührungskreise $\mathfrak{a}$ sämmtlich unter dem Winkel φ schneiden. Die beiden Kreise des Büschels $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$, die $\mathfrak{s}$ berühren, deren Construction schon gegeben ist, sind die gesuchten.

Hiermit kann man zur Lösung der **Steiner**'schen Aufgabe schreiten: die acht Kreise zu construiren, welche die Kreise $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ bez. unter den gegebenen Winkeln φ, ψ, χ schneiden. Die Hyperboloide, welche den Kreisschaaren $(\mathfrak{a}, \varphi)$, $(\mathfrak{b}, \psi)$, $(\mathfrak{c}, \chi)$ entsprechen und die mit (a), (b), (c) bezeichnet werden können, schneiden sich in drei Ebenenpaaren $(a, b)_1$, $(a, b)_2$; $(b, c)_1$, $(b, c)_2$; $(c, a)_1$, $(c, a)_2$, von denen zwei Paare vier Gerade bestimmen, durch welche auch die letzten gehen. Diese vier Geraden bestimmen auf jedem der Hyperboloide acht Punkte, die aber dieselben für (a), (b), (c) sind. Die Kreise, welche den Schaarschaaren $(\mathfrak{a}, \varphi)$, $(\mathfrak{b}, \psi)$ zugleich angehören, liegen in zwei Bündeln. Es ist eine elementare Aufgabe, zwei Kreistripel zu zeichnen, welche die Bündel bestimmen. Ebenso bestimmt man die beiden Bündel, welchen die Kreise angehören, die den Schaarschaaren $(\mathfrak{b}, \psi)$, $(\mathfrak{c}, \chi)$ gemein sind. Die beiden Bündelpaare bestimmen die vier Büschel, in denen unsere Kreise zu suchen sind und deren Centralen beiläufig bemerkt durch einen Punkt gehen. Die Aufgabe, die Kreise eines Büschels zu bestimmen, welche einen Kreis unter gegebenem Winkel schneiden, ist aber bereits erledigt, und somit ist auch die vorliegende Aufgabe gelöst.

Von den Aehnlichkeitspunkten zweier Kreise ausgehende gerade Linien treffen die beiden Kreise unter **gleichen** Winkeln. Diejenigen Bündel, welche die Kreise enthalten, die zwei Kreise $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ unter gleichen Winkeln schneiden, haben daher **denselben** Potenzpunkt. Aber nicht blos dies, sondern sie sind überhaupt identisch, oder alle Kreise, welche zwei Kreise $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ unter gleichen Winkeln schneiden, liegen in einem oder vielmehr in zwei Bündeln, deren Potenzpunkte die Aehnlichkeitspunkte sind. Dies ergiebt sich aus der Bestimmung des Orthogonalkreises für ein gegebenes φ. Die Polare der Schnittlinie g der beiden Ebenen, welche durch die stereographischen Projectionen α, β auf K der Kreise $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ bestimmt wird, ist eine Gerade, welche durch die Punkte a, b im Raume geht, die $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ in S entsprechen. Der ihr entsprechende Büschel ist der Büschel $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$. Die Gerade g ist nun von φ unabhängig, jene Ebenen, in denen sich die $(\mathfrak{a}, \varphi)$, $(\mathfrak{b}, \varphi)$ entsprechenden Hyperboloide schneiden, gehen durch g hindurch. Die Gerade (a, b) enthält daher die Pole aller Ebenen durch g, aller Ebenen, in welchen sich die Hyperboloide schneiden. Der Büschel $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ enthält die Orthogonalkreise aller Bündel, welche die Kreise der Schaarschaar $(\mathfrak{a}, \varphi)$, $(\mathfrak{b}, \varphi)$ enthalten. Das Centrum der Orthogonalkreise ist bekannt, es ist einer der Aehnlichkeitspunkte. Alle einem Punkte concentrischen Kreise bilden ein Büschel, dieser Büschel kann mit dem Büschel $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, wenn er nicht mit ihm zusammenfällt, was ausgeschlossen ist, nur **einen** Kreis gemein haben, also ist der Orthogonalkreis unabhängig von φ völlig bestimmt und damit unser Satz erwiesen. Es folgt daraus noch, dass die Hyperboloide, welche $(\mathfrak{a}, \varphi)$, $(\mathfrak{b}, \varphi)$ entsprechen, sich in zwei von φ unab-

hängigen Ebenen schneiden, was schon in einer Anmerkung analytisch bewiesen wurde.

Die Ebenen, unter welchen sich die $(\mathfrak{a}, \varphi)$, $(\mathfrak{b}, \varphi)$, $(\mathfrak{c}, \varphi)$ entsprechenden Hyperboloide schneiden, und also die vier Geraden, durch welche immer je drei der Schnittebenen gehen, sind von φ unabhängig. Die Schnittpunkte der drei Hyperboloide bewegen sich auf diesen vier Geraden, wenn φ variirt. Die Kreise, welche $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ unter gleichen Winkeln schneiden, bilden vier Büschel, von denen mittels der Construction des Apollonischen Problems je zwei Kreise gefunden werden (und die offenbar den Orthogonalkreis zu $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ gemein haben), also bestimmt sind. Sucht man ebenso die vier Büschel, deren Kreise $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$ unter gleichen Winkeln schneiden, so führt die Aufgabe, die Kreise zu finden, welche $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ unter gleichen Winkeln schneiden, auf das Aufsuchen der gemeinsamen Kreise von je zwei Büscheln. Es giebt acht solcher Kreise, weil jeder der vier Büschel $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d})$ nur mit je zweien der Büschel $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ in demselben Bündel liegt.

Nun würde die Schaarschaar von Kreisen zu untersuchen sein, deren Individuen einen Kreis $\mathfrak{a}$ unter gleich grosser Sehne schneiden. Dies lässt sich auch so auffassen: Man ziehe alle Tangenten an einen Kreis $\mathfrak{s}$, welcher dem Kreise $\mathfrak{a}$ concentrisch ist. Die Tangenten betrachte man als Potenzlinien von Büscheln, welche die Schnittpunkte dieser Tangenten mit $\mathfrak{a}$ zu Doppelpunkten haben. Man wird daher etwas allgemeiner sein, wenn man darauf verzichtet, dass $\mathfrak{s}$ mit $\mathfrak{a}$ concentrisch sein soll.* Die Schaarschaar, welche offenbar den Kreis $\mathfrak{a}$ mit enthält und die mit $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{s}}$ bezeichnet werden mag, ist von der zweiten Ordnung. Die Kreise eines Büschels nämlich treffen $\mathfrak{a}$ in Punkten, deren Verbindungslinien durch einen Punkt $\mathfrak{m}$ gehen. Durch ihn giebt es zwei Tangenten an $\mathfrak{s}$; es giebt also in jedem Büschel zwei (reelle oder imaginäre) Kreise, welche zu $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{s}}$ gehören, wenn der Büschel nicht ganz in $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{s}}$ enthalten ist. Da jeder Büschel, welcher $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{s}}$ ganz angehört, den Kreis $\mathfrak{a}$ enthält, so ist die entsprechende Fläche ein Kegel mit der Spitze a, welche dem Kreise $\mathfrak{a}$ entspricht. Besitzen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{s}$ gemeinsame Tangenten, so giebt es unter den Erzeugenden des Kegels $F_{a,s}$, welcher dar Schaarschaar

---

* Sind X, Y laufende Coordinaten, so sind alle Kreise, welche den Kreis $\mathfrak{a}$ in den Punkten schneiden, welche durch die Tangenten an $\mathfrak{s}$ bestimmt werden, in der Gleichung enthalten

$$X^2+Y^2-2X\mathfrak{x}_a-2Y\mathfrak{y}_a+\mathfrak{p}_a-2\lambda((x-\mathfrak{x}_s)\cos\alpha+(y-\mathfrak{y}_s)\sin\alpha-\mathfrak{r}_s)=0,$$

worin α und λ willkürlich veränderlich sind. Die Coordinaten dieser Kreise erfüllen die Gleichungen

$$\mathfrak{x}=\mathfrak{x}_a+\lambda\cos\alpha,\quad \mathfrak{y}=\mathfrak{y}_a+\lambda\sin\alpha,\quad \mathfrak{p}=\mathfrak{p}_a+2\lambda\mathfrak{r}_s+2\lambda\mathfrak{x}_s\cos\alpha+2\lambda\mathfrak{y}_s\sin\alpha,$$

woraus folgt

$$\mathfrak{r}_s^2((\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_a)^2+(\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_a)^2)=(\tfrac{1}{2}(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_a)+\mathfrak{x}_s(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_a)+\mathfrak{y}_s(\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_a))^2.$$

$\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{s}}$ entspricht, solche, welche die Kugel berühren. Die Tangenten an $\mathfrak{s}$ gehören zu $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{s}}$, ihnen entsprechen Punkte der Ebene N, durch welche sich ein Berührungskegel an die Kugel legen lässt. Diese Kugel trifft $F_{\mathfrak{a},\mathfrak{s}}$ noch in einer zweiten ebenen Curve, folglich giebt es in $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{s}}$ Kreise, welche zugleich einem Bündel angehören und einen Kreis $\mathfrak{s}'$ berühren.

Ist $\mathfrak{s}$ mit $\mathfrak{a}$ concentrisch, so liegen die Punktkreise der in $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{s}}$ enthaltenen Büschel auf zwei (reellen oder imaginären) Kreisen, der Kegel $F_{\mathfrak{a},\mathfrak{s}}$ trifft die Kugel in ebenen Curven, in Kreisen. Trifft eine Tangente des Kreises $\mathfrak{s}$ $\mathfrak{a}$ nicht, so bestimmt sie gleichwohl als Potenzlinie mit $\mathfrak{a}$ den Büschel, welcher $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{s}}$ angehört.

Eine allgemeinere Schaarschaar von Kreisen, die einem Kegel entspricht, erhält man, wenn man von einem Bündel $\mathfrak{C}$ diejenigen Kreise $(\mathfrak{C}, \mathfrak{s})$ nimmt, die einen Kreis $\mathfrak{s}$ berühren, und durch die Schnittpunkte dieser Kreise mit $\mathfrak{a}$ Büschel legt oder, da diese den Kreis $\mathfrak{a}$ nicht reell zu schneiden brauchen, wenn man die Büschel construirt, welche durch den Kreis $\mathfrak{a}$ und je einen Kreis $(\mathfrak{C}, \mathfrak{s})$ bestimmt werden. Der Kreis $\mathfrak{a}$ ist allen Büscheln gemein, die entsprechende Fläche ein Kegel mit der Spitze a, der, wie sofort zu ersehen, vom zweiten Grade ist. Legen wir durch den Büschel $(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2)$ und den Kreis $\mathfrak{a}$ den Bündel $\mathfrak{C}'$, so entsprechen diejenigen Kreise dieses Bündels, welche $\mathfrak{s}$ berühren, im Raume einem Kegelschnitte, einem ebenen Schnitte des Berührungskegels $(\mathfrak{s})$. Unter diesen Kreisen giebt es also zwei, welche dem Bündel $(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2)$ angehören.

Alle Kreise in S, für welche zwei Gerade $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ einander conjugirt sind, liegen in einer Schaarschaar $\mathfrak{F}$, welcher ein Hyperboloid im Raume entspricht, das die Kugel K in einem Punkte berührt. Jeder Büschel $(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2)$ hat nämlich mit $\mathfrak{F}$ zwei Kreise gemein. Die Pole von $\mathfrak{G}$ in Bezug auf die Kreise des Büschels $(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2)$ liegen auf einem Kegelschnitte, und dieser hat zwei Punkte mit $\mathfrak{G}'$ gemein. Dieser Punkt bestimmt aber mit $\mathfrak{G}$ als Pol und Polare einen Kreis des Büschels $(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2)$, wenn nicht diese Elemente für jeden Kreis des Büschels Pol und Polare sind. Die Schaarschaar $\mathfrak{F}$ ist also vom zweiten Grade, die Fläche F, welche ihr entspricht, natürlich auch. Die beiden Berührungsbüschel, welche $\mathfrak{G}$ oder $\mathfrak{G}'$ zur Potenzlinie und den Schnitt von $\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$ zum Punktkreis haben, gehören zu $\mathfrak{F}$, es gehören also zu F zwei die Kugel in demselben Punkte berührende Gerade, F ist ein Hyperboloid und berührt die Kugel in dem dem Schnittpunkte von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ auf K stereographisch zugehörenden Punkte. Kreisbüschel mit reellen Doppelpunkten besitzen kein gemeinsames Polardreieck, wohl aber die Kreise eines Büschels mit imaginären Doppelpunkten. Die Ecken derselben sind der unendlich ferne Punkt der Potenzlinie und die beiden Punktkreise. Daraus folgt, dass alle zu

$\mathfrak{F}$ gehörenden Büschel Punktkreise haben, von denen der eine auf $\mathfrak{G}$, der andere auf $\mathfrak{G}'$ liegt und deren Verbindungslinie entweder auf $\mathfrak{G}$ oder auf $\mathfrak{G}'$ senkrecht steht, entsprechend den beiden Schaaren Erzeugender des Hyperboloids. Jede Erzeugende des Hyperboloids trifft die Kugel.

Gleitet eine Gerade H über drei Gerade G_1, G_2, G_3, die die Kugel K nicht treffen mögen und sich nicht schneiden, so erzeugt sie ein Hyperboloid. Die Doppelpunkte der entsprechenden Kreisschaarschaar in S liegen auf einer Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten, weil die polare Fläche des Hyperboloids wieder ein Hyperboloid ist, und es geht diese Curve durch die Doppelpunkte der G_1, G_2, G_3 entsprechenden Büschel. Mithin liegen alle Punktepaare, welche mit drei gegebenen Punktepaaren je ein Kreisviereck bilden, auf einer Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten, auf welcher die drei gegebenen Punktepaare auch liegen, obschon sie nicht Paare sind, die mit den beiden anderen Kreisvierecke bilden. Projicirt man das Polarhyperboloid von n aus, so projiciren sich die Erzeugenden auf die Tangenten eines Kegelschnittes. Mithin umhüllen die Verbindungslinien aller Punktepaare, welche mit drei Punktepaaren Kreisvierecke bilden, einen Kegelschnitt.

Hieran knüpft sich die Lösung der Aufgabe: Diejenigen beiden Punktepaare zu bestimmen, welche mit vier Punktepaaren je ein Kreisviereck bilden. — Die Büschel, welche die vier festen Punktepaare zu Doppelpunkten haben, seien $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3$, denen die Geraden G, G_1, G_2, G_3 im Raume entsprechen. Die Doppelpunkte eines Büschels $\mathfrak{H}$, dem die Gerade H im Raume entspricht, seien noch willkürlich. Hat nun der Büschel $\mathfrak{H}$ mit den Büscheln $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3$ je einen Kreis gemein, so bilden alle solche Büschel eine Schaarschaar $\mathfrak{F}$ vom zweiten Grade. Der Büschel $\mathfrak{G}$ hat mit $\mathfrak{F}$ zwei Kreise gemein, und ein Büschel $\mathfrak{H}$, welcher einen von diesen und je einen Kreis von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ enthält, enthält auch einen Kreis des Büschels $\mathfrak{G}_3$. Haben die Büschel $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3$ reelle Doppelpunkte, so liegen die Doppelpunkte des so bestimmten Büschels $\mathfrak{H}$, wenn solche vorhanden sind, allemal mit den gegebenen vier Paaren je in einem Kreisviereck.

Legen wir durch G_1, G_2 Ebenen, welche sich in G_3 schneiden, und legen wir analog durch $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ Bündel, die einen Kreis mit $\mathfrak{G}_3$ gemein haben, so bestimmen bez. die Ebenen auf der Geraden G und die Bündel durch ihre gemeinsamen Kreise mit $\mathfrak{G}$ projectivische Gebilde, und zwar sind die Mittelpunkte der hierdurch bestimmten Kreispaare von $\mathfrak{G}$ projectivische Gebilde. Auf $\mathfrak{G}$ nun sind die sich selbst entsprechenden Punkte der projectivischen Gebilde die, welche F angehören, auf $\mathfrak{G}$ sind die sich selbst entsprechenden Kreise diejenigen, welche $\mathfrak{F}$ angehören. Da sie durch ihre Mittelpunkte bestimmt sind, so hat man nur die sich

selbst entsprechenden Mittelpunkte zu bestimmen, was durch eine elementare Construction mit Hilfe von Zirkel und Lineal ausführbar ist. Der Schnitt der beiden Bündel, welche durch einen dieser Kreise und die Büschel $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ erzeugt werden, ist derjenige Büschel $\mathfrak{H}$, welcher mit allen vier Büscheln $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3$ einen Kreis gemein hat, und wenn $\mathfrak{H}$ Doppelpunkte hat, so bilden sie dasjenige Paar von Punkten, welches mit jedem der vier durch $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3$ gegebenen Paare ein Kreisviereck bildet. Da es auf $\mathfrak{G}$ zwei sich selbst entsprechende Kreise giebt, so giebt es zwei Büschel $\mathfrak{H}$ und also zwei Paare von Punkten, welche der Aufgabe entsprechen.

In nachfolgender Mittheilung giebt Herr C. Hossfeld noch eine Anwendung des hier aufgestellten Abbildungsprincips.

Kleinere Mittheilungen.

XIX. Ueber die mit der Lösung einer Steiner'schen Aufgabe zusammenhängende Configuration $(12_6, 16_3)$.

Eine Fläche zweiten Grades F werde von vier Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ in vier Kegelschnitten getroffen; wir betrachten die vier Flächenbüschel zweiten Grades $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$, welche durch sämmtliche längs jener Kegelschnitte die Fläche F berührenden Flächen zweiten Grades gebildet werden. In jedem der vier Büschel ist F enthalten, ferner je ein Kegel und je eine Doppelebene. Bezieht man nun die vier Flächenbüschel derart projectivisch auf einander, dass der Fläche F, sowie den Doppelebenen in allen vier Büscheln derselbe Parameterwerth zukommt, so zerfällt das Erzeugniss von je zwei Flächenbüscheln

$$\Phi_1\Phi_2,\quad \Phi_1\Phi_3,\quad \Phi_1\Phi_4,\quad \Phi_2\Phi_3,\quad \Phi_2\Phi_4,\quad \Phi_3\Phi_4$$

— die Fläche vierter Ordnung — in die Fläche F und in zwei Ebenen; lässt man erstere, welche bei allen sechs Combinationen auftritt, unberücksichtigt, so erhalten wir sechs Ebenenpaare oder **zwölf Ebenen**.

Je drei Flächenbüschel

$$\Phi_1\Phi_2\Phi_3,\quad \Phi_1\Phi_2\Phi_4,\quad \Phi_1\Phi_3\Phi_4,\quad \Phi_2\Phi_3\Phi_4$$

erzeugen den Schnitt zweier Ebenenpaare, d. h. vier gerade durch einen Punkt gehende Linien; wir haben also vier mal vier durch einen Punkt gehende Gerade, d. h. **sechzehn Gerade**. Jede derselben enthält drei jener zwölf Ebenen.

Sämmtliche vier Flächenbüschel

$$\Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_4$$

erzeugen den Schnitt zweier Strahlenquadrupel, welche z. B. durch

$$\Phi_1\Phi_2\Phi_3 \text{ und } \Phi_2\Phi_3\Phi_4$$

bestimmt werden und die in den beiden Ebenen, den Erzeugnissen von $\Phi_2\Phi_3$, gelegen sind, d. h. **acht Punkte**. Zu vieren liegen dieselben in den gefundenen zwölf Ebenen, zu zweien in den 16 Geraden; fügt man ihnen noch die vier Mittelpunkte der vier Strahlenquadrupel bei, so erhält man **zwölf** Punkte, welche zu sechs in jenen zwölf Ebenen liegen, die ihrerseits zu sechs durch die zwölf Punkte hindurchgehen; welche ferner zu dreien in jenen 16 Geraden liegen, die ihrerseits je drei der zwölf Ebenen enthalten, mit einem Worte: man hat die **Hexaederconfiguration** $(12_6, 16_3)$ des Herrn **Reye**, welche neuerdings wieder

mehrfach Gegenstand der mathematischen Untersuchung geworden ist (C. Stephanos, Bulletin des sciences mathématiques, 2ième série, t. III, 1879, und Reye, Acta mathematica, Bd. I Heft 2 S. 97).

Ersetzt man die Fläche F durch eine Kugel K und bestimmt ferner, dass auch die in den Flächenbüscheln auftretenden Kegel sich entsprechen sollen, so bilden jetzt die (reellen oder imaginären) Erzeugenden von je vier in den Büscheln sich entsprechenden Flächen mit den bez. Berührungskreisen gleiche Winkel.

Bildet man nun mit Hilfe der im vorstehenden Aufsatze von Herrn Hofrath Thomae dargestellten Abbildungsart das Erzeugniss der vier Flächenbüschel auf das ebene Kreissystem ab, so erhalten wir eine ebene Configuration $(12_6, 16_3)$, in welcher die Elemente der Kreis, das Kreisbüschel und das Kreisbündel sind. Mit Hilfe des leicht zu erweisenden Satzes, dass Flächen, deren Erzeugende mit den bez. Berührungskreisen k gleiche Winkel bilden, solche Kreise in der Ebene entsprechen, welche die stereographische Projection von k unter einerlei Winkel schneiden, erkennt man, dass von den zwölf Configurationskreisen der Configuration $(12_6, 16_3)$ acht die stereographische Projection der vier Berührungskreise unter einerlei Winkel treffen, die übrigen vier aber je drei derselben orthogonal schneiden. Wir haben also den Satz:

Die acht Kreise, welche vier gegebene Kreise unter einerlei Winkel schneiden, bilden in Gemeinschaft mit den vier Kreisen, welche je drei der gegebenen orthogonal schneiden, eine Kreisconfiguration $(12_6, 16_3)$, d. h. die zwölf Kreise liegen zu sechs in zwölf Kreisbündeln, welche zu sechs jene zwölf Kreise gemeinschaftlich haben; sie liegen zu drei in 16 Kreisbüscheln, von denen jedes drei der zwölf Kreisbündel enthält.

Jena. Dr. C. Hossfeld.

XX. Ueber die Verallgemeinerung des Pythagoräischen Lehrsatzes und des Satzes über die Lunulae Hippokratis.

(Hierzu Taf. VIII Fig. 1.)

Zieht man in einem beliebigen Dreieck abc eine Transversale cd von willkürlicher Richtung, so zerfällt das Hauptdreieck abc in zwei Theildreiecke acd und bcd. Nun kann man (vergl. Reye, Die Geometrie der Lage, Vortr. 7, II. Thl.) folgendermassen die drei Dreiecke auf einander affin beziehen:

$$\text{affin}\left\{\begin{matrix} abc & abc & cbd \\ cbd & acd & acd. \end{matrix}\right.$$

Die homologen Theile stehen senkrecht unter einander. Durch diese Anordnung sind das Hauptdreieck und je eines der Theildreiecke in folgender Weise affin auf einander bezogen:

Im Hauptdreieck und je einem Theildreieck entsprechen als gemeinsame Punkte ihrer affinen Systeme die Scheitelpunkte ihrer gemeinsamen Winkel. Da beide Theildreiecke dem Hauptdreieck affin sind, so sind sie auch unter sich affin und lässt sich die Affinitätsbeziehung derselben in folgender Weise ausdrücken:

Der den affinen Systemen der Theildreiecke gemeinsam entsprechende Punkt d ist derjenige, in welchem die von der Spitze gezogene Transversale die Grundlinie schneidet.

Durch diese Bestimmungen, welche die Affinitätsbeziehungen der Dreiecke festsetzen, sind alle Punkte der Ebene auf folgende Art affin auf einander bezogen:

Bezeichnen wir einen Punkt als zum Dreieck abc gehörig mit p_3, so entsprechen ihm zwei andere affin zugeordnete Punkte p_1 und p_2, von denen p_1 als zu acd gehörig, p_2 als zu bcd gehörig anzusehen ist.

Denken wir uns nun p_3 beweglich, so werden, wenn p_3 eine geschlossene Figur F_3 beschreibt, die Punkte p_1 und p_2 entsprechende Figuren F_1 und F_2 beschreiben, welche affin F_3, also auch affin unter einander sind. Ausserdem existirt unter diesen Figuren noch folgende Beziehung:

$$F_3 = F_1 + F_2.$$

Beweis. Wir wenden den in Reye im 7. Vortrag des II. Theiles abgeleiteten Satz an:

„In affinen ebenen Systemen stehen je zwei einander entsprechende Figuren in constantem Verhältniss zu einander."

Wir bezeichnen nun das zu abc gehörige System mit seinen Figuren als System III; diesem entspricht alsdann das zu cbd gehörige System II und das zu acd gehörige System I.

Einer beliebigen geschlossenen Figur F_3, die zu abc im System III gehört, entsprechen die Figuren F_2 im System II und F_1 im System I.

Bezeichnet man nun den Inhalt des Dreiecks abc und den der übrigen entsprechend durch (abc), so ist nach dem angeführten Satze offenbar

$$\frac{F_1}{F_3} = \frac{(acd)}{(abc)};$$

denn dem Dreieck acd im System I entspricht das Dreieck abc im System III. Aus gleichem Grunde ist

$$\frac{F_2}{F_3} = \frac{(cbd)}{(abc)},$$

da dem Dreieck cbd im System II das Dreieck abc im System III entspricht. Durch Addition der Gleichungen

$$\frac{F_1}{F_3} = \frac{(acd)}{(abc)}$$

$$\frac{F_2}{F_3} = \frac{(cbd)}{(abc)}$$

ergiebt sich

$$\frac{F_1 + F_2}{F_3} = \frac{(acd) + (cbd)}{(abc)}.$$

Aber auf der rechten Seite dieser Gleichung ist der Zähler gleich dem Nenner, da nach der Figur $(acd)+(cbd)=(abc)$ ist.

Der Werth der Brüche ist $=1$, also

$$\frac{F_1+F_2}{F_3}=1, \quad \text{d. h.} \quad F_3=F_1+F_2.$$

Diesen Satz kann man als den durch die höhere Geometrie verallgemeinerten Pythagoräischen Lehrsatz ansehen und kann demselben folgenden Wortlaut geben:

Man ziehe in einem Dreieck, dem Hauptdreieck, eine Transversale von der Spitze auf die gegenüberliegende Grundlinie. Hierdurch zerfällt das Hauptdreieck in zwei Theildreiecke. Nun beziehe man das Hauptdreieck affin auf jedes der Theildreiecke und zwar derartig, dass im Hauptdreieck und je einem der Theildreiecke die Scheitelpunkte der gemeinsamen Winkel zugleich diejenigen Punkte bilden, welche in beiden affinen Systemen einander gemeinsam entsprechen.

Zieht man nun eine beliebige geschlossene Figur F_3, betrachtet dieselbe als zum System des Hauptdreiecks gehörig, construirt nach den festgesetzten Beziehungen dann die zu den beiden anderen Systemen der Theildreiecke gehörenden Figuren, bezeichnet dieselben mit F_1 und F_2, so ist

$$F_3=F_1+F_2.$$

Aus dieser Verallgemeinerung des Pythagoräischen Lehrsatzes erhalten wir die bekannte Form desselben, indem wir folgende Specialisirungen annehmen.

Wir legen ein rechtwinkliges Dreieck abc zu Grunde, in welchem die Transversale cd senkrecht zur Grundlinie ab steht. Hierdurch werden das Hauptdreieck und die Theildreiecke unter einander ähnlich, also werden auch unter einander die Figuren F_1, F_2 und F_3 ähnlich, zwischen denen die Beziehung bestehen bleibt

$$F_3=F_1+F_2.$$

Nehmen wir an, F_3 sei das über der Hypotenuse errichtete Quadrat, so werden F_1 und F_2 die über den Katheten errichteten Quadrate sein, wodurch sich die bekannte Form des Pythagoräischen Lehrsatzes ergiebt.

Die soeben gefundene Verallgemeinerung setzt uns nun in den Stand, auch dem bekannten Satze über die Lunulae Hyppokratis eine allgemeinere Form zu geben.

Kehren wir wieder zum Dreieck abc und seinen affinen Theildreiecken acb, cbd zurück. Durch die verlängerten Seiten ac, bc einerseits, durch die Grundlinie ab und die Transversale cd andererseits wird auf der unendlich fernen Geraden der Ebene des Dreiecks abc eine gewisse elliptische Involution J bestimmt. Nun ist ein Kegelschnitt bestimmt durch drei Punkte und die Involution auf einer Geraden. Demnach können wir construiren

1. eine Ellipse E_3, bestimmt durch abc und J,
2. „ „ E_1, „ „ acd „ J,
3. „ „ E_2, „ „ bcd „ J.

Da die Involution J auf der unendlich fernen Geraden liegt, so wird ab Durchmesser von E_3, ac Durchmesser von E_1, cb Durchmesser von E_2.

Diese drei Ellipsen sind ein specieller Fall der Flächen F_1, F_2, F_3, also ist

$$E_3 = E_1 + E_2.$$

Also sind auch die halben Flächentheile durch die Beziehung verbunden, dass

$$\frac{E_3}{2} = \frac{E_1}{2} + \frac{E_2}{2}$$

ist. Jetzt suchen wir die Hälften der Ellipsen derartig aus, dass

$$\frac{E_3}{2} = aecfba, \quad \frac{E_1}{2} = agca, \quad \frac{E_2}{2} = chbc$$

ist. Dann ist also

$$1) \qquad aecfba = agca + chbc,$$

$$2) \qquad aeca + cfbc = aeca + cfbc.$$

Ziehen wir von der oberen Gleichung die untere ab, d. h. die Summe der Segmente $aeca + cfbc$, so erhalten wir

$$aecfba - (aeca + cfbc) = agca + chbc - aeca - cfbc$$

oder

$$abc = (agca - aeca) + (chbc - cfbc),$$

d. h.

$$abc = S_1 + S_2.$$

Hier bedeutet S_1 die Mondsichel $aecga$ und S_2 die Mondsichel $chbfc$.

Somit haben wir zwei von elliptischen Bogenstücken begrenzte Mondsicheln construirt, deren Flächeninhalt zusammen gleich dem Flächeninhalt eines Dreiecks ist.

Demnach kann man den Satz über die Lunulae Hippokratis in folgender Weise verallgemeinern:

Zieht man in einem Dreieck abc eine Transversale cd, so bestimmen die verlängerten Seitenpaare ac, bc einerseits, ferner die verlängerte Seite ab und die Transversale cd andererseits durch ihre Schnittpunkte mit der unendlich fernen Geraden auf derselben eine elliptische Involution J. Construirt man nun über den drei Seiten des Dreiecks abc als Durchmesser diejenigen Ellipsen, welche auf der unendlich fernen Geraden die eben bestimmte Involution J induciren, so ist der Flächeninhalt des sich bildenden Paares der elliptischen Mondsicheln $S_1 + S_2$ gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks abc. Diese drei Ellipsen bilden ein Tripel; der eine Schnittpunkt der drei Ellipsen ist der Punkt c; die anderen Schnittpunkte von je zwei Ellipsen sind a, d, b. Da die drei Ellipsen

auf der unendlich fernen Geraden dieselbe Involution induciren, so sind sie unter einander ähnlich und sind ihre homologen Axen parallel.

Aus diesem Satze erhält man die bekannte Form des Satzes über die Lunulae Hippokratis durch folgende Specialisirungen.

Ist das Dreieck abc ein rechtwinkliges und wählt man zur Transversale die Höhe cd, so wird die Involution J durch diese Annahme zur Circularinvolution auf der unendlich fernen Geraden.

Das Ellipsentripel geht in ein Kreistripel über, die elliptischen Mondsicheln in zwei kreisförmige und es bleibt die Beziehung bestehen

$$S_1 + S_2 = (abc).$$

Schliesslich sei noch auf folgenden Umstand hingewiesen. Legt man ein beliebiges Dreieck abc und eine beliebige Transversale cd zu Grunde, so nimmt cd unendlich viele Lagen an, wenn man sich cd continuirlich um c von der Grenzlage ca bis zur Grenzlage cb drehen lässt. Jeder einzelnen Lage entspricht dann eine bestimmte Involution J auf der unendlich fernen Geraden und ein bestimmtes Ellipsentripel, welches ein bestimmtes Mondsichelpaar entstehen lässt, dessen Inhalt gleich dem Dreieck abc ist.

Da wir aber durch die Wahl der Lage der Transversale unendlich viele Involutionen J annehmen können, so erhalten wir auch unendlich viele Ellipsentripel. Mithin erhalten wir auch eine unendliche Anzahl von Mondsichelpaaren, die alle gleich dem Inhalt des Dreiecks abc, also auch unter einander gleich sind.

Soest. Dr. Paul Schönemann.

XXI. Zur Construction der Wendepunkte.

(Hierzu Taf. VIII Fig. 2 u. 3.)

Ist M das Momentancentrum irgend einer Bewegung eines starren ebenen Systems in seiner Ebene (Fig. 2), P ein beliebiger Systempunkt und K der Krümmungsmittelpunkt der Bahn, welche P momentan beschreibt, endlich W der Wendepunkt auf dem Strahl MP, d. i. der Punkt, dessen Bahn ihren Krümmungsmittelpunkt augenblicklich im Unendlichen hat, so besteht zwischen den vier Punkten ein Zusammenhang, welcher durch die Gleichung

$$\overline{PW}.\overline{KP} = \overline{MP}^2$$

(vergl. u. A. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, 2. Aufl., 1. Thl. S. 462) dargestellt wird. Auf Grund dieser Beziehung lässt sich der Punkt W finden, falls M, P und K gegeben sind, und zwar mittels folgender Linealconstruction. Man lege durch P irgend einen Strahl g, verbinde einen beliebigen Punkt A desselben mit M und K, ziehe ferner durch M einen Strahl parallel zu AK, welcher g im Punkte B schneiden

mag, dann trifft die Gerade, welche durch B parallel zu MA gelegt wird, den Strahl MP in dem Wendepunkte W. Die Richtigkeit der Construction wird ersichtlich, wenn man beachtet, dass

$$\triangle MPB \sim \triangle KPA \text{ und } \triangle MPA \sim \triangle WPB$$

ist; denn es verhält sich

$$MP:PK = PB:PA$$
$$= PW:MP,$$

woraus die Relation

$$\overline{PW}.\overline{KP} = \overline{MP}^2$$

hervorgeht. Mittels der ganz gleichen Construction lässt sich K finden, wenn ausser M P und W gegeben sind. Soll dagegen P aus M, K und W ermittelt werden, so lege man durch M zwei beliebige Strahlen MA und MB, ziehe durch W einen Parallelstrahl WB zu MA, ferner durch K einen Parallelstrahl KA zu MB, und verbinde die Schnittpunkte A und B durch eine Gerade g, so schneidet diese auf MK denjenigen Systempunkt P aus, dessen Bahn K momentan zum Krümmungsmittelpunkt hat.

Die hier gegebene Linealconstruction des Wendepunktes, welche meines Wissens bisher noch nicht mitgetheilt worden ist, hat neben ihrer Einfachheit den Vorzug, dass zwei der zur Construction nöthigen Strahlen willkürlich gewählt werden dürfen. Aus dem letzteren Umstande vermag man in manchen Fällen, besonders hinsichtlich der Beweise einiger Sätze über die Bewegung des ebenen Systems, Vortheil zu ziehen und dies soll im Folgenden noch dargethan werden.

Die Bewegung des ebenen Systems wird gewöhnlich bestimmt durch die Bahnen (a_1) und (a_2) zweier Systempunkte P_1 und P_2 (Fig. 3). Ist die Bewegung durch die Enveloppen zweier Systemcurven gegeben, so treten bekanntlich die Krümmungsmittelpunkte der Systemcurven in den Berührungsnormalen an die Stelle der Punkte P_1 und P_2; im Uebrigen werden jedoch die folgenden Betrachtungen hierdurch nicht modificirt. Um die Wendepunkte W_1 und W_2 auf den augenblicklichen Bahnnormalen MP_1 und MP_2 zu ermitteln, benutzen wir in Anwendung der entwickelten Construction als den einen willkürlichen Strahl g die Systemgerade P_1P_2, und als den zweiten durch die Krümmungsmittelpunkte K_1, beziehungsweise K_2 zu legenden willkürlichen Strahl die Verbindungslinie K_1K_2, welche P_1P_2 in N schneidet. Legen wir nun durch das Momentancentrum M zu K_1K_2 eine parallele Gerade, und durch den Schnittpunkt A der letzteren mit P_1P_2 einen Strahl parallel zu MN, so trifft dieser die Bahnnormalen in den Wendepunkten W_1 und W_2. Diese sehr einfache Construction der beiden Wendepunkte macht zugleich ersichtlich, dass die Verbindungslinie W_1W_2 der Wendepunkte parallel zur Geraden MN ist.*

---

* Vergl. Aronhold, Kinematische Mittheilungen, Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen. Berlin 1872. S. 149.

Errichtet man in W_1 und W_2 Senkrechte zu MW_1, bez. MW_2, so schneiden sich diese im Wendepol W_0, durch welchen Punkt die Lage der Polbahnnormalen und folglich auch der Polbahntangente MT bestimmt wird. Da nun

$$\angle W_1 M T = \angle M W_2 W_1$$

als Peripheriewinkel im Wendekreise über derselben Sehne MW_1, und ferner

$$\angle W_1 W_2 M = \angle W_2 M N,$$

weil $W_1 W_2 \parallel MN$, so ist folglich

$$\angle TMW_1 = \angle NMW_2.$$

Aus dieser Beziehung folgt sofort eine sehr einfache Construction der Polbahntangente, welche zuerst von Bobillier* gegeben worden ist. Aronhold (ibid. S. 144) nennt sie deshalb die Bobillier'sche Construction.

Eine weitere einfache Beziehung, vermittelst welcher man die Wendepunkte W_1 und W_2 zu construiren vermag, wenn das Momentancentrum M ausserhalb des Zeichnungsraumes liegt, dagegen N innerhalb desselben, erhält man durch folgende Erwägung. Legt man durch N eine Parallele zu K_1P_1, welche K_2P_2 im Punkte C trifft, und durch C eine Parallele zu MN, so ist die Strecke CD gleich und parallel MN; andererseits ist aber auch AB gleich und parallel MN, woraus hervorgeht, dass die vier Punkte $ABCD$ ein Parallelogramm bilden. Dieser Umstand ist deshalb von Werth, weil die Punkte W' und W'', in denen die Gerade CD die Strahlen NK_1 und NP_1 trifft, die Wendepunkte der Relativbewegung des mit der Geraden K_2P_2 verbundenen starren Systems gegenüber dem durch K_1P_1 repräsentirten System sind, wie die Entstehungsart dieser Punkte direct ersichtlich macht; da man nun diese Punkte W' und W'' auch ohne Benutzung der Geraden NM zu finden vermag, indem man diese Punkte einzeln mittels der vorher gegebenen Construction aufsucht, so kann man sofort CD ermitteln. Hat man aber CD, so findet sich z. B. A, indem man $W'A' = CD$ macht und $A'A$ parallel zu K_1K_2 zieht. Die durch A zu $W'W''$ parallel gelegte Gerade enthält dann die Wendepunkte W_1 und W_2.

Denkt man sich die vier Punkte $K_1K_2P_2P_1$ in dieser Aufeinanderfolge durch vier starre Linien derart verbunden, dass das entstehende Viereck beweglich bleibt, so erhält man ein sogenanntes Gelenkviereck oder Gliedervierseit. Wie die eben angestellten Erörterungen erkennen lassen, besteht der einfache Zusammenhang zwischen den vier Wendepunkten der Momentanbewegungen zweier zusammenstossender Glieder des Gelenkvierecks darin, dass die Verbindungslinien der Wendepunkte

* Cours de géométrie, 12me édition, pag. 232.

auf den Gegenseiten die anderen Gegenseiten in den Ecken eines Parallelogramms schneiden.

Zürich. MARTIN GRÜBLER, Privatdocent.

XXII. Ueber die zusammengesetzte Centripetalbeschleunigung.

(Hierzu Taf. VIII Fig. 4 u. 5.)

Coriolis* hat bezüglich der Beschleunigung der Relativbewegung eines Punktes gegen ein sich bewegendes räumliches System auf analytischem Wege einen Satz bewiesen, der sich in der folgenden wenig veränderten Gestalt aussprechen lässt.

Bewegt sich ein Punkt gegen ein räumliches starres System, welches selbst wieder eine Bewegung im ruhenden Raume besitzt, so ist die Beschleunigung der absoluten Bewegung des Punktes die Resultirende aus folgenden drei Beschleunigungen: 1. der Beschleunigung des Systempunktes, mit welchem der bewegliche Punkt momentan zusammenfällt; 2. der Beschleunigung der Relativbewegung des Punktes gegen das System; 3. der sogenannten zusammengesetzten Centripetalbeschleunigung, deren Grösse durch den Ausdruck $2\omega . w_r . \sin\alpha$ bestimmt wird und welche senkrecht zu einer durch w_r gehenden, zur Momentanaxe parallelen Ebene, gleichsinnig mit ω, gerichtet ist. Dabei bezeichnet in letzterem Ausdrucke ω die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher das System um die Momentanaxe rotirt, w_r die Geschwindigkeit der relativen Bewegung des Punktes gegen das System und α den Winkel, welchen diese Geschwindigkeit mit der Momentanaxe einschliesst.

Dieser Satz gestattet eine sehr einfache und durchsichtige Herleitung, welche das Vorhandensein der zusammengesetzten Centripetalbeschleunigung schon in den bekannten Ausdrücken für die Beschleunigungscomponenten in Cylindercoordinaten erkennen lässt. Da auf diese Ableitung meines Wissens bisher noch nicht aufmerksam gemacht worden ist, so soll sie im Folgenden mitgetheilt werden. Dieselbe stützt sich auf die nachstehenden Erörterungen.

Die Bewegung eines Punktes werde durch Cylindercoordinaten ϱ, φ, z auf ein Axensystem bezogen, so dass, wenn x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten dieses Punktes sind,

$$x = \varrho \cos\varphi, \quad y = \varrho \sin\varphi$$

(Fig. 4) zu setzen ist; für die drei Beschleunigungscomponenten in der Richtung von ϱ, ferner senkrecht zur Ebene durch den Punkt und die Z-Axe und endlich in der Richtung der letztern ergeben sich dann bekanntlich die Ausdrücke

---

* Mémoire sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps. Journal de l'école polytechnique, cah. XXIV pag. 142.

$$p_\varrho = -\varrho\cdot\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{d^2\varrho}{dt^2},$$

$$p_n = \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{d}{dt}\left(\varrho^2\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right) = 2\cdot\frac{d\varrho}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt} + \varrho\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

$$p_z = \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Wenden wir dieselben auf die Bewegung eines Punktes an, welche dadurch zu Stande kommt, dass der Punkt in relativer Bewegung auf einer starren Curve, die mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Z-Axe rotirt, begriffen ist, und setzen wir hierbei voraus, dass die Curve die Z-Axe schneide und der bewegliche Punkt momentan in diesem Schnittpunkte sich befinde, so erhalten wir, weil dann $\varrho = 0$ und $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ zu setzen ist, specieller

$$p_\varrho = \frac{d^2\varrho}{dt^2}, \quad p_n = 2\omega\frac{d\varrho}{dt}, \quad p_z = \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Die beiden Grössen p_ϱ und p_z sind aber die Componenten der Beschleunigung p_r der Relativbewegung des Punktes auf der Curve, denn sie bleiben ungeändert, wenn die Curve nicht rotirt, also $\omega = 0$ ist; es tritt folglich wegen der Rotation der Curve zu p_r noch die Beschleunigung p_n. Ist w_r die Geschwindigkeit der Relativbewegung des Punktes und α der Winkel, welchen w_r mit der Z-Axe einschliesst, so sind die beiden Componenten von w_r in der Richtung der Z-Axe und senkrecht zu ihr

$$\frac{dz}{dt} = w_r \cos\alpha, \quad \frac{d\varrho}{dt} = w_r \sin\alpha;$$

demnach erhält man

$$p_n = 2\omega w_r \sin\alpha.$$

Bei der Rotation der Curve ändert die in der Z-Axe liegende Geschwindigkeitscomponente $\frac{dz}{dt}$ ihre Lage nicht, sondern nur $\frac{d\varrho}{dt}$; es entspricht folglich der Richtungsänderung der Componente $\frac{d\varrho}{dt} = w_r \sin\alpha$ die Beschleunigung p_n, welche den vorstehenden Werth besitzt und, wie sofort ersichtlich, senkrecht zu der durch w_r und die Z-Axe bestimmten Ebene, gleichsinnig mit ω gerichtet ist.

Wenden wir uns nunmehr zur Herleitung des vorausgeschickten Satzes von Coriolis. Es sei (c_r) (Fig. 5) die Bahncurve der Relativbewegung des Punktes P gegen das sich bewegende räumliche System; durch die momentane Lage dieser Curve ist, falls letztere keine Gerade, zugleich die des Systems bestimmt. Auf Grund des Satzes, dass jede unendlich kleine Bewegung eines starren räumlichen Systems in eine beliebig gerichtete Translation und in eine Rotation um eine zur Momentanaxe parallele Axe zerlegt werden kann, bringen wir die Curve (c_r) in

die unendlich benachbarte Lage (c''_r), indem wir die Curve parallel zu sich in der Richtung der absoluten Geschwindigkeit w_s eines beliebigen ihrer Punkte, z. B. S, verschieben, wodurch die Curve zunächst in die Lage (c'_r) und der Punkt S nach S' gelangt; eine unendlich kleine Rotation, welche um die zur Momentanaxe parallelen durch S' gehenden Geraden ZZ und zwar mit der momentanen Winkelgeschwindigkeit ω des Systems zu erfolgen hat, bringt dann die Curve (c'_r) in die neue Lage (c''_r), womit zugleich das System selbst in seine unendlich benachbarte Lage übergeführt ist. Zerlegen wir nun das Bahnelement PP'' der absoluten Bewegung des Punktes P entsprechend der erwähnten Zerlegung der Systembewegung in die beiden Componenten PP' und $P'P''$, und setzen wir voraus, dass S derjenige Systempunkt sei, in welchem sich P augenblicklich befindet, so ist zufolge eines bekannten elementaren Satzes die totale Beschleunigung des Punktes P die Resultirende aus der Beschleunigung des Systempunktes S und aus der Beschleunigung, welche der Bewegung des Punktes von P' nach P'', also während der Rotation des Systems, entspricht. Diese letztere Bewegung stimmt aber völlig überein mit der vorher behandelten speciellen Relativbewegung eines Punktes auf einer rotirenden Curve, da sich hier der bewegliche Punkt P in S', also auf der Rotationsaxe befindet; es entspricht folglich der Bewegung des Punktes P von P' nach P'' eine Beschleunigung, welche die Resultirende aus der Beschleunigung p_r der Relativbewegung und der zusammengesetzten Centripetalbeschleunigung p_n ist. Da die Grösse und Richtung von p_n sich hier in derselben Weise bestimmt, wie vorher angegeben, so ist damit der Satz von Coriolis bewiesen.

Zürich. MARTIN GRÜBLER, Privatdocent.

XXIII. Die Berechnung der Rententafeln aus Sterblichkeits- und Invaliditätsbeobachtungen.

Schon Wittstein* hat wiederholt darauf hingewiesen, dass die Absterbeordnungen nicht als das eigentliche Ziel der Sterblichkeitsstatistik angesehen zu werden verdienen, dass sie zwar eine populäre Form sind, die Ergebnisse statistischer Untersuchungen übersichtlich darzustellen, die wissenschaftliche Bearbeitung aber den tiefer liegenden Begriff der Lebenswahrscheinlichkeit als ihren eigentlichen Gegenstand betrachten müsse. In der That scheint es mir nur historisch — durch die Nachfolge Halley's — erklärbar zu sein, dass immer wieder die Absterbeordnung als das Schlussergebniss der statistischen Arbeiten zur Grundlage für alle weite-

* Wittstein, Ueber eine zur Zeit noch nicht existirende Wissenschaft, vorgetragen auf der 40. Naturforscherversammlung. Hannover 1865, und: Mathematische Statistik. Hannover 1867.

ren Anwendungen, insbesondere im Versicherungswesen, gemacht wird. Auch die neue preussische Sterblichkeitstafel ist nur als Absterbeordnung veröffentlicht worden; die Wahrscheinlichkeitswerthe, welche doch, wie immer — von ganz seltenen Fällen abgesehen —, das ursprüngliche Ergebniss der statistischen Ermittelungen gebildet haben und jedenfalls allein zum Vergleich der Tafel mit anderen dienen können, sind nicht mitgetheilt worden. Ohne nun den Nutzen in Abrede stellen zu wollen, den die Zahlen der Absterbeordnung für die Beantwortung einzelner Fragen, auch des Versicherungswesens, bieten, möchte ich doch im Folgenden darauf aufmerksam machen, dass für die hier in Betracht kommende Hauptfrage, für die Bestimmung der Rentenwerthe, die Absterbeordnung unnöthig ist, — ja dass sogar die von ihr ausgehende Berechnung der Rentenwerthe undurchsichtig und weitschweifig ist im Vergleich mit der Berechnung aus den Wahrscheinlichkeiten.

I. Es bezeichne p_m die Wahrscheinlichkeit, dass ein m-jähriger $m+1$ Jahre alt wird. Von M heute lebenden Personen des Alters m leben also nach 1, 2, 3, ... Jahren noch Mp_m, $Mp_m p_{m+1}$, $Mp_m p_{m+1} p_{m+2}$, ... Nun soll jeder Lebende jährlich die Rente 1 nachschussweise empfangen. Der heutige Werth dieser Zahlungen ist, wenn e den Aufzinsungsfactor bezeichnet,

$$M\frac{p_m}{e}+M\frac{p_m p_{m+1}}{e^2}+M\frac{p_m p_{m+1} p_{m+2}}{e^3}+\dots$$

Daher ergiebt sich als der Werth aller pro Person zu zahlenden Renten

$$1)\qquad R_m=\frac{p_m}{e}+\frac{p_m}{e}\cdot\frac{p_{m+1}}{e}+\frac{p_m}{e}\cdot\frac{p_{m+1}}{e}\cdot\frac{p_{m+2}}{e}+\dots$$

Diese selten angewendete* Gleichung ist zunächst bei weitem durchsichtiger, als die gewöhnliche Formel, nach welcher der Rentenwerth des Alters m als Quotient aus der Summe aller folgenden discontirten Zahlen durch die discontirte Zahl des betreffenden Alters erscheint. Denn jede discontirte Zahl ist wie jede Zahl der Absterbeordnung von den ihr in der Altersordnung vorangehenden Zahlen abhängig, während unsere Gleichung, ebenso wie eine einfache Ueberlegung, zeigt, dass der Rentenwerth irgend eines Alters doch nur von den Sterblichkeitszuständen der höheren Alter abhängt. In der gewöhnlichen Formel tilgen sich eben die Einflüsse der vorangehenden Altersstufen, in den Bestandtheilen unserer Formel erscheinen sie überhaupt nicht. Formel 1) giebt also den Rentenwerth an in seiner Abhängigkeit von den Elementen, von denen er wirklich nur abhängt, enthält nichts Fremdartiges.

Schon daraus kann man schliessen, dass auch die Rechnung nach dieser Formel einfacher sein muss, als die gewöhnliche, noch durchaus

* Zeuner, Mathematische Statistik. Leipzig 1869. S. 204.

gebräuchliche. In der That, ist R_{m+1} der Rentenwerth für den $(m+1)$-jährigen, so hat man

$$R_{m+1} = \frac{p_{m+1}}{e} + \frac{p_{m+1}}{e}\,\frac{p_{m+2}}{e} + \ldots$$

Die Vergleichung dieser Formel mit 1) lehrt, dass

$$2) \qquad R_m = \frac{p_m}{e}(1 + R_{m+1})$$

oder in leichtverständlichen kurzen Worten

Nachschussrentenwerth = discontirte Lebenswahrscheinlichkeit
× Vorschussrentenwerth des folgenden Jahres.

Die Richtigkeit dieser Formel ist auch deshalb evident, weil sie einfach aussagt, dass die heute für die Rentengewährung hinterlegte Summe ausreichen muss, erstens um am Schlusse des ersten Jahres den Ueberlebenden die Rente zu zahlen, und zweitens um dann für jeden Ueberlebenden noch soviel in Reserve zu haben, dass man ihm die ferneren Renten zahlen kann. Jenes erfordert, dass für M Eintretende am Jahresschlusse vorhanden sei Mp_m, dieses, dass $Mp_m R_{m+1}$ vorhanden sei; discontirt man diese Beträge auf den Jahresanfang, so erhält man Formel 2).

Hiernach kann man die Rentenwerthe recursionsweise berechnen, vom höchsten Alter beginnend. Ist k dieses höchste Alter, so ist

$$2b) \qquad \begin{cases} R_k = 0, \\ R_{k-1} = \dfrac{p_{k-1}}{e}, \\ R_{k-2} = \dfrac{p_{k-2}}{e}\cdot(1 + R_{k-1}), \\ R_{k-3} = \dfrac{p_{k-3}}{e}\cdot(1 + R_{k-2}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Die Rechnung nach diesem Schema ist logarithmisch ununterbrochen ausführbar, wenn man die Tafel der Gauss'schen Additions- und Subtractionslogarithmen benutzt, da diese ja zum Argumente $A = \log x$ sofort ergeben den Werth $B = \log(1+x)$. Man berechnet also zunächst alle $\log(p:e)$, dann hat man auch $\log R_{k-1}$ und findet weiter $\log(1+R_{k-1})$, $\log R_{k-2}$, $\log(1+R_{k-2})$, $\log R_{k-3}$ u. s. f. mittels der Gauss'schen Tafeln und blosser Additionen.

Nicht minder bequem wie für die logarithmische Berechnung ist die Anwendung der Formel 2) auf der Maschine. Mit einem einzigen Divisor e findet man alle $p:e$ und hat dann eine Kette von Multiplicationen auszuführen, da ja die jedesmalige Hinzufügung der 1 kaum als Weiterung in Betracht kommt.

II. Die obigen Entwickelungen passen ohne Weiteres auch für die Berechnung der Renten auf verbundene Leben, wenn man für p_n

das Product $p'_n p''_{n+d}$ aus den Wahrscheinlichkeiten der verbundenen Leben einsetzt; sie passen auch für abgekürzte Renten, wenn man für k nicht das höchste erreichbare, sondern das höchste versicherte Alter nimmt. Waisenrenten in solcher Art zu berechnen, ist z. B. recht vortheilhaft.

Auch in anderen Fällen bewährt sich die dargelegte Methode. Im Folgenden möge sie noch zur Berechnung der einfachen Invaliditätsreserve angewendet werden. Es sei q_m die Wahrscheinlichkeit, dass ein m-jähriger Arbeiter im folgenden Altersjahre invalid wird, a_m die Wahrscheinlichkeit, dass er während des Jahres activ bleibe. [Bekanntlich ist $a = p - \varkappa . q$, wo $\varkappa$ einen Bruch bezeichnet, über dessen Abhängigkeit von p oder von p und q verschiedene Hypothesen gemacht worden sind. Nach Zeuner ist z. B. $\varkappa = 2p : (1+p)$.]

Aus einer heute vorhandenen Gruppe von M Arbeitern des Alters m wird nun wahrscheinlich invalid

im Alter	m	$m+1$	$m+2$	...
die Anzahl	Mq_m	$Ma_m q_{m+1}$	$Ma_m a_{m+1} q_{m+2}$	...

Diese Invaliden werden versorgt, indem für Jeden die von der Sterblichkeit dieser Invaliden abhängige, nach 2) berechnete Invalidenrente hinterlegt wird, also vorschussweise

$$1+R_m \qquad 1+R_{m+1} \qquad 1+R_{m+2} \qquad \ldots$$

Der heutige Werth dieser wahrscheinlichen Leistungen ist pro Arbeiter

$$3)\quad J_m = (1+R_m)q_m + (1+R_{m+1})\frac{a_m}{e} q_{m+1} + (1+R_{m+2})\frac{a_m}{e}\,\frac{a_{m+1}}{e} q_{m+2} + \ldots$$

Die Berechnung dieser Invaliditätsreserve geschieht wieder mittels der Erwägung, dass

$$J_{m+1} = (1+R_{m+1})q_{m+1} + (1+R_{m+2})\frac{a_{m+1}}{e} q_{m+2} + \ldots$$

Denn die Vergleichung führt auf die Recursionsformel

$$4)\quad J_m = (1+R_m)q_m + \frac{a_m}{e} J_{m+1}.$$

Hat man sich also erstens aus der Lebenswahrscheinlichkeit p der Activen und der Invaliditätswahrscheinlichkeit q die Activitätswahrscheinlichkeit a berechnet und zweitens aus der Invalidensterblichkeit die Invalidenrente R, so ergeben sich die Invaliditätsreserven für die einzelnen Altersjahre in folgender Weise. Man bestimmt $(1+R)q$ und $a:e$ für alle Alter. Ist k das höchste Alter, in dem noch Active leben, so ist dann

$$4b)\quad \begin{cases} J_k = (1+R_k), \\ J_{k-1} = (1+R_{k-1})q_{k-1} + J_k \cdot \dfrac{a_{k-1}}{e}, \\ J_{k-2} = (1+R_{k-2})q_{k-2} + J_{k-1} \cdot \dfrac{a_{k-2}}{e}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Es ist also unnöthig, eine Absterbeordnung der Invaliden und eine Activitätsordnung zu berechnen. Die Wahrscheinlichkeiten, aus denen man diese Zahlenreihen findet, genügen vielmehr unmittelbar, um auch die Renten zu berechnen.

III. Auch Versicherungen auf den Todesfall könnte man ja mittels derselben Methode behandeln. Soll für eine jede von M heute lebenden Personen des Alters m beim Tode die Summe 1 ausgezahlt werden, so ist die heute dazu erforderliche Reserve

$$M D_m = \frac{M s_m}{e} + \frac{M p_m s_{m+1}}{e^2} + \frac{M p_m p_{m+1} s_{m+2}}{e^3} + \dots,$$

denn im ersten Jahre sterben wahrscheinlich $M s_m$, von den Ueberlebenden $M p_m$ sterben im folgenden Jahre $M p_m s_{m+1}$ u. s. f., wenn man mit $s_m = 1 - p_m$ die Sterblichkeit des m^{ten} Altersjahres bezeichnet. Für jede versicherte Person ist also die Reserve zu hinterlegen

$$5)\qquad D_m = \frac{s_m}{e} + \frac{p_m}{e}\frac{s_{m+1}}{e} + \frac{p_m}{e}\frac{p_{m+1}}{e}\frac{s_{m+2}}{e} + \dots$$

Indem man das Deckungscapital für die Lebensversicherung des $(m+1)$-jährigen

$$D_{m+1} = \frac{s_{m+1}}{e} + \frac{p_{m+1}}{e}\frac{s_{m+2}}{e} + \dots$$

mit dem für den m-jährigen vergleicht, zeigt sich, dass

$$6)\qquad D_m = \frac{s_m}{e} + \frac{p_m}{e} D_{m+1},$$

wodurch die Reserven D recursionsweise ermittelt werden könnten. Vortheilhafter ist es aber, sie aus den R zu berechnen: mit Hilfe der Substitution $s = 1 - p$ und unter Berücksichtigung von 1) geht 5) über in die bekannte Gleichung

$$6\text{b})\qquad D_m = \frac{1}{e} + R_m \cdot \frac{1}{e} - R_m = \frac{1}{e}(1 + R_m) - R_m.$$

Auch die für die Todesversicherung erforderliche Jahresprämie β findet sich, da ihr heutiger Werth $\beta(1 + R_m)$ ist, nach 6b)

$$7)\qquad \beta = \frac{1}{e} - \frac{R_m}{1 + R_m} = \frac{1}{1 + R_m} - \left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

Das sind bekannte Beispiele für die Verwerthung der Function R zur Erledigung einiger Aufgaben des Versicherungswesens. Man kann also einige einfache, aber besonders oft vorkommende Fragen beantworten auf Grund der Rentenwerthe allein, ohne die sonst gebräuchlichen beiden Zahlenreihen, die Werthe der discontirten Zahlen der Lebenden und die Werthe der Summen dieser Zahlen zu kennen, und auch das spricht dafür, die Rentenwerthe nicht auf dem üblichen Umwege zu berechnen. Im Allgemeinen jedoch reicht selbstverständlich die Kenntniss dieser einen

Zahlenreihe der Rentenwerthe nicht aus, jene beiden Reihen zu ersetzen. Berechnete man aber noch die discontirten Zahlen a aus den bei Ermittelung der Rentenwerthe benutzten Zahlen $p:e$ mittels der Formeln

8) $$a_0 = 1, \quad a_m = \frac{p_0}{e} \cdot \frac{p_1}{e} \cdot \frac{p_2}{e} \cdots \frac{p_{m-1}}{e},$$

so könnte man die Summen der discontirten Zahlen aus

9) $$A_m = a_{m-1} R_{m-1}$$

finden und hätte dann in den Functionen a und A die gebräuchlichen Grundlagen für die Behandlung versicherungstechnischer Aufgaben. Oder mit anderen Worten: Die nach 2) und 8) zu berechnenden Functionen R und a genügen, um alle Aufgaben zu lösen, welche man gebräuchlicherweise mittels der discontirten Zahlen und ihrer Summen behandelt.

Dresden. Dr. Georg Helm.

XVI.

Das gleichseitige Tetraeder.†

Von

Dr. Adolf Schmidt

zu Breslau.

1.

Als die dem gleichseitigen Dreieck analoge räumliche Figur erscheint auf den ersten Blick das reguläre Tetraeder. Die fundamentale Eigenschaft des ersteren, sich in Bezug auf seine drei Seiten ganz gleichmässig zu verhalten, kommt indessen schon einer weniger speciellen Figur, dem von vier congruenten Dreiecken eingeschlossenen Tetraeder, zu. Ein Tetraeder dieser Art will ich, nach dem Vorschlage von Herrn Professor Schroeter, als gleichseitig†† bezeichnen.

Man erkennt leicht, dass in einem solchen die Gegenkanten einander gleich sind und dass auch umgekehrt aus der Gleichheit derselben die Congruenz der Seitenflächen folgt. Es ist ferner ersichtlich, dass die Ecken in der Grösse und Reihenfolge ihrer Stücke übereinstimmen und mithin congruent sind. Daher ist auch das Tetraeder sich selbst in verschiedener Stellung congruent, wie man erkennt, wenn man irgend eine

---

† Als ich den grössten Theil meiner Arbeit vollendet hatte, machte mich Herr Professor Dr. Schröter darauf aufmerksam, dass in den Nouvelles Annales de Mathématiques bereits einige Abhandlungen über denselben Gegenstand erschienen sind, und war zugleich so freundlich, mir einen Einblick in dieselben zu gewähren. Es sind die folgenden:

Exercices sur le tétraèdre; proposés par M. Genty. 1878. T. XVII p. 223.

Quelques théorèmes sur les tétraèdres dont les arêtes opposées sont égales deux à deux. Par M. Em. Lemoine. 1880. T. XIX p. 133. Herr L. bemerkt, dass er seine Resultate zum Theil schon 1875 auf dem Congrès de l'association française pour l'avancement des Sciences, à Nantes, bekannt gemacht hat.

Solutions des exercices sur le tétraèdre proposés par M. Genty. Par M. Chéfik-Bey. 1880. T. XIX p. 403. Diese Arbeit enthält nur die Beweise zu den von Herrn Genty ohne Beweis angegebenen Sätzen.

Da die Nouvelles Annales vielfach schwer zugänglich sein dürften, so werde ich in meiner Arbeit diejenigen Resultate, welche sich in den genannten Abhandlungen finden, durch ein Sternchen (*) kennzeichnen.

†† Herr Genty bezeichnet ein solches Tetraeder als *isoscèle* (gleichschenklig), wohl mit Rücksicht auf die Gleichheit der Gegenkanten, von welcher er ausgeht.

seiner Ecken mit einer andern zur Deckung bringt, wobei infolge der Gleichheit der von ihnen ausgehenden Kanten auch die ihnen gegenüberliegenden Seitenflächen zusammenfallen. Man findet so $ABCD \cong BADC \cong CDAB \cong DCBA$. Am anschaulichsten ergeben sich diese Resultate auf folgende Weise.

Es sei $ABCD$ ein gleichseitiges Tetraeder, also $\triangle BCD \cong ADC \cong DAB \cong CBA$. Die Mittelpunkte der Kanten BC, AD u. s. w. mögen E_a, E'_a u. s. w. heissen. In den congruenten Dreiecken BCD und CBA sind alsdann die homologen Schwerpunktstransversalen DE_a und AE_a einander gleich; es ist mithin $\triangle AE_aD$ gleichschenklig und folglich $E_aE'_a \perp AD$. In gleicher Weise ergiebt sich $E_aE'_a \perp BC$. Somit gilt der Satz:

*1. **Die Kantenmittellinien, d. h. die die Mitten der Gegenkanten verbindenden Geraden, stehen im gleichseitigen Tetraeder auf den zugehörigen Kanten senkrecht.**

Da die Ebene zweier Kantenmittellinien dem durch die dritte geschnittenen Kantenpaar parallel, also auf jener dritten selbst senkrecht ist, so folgt weiter:

*2. **Die drei Kantenmittellinien eines gleichseitigen Tetraeders stehen paarweise auf einander senkrecht.**

Lässt man nun das Tetraeder um eine dieser Geraden, etwa um $E_aE'_a$, eine halbe Umdrehung machen, so gelangen die beiden anderen $E_bE'_b$ und $E_cE'_c$ in die umgekehrte Lage E'_bE_b und E'_cE_c. Die zwei auf $E_aE'_a$ senkrechten Kanten BC und AD fallen ebenfalls in verkehrter Richtung mit sich selbst wieder zusammen. Infolge dessen gelangt jede der vier übrigen Kanten in die bisherige Lage ihrer Gegenkante. Das Tetraeder kommt daher in veränderter Stellung mit sich selbst zur Deckung.

3. **Ein gleichseitiges Tetraeder bildet in vier verschiedenen Stellungen dieselbe räumliche Figur. Es geht aus einer derselben in eine andere durch halbe Umdrehung um eine seiner Kantenmittellinien über.**

Oder: **Zwei congruente gleichseitige Tetraeder können auf vier Arten zur Deckung gebracht werden.**

Hiernach ergiebt sich unmittelbar:

*4. **Die vier Ecken eines gleichseitigen Tetraeders sind congruent.**

Dieselben gelangen nämlich paarweise zur Deckung, wenn man das Tetraeder in die angegebenen Stellungen bringt. Aus demselben Grunde folgt:

*5. **In einem gleichseitigen Tetraeder ist jede Kante gleich ihrer Gegenkante. Dasselbe gilt von den an ihnen gelegenen Flächenwinkeln.**

Die Umkehrungen dieser Sätze sind offenbar ebenfalls richtig:

6. Ein Tetraeder ist gleichseitig, wenn seine Ecken congruent, oder seine Gegenkanten gleichlang, oder die Flächenwinkel an letzteren gleich sind.

Aus den gemachten Voraussetzungen ergiebt sich nämlich unmittelbar die Congruenz der Begrenzungsdreiecke.

Der Satz, dass ein Tetraeder, dessen Ecken congruent sind, gleichseitig ist, erscheint als Analogon desjenigen, dass ein Dreieck mit gleichen Winkeln gleichseitig ist. Uebrigens genügen bereits viel weniger specielle Voraussetzungen. Es gelten z. B. folgende Sätze:

7. Ein Tetraeder ist gleichseitig, wenn in ihm
   a) die Summe der Kantenwinkel an jeder Ecke gleich zwei Rechten ist, oder
   b) die Summe der Flächenwinkel an jeder Ecke denselben Werth hat, oder
   c) die Sinus seiner Ecken gleich gross sind, u. a. m.

b) und c) sind sehr leicht zu beweisen. Die Richtigkeit von a) erkennt man am einfachsten, indem man drei der Begrenzungsdreiecke in die Ebene des vierten, etwa in diejenige von BCD, umgelegt denkt. Es entsteht dadurch im Allgemeinen ein Sechseck $A_1DA_2BA_3C$, welches infolge der Voraussetzung zu einem Dreieck $A_1A_2A_3$ wird, welches durch die Verbindungslinien der Mitten B, C, D seiner Seiten in vier congruente Dreiecke BCD, $A_1DC (\cong ADC)$ u. s. w zerfällt.

Satz 7a) ist die Umkehrung des folgenden:

8. Im gleichseitigen Tetraeder besitzt die Summe der Kantenwinkel an jeder Ecke den Werth von zwei Rechten,

der sich aus der Bemerkung ergiebt, dass diese Winkel denjenigen des gegenüberliegenden Dreiecks bezüglich gleich sind. Da in den Ecken, welche nothwendig convex sind, die Summe zweier Kantenwinkel grösser als der dritte ist, so muss jeder derselben kleiner als ein Rechter sein, d. h.:

*9. Die Begrenzungsdreiecke eines gleichseitigen Tetraeders können nur spitzwinklig sein.

(Im Grenzfalle rechtwinkliger Dreiecke fallen die Flächen des Tetraeders in eine Ebene. Seine Kanten werden Seiten und Diagonalen eines Rechtecks.)

Auch die Sätze 2. und 1. sind umkehrbar:

10. Ein Tetraeder, dessen Kantenmittellinien ein rechtwinkliges Dreikant bilden, ist gleichseitig.

Ein solches geht nämlich offenbar durch halbe Umdrehung um irgend eine der Mittellinien in sich selbst über, wobei die einzelnen Begrenzungsdreiecke zur Deckung kommen.

11. **Ein Tetraeder, dessen Kantenmittellinien auf den zugehörigen Kanten bezüglich senkrecht stehen, ist gleichseitig.**

Aus der Voraussetzung folgt zunächst, dass die Mittellinien selbst paarweise zu einander normal sind, worauf sich die Behauptung mit Hilfe von 10. ergiebt.†

Ich wende mich zu einigen weiteren Sätzen, welche sich aus der in 3. angegebenen Grundeigenschaft des gleichseitigen Tetraeders ergeben. Gelangt durch Drehung um $E_a E'_a$ der Punkt A in die Lage von D und die Ebene BCD in die Lage von CBA, so fällt die von A auf BCD herabgelassene Senkrechte mit der von D nach CBA gehenden zusammen. Beide sind einander folglich gleich. Ebenso gelangen alle Linien zur Deckung, welche von A, bez. D nach homologen Punkten der Gegenebene gehen oder, was dasselbe ist, homologe Strahlen der Ecken sind. Die von den Eckpunkten bis zu den gegenüberliegenden Ebenen gemessenen Strecken sind demnach von gleicher Länge. Sie sind ferner gegen die Kanten und Ebenen bezüglich gleich geneigt, da die Winkel, welche sie mit denselben bilden, sich ebenfalls decken. Es gilt also der Satz:

12. **Im gleichseitigen Dreieck sind die vier Höhen einander gleich und gegen die Ebenen und Kanten bezüglich gleich geneigt; dasselbe gilt von den (nach den Schwerpunkten der Dreiecke gehenden) Eckmittellinien, von den Höhenstrahlen der Ecken, überhaupt von irgend vier homologen Linien.**

Als einfache Folgerungen von 3. ergeben sich auch die beiden folgenden Sätze, welche Herr Lemoine beweist:

*13. **Es giebt eine die vier Höhen des gleichseitigen Tetraeders berührende Kugel, welche den Schnittpunkt M der Kantenmittellinien zum Centrum hat. — Es giebt eine Kugel mit demselben Centrum M, welche die in den Höhenschnittpunkten der Begrenzungsdreiecke auf deren Ebenen errichteten Senkrechten berührt.**

Uebrigens sind diese beiden Kugeln, wie Satz 19 zeigt, identisch. — Der Schnittpunkt M der Kantenmittellinien ist bekanntlich zugleich

† Einen von dem hier gewählten verschiedenen Ausgangspunkt für die Untersuchung des gleichseitigen Tetraeders bietet die Betrachtung des demselben umschriebenen Spats. Derselbe ist offenbar rechtwinklig, während er bei dem andern speciellen Tetraeder, dem orthogonalen, gleichseitig ist. (Vergl. H. Vogt, Das Tetraeder mit Höhenschnittpunkt. Breslau 1881. Progr. d. Friedr. Gymn.) Die Wahl dieses Ausgangspunktes wäre, worauf mich Herr Professor Schroeter aufmerksam machte, besonders bei einer Untersuchung der bei dem Tetraeder überhaupt möglichen speciellen Formen zweckmässig.

derjenige der Eckmittellinien, also der Schwerpunkt des Tetraeders, und er theilt die Eckmittellinien im Verhältniss 1:3. Aus der Gleichheit der letzteren folgt demnach, dass auch ihre zwischen M und den Eckpunkten gelegenen Abschnitte gleiche Länge besitzen, dass also M zugleich das Centrum der dem Tetraeder umschriebenen Kugel ist. Dieses Resultat folgt übrigens auch unmittelbar aus 3., da nach diesem Satze irgend zwei der Geraden MA, MB, MC, MD zur Deckung gebracht werden können. Auf Grund desselben Satzes müssen die Begrenzungsebenen des Tetraeders von M gleiche Entfernung besitzen, da sie ja durch Drehung um diesen Punkt in einander übergehen können. M ist also auch das Centrum der dem Tetraeder einbeschriebenen Kugel. Der Monge'sche Punkt (in welchem sich die durch die Mitten der Tetraederkanten senkrecht zu den bezüglich gegenüber liegenden Kanten gelegten Ebenen schneiden) fällt ebenfalls mit M zusammen, da seine Verbindungslinie mit dem Centrum der umbeschriebenen Kugel in jedem Tetraeder durch den Schwerpunkt halbirt wird.

Ueberhaupt gilt der allgemeine Satz:

14. In einem gleichseitigen Tetraeder fallen sämmtliche eindeutig definirten ausgezeichneten Punkte mit dem Schnittpunkte seiner Kantenmittellinien zusammen.

Ein ausgezeichneter Punkt des Tetraeders darf nämlich offenbar seine Lage nicht ändern, wenn dieses eine halbe Umdrehung um eine Kantenmittellinie ausführt, weil durch eine solche Drehung die räumliche Figur an sich nicht geändert wird. Nun sind M und die unendlich fernen Punkte der Mittellinien die einzigen Punkte, welche bei keiner dieser Drehungen in eine andere Lage gelangen; von diesen kann indessen nur M ein eindeutig bestimmter ausgezeichneter Punkt sein.

Ich nenne M den Mittelpunkt des gleichseitigen Tetraeders. Der soeben bewiesene Satz enthält, wenigstens soweit die speciell angeführten Punkte in Betracht kommen, wie alle bisherigen Sätze eine charakteristische Eigenschaft des gleichseitigen Tetraeders; es gilt die Umkehrung:

15. Fallen irgend zwei der folgenden ausgezeichneten Punkte eines Tetraeders: Schwerpunkt, Centrum der umschriebenen Kugel, Centrum der einbeschriebenen Kugel, Monge'scher Punkt, zusammen, so ist das Tetraeder gleichseitig.

Aus Mangel an Raum muss ich auf die Beweise der hierin zusammengefassten sechs Sätze hier verzichten. Mit Ausnahme des auf die beiden zuletzt genannten Punkte Bezüglichen bieten dieselben keine Schwierigkeit.

Im Anschluss hieran beweist man leicht einige Sätze, welche die Umkehrung eines Theiles von 12. bilden:

16. **Ein Tetraeder, dessen Eckmittellinien gleichlang sind, ist gleichseitig.**

Aus der Voraussetzung folgt unmittelbar, dass der Schwerpunkt von den Eckpunkten gleiche Abstände besitzt, also zugleich das Centrum der umbeschriebenen Kugel ist.

17. **Ein Tetraeder, dessen Höhen gleich lang sind, ist gleichseitig.**

In diesem Falle ist der Schwerpunkt mit dem Centrum der einbeschriebenen Kugel identisch, da seine Entfernungen von den Flächen des Tetraeders, welche bekanntlich allgemein den vierten Theilen der entsprechenden Höhen gleich sind, infolge der gemachten Voraussetzung einander gleich werden.

Derselbe Satz lässt sich folgendermassen aussprechen:

*18. **Sind die Begrenzungsdreiecke eines Tetraeders flächengleich, so sind sie auch congruent.**

Ich führe zum Schluss noch zwei Sätze an, welche eine deutliche Vorstellung von der Gestalt eines gleichseitigen Tetraeders gewähren, wenn dessen Begrenzungsdreieck gegeben ist.

19. **Die Strecke zwischen dem Höhenschnittpunkt eines Begrenzungsdreiecks und dem Fusspunkt der auf dessen Ebene gefällten Tetraederhöhe wird durch das Centrum des diesem Dreieck umbeschriebenen Kreises halbirt.**

20. **Die Höhe eines gleichseitigen Tetraeders ist doppelt so gross, als die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten, in welche irgend eine Höhe des Begrenzungsdreiecks durch den Höhenschnittpunkt getheilt wird.**

2.

Die Ecken eines gleichseitigen Tetraeders sind, wie bereits bemerkt wurde, specieller Art; sie genügen der Bedingung, dass die Summe ihrer Kantenwinkel zwei Rechte beträgt. (Ausserdem sind diese Winkel sämmtlich spitze.) Aus dieser Bedingung ergeben sich zahlreiche goniometrische Beziehungen zwischen den Bestimmungsstücken derartiger Ecken. Die einfachsten derselben sollen hier abgeleitet werden.

Um Unterbrechungen zu vermeiden, stelle ich zunächst einige in der Folge anzuwendende, grösstentheils bekannte Formeln hier zusammen.

Genügen die Winkel α, β, γ der Bedingung

1) $$\alpha+\beta+\gamma=\pi,$$

so gelten folgende Relationen:

α) $$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

$$\beta)\qquad \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

$$\gamma)\qquad tg\,\alpha+tg\,\beta+tg\,\gamma=tg\,\alpha\,tg\,\beta\,tg\,\gamma,$$

$$\delta)\qquad \begin{aligned}&\sin\beta\sin\gamma+\sin\gamma\sin\alpha+\sin\alpha\sin\beta\\&=-1-\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+8\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2},\end{aligned}$$

$$\varepsilon)\qquad \begin{aligned}&\cos\beta\cos\gamma+\cos\gamma\cos\alpha+\cos\alpha\cos\beta\\&=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\left(1+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right),\end{aligned}$$

$$\zeta)\qquad tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}+tg\frac{\gamma}{2}=\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}},$$

$$\eta)\qquad tg\frac{\beta}{2}\,tg\frac{\gamma}{2}+tg\frac{\gamma}{2}\,tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2}=1.$$

Aus $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ folgt $\cos\alpha=-\cos(\beta+\gamma)$, d. h.

$$\cos\alpha=-\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma.$$

Andererseits ist

$$\cos\alpha=\quad\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos\mathsf{A}.$$

Hieraus folgt

$$2\cos\alpha=\quad\sin\beta\sin\gamma(1+\cos\mathsf{A})\qquad \cos^2\frac{\mathsf{A}}{2}=\frac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma},$$

$$0=-2\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma(1-\cos\mathsf{A})\quad \sin^2\frac{\mathsf{A}}{2}=ctg\,\beta\,ctg\,\gamma,$$

$$2)\qquad \begin{aligned}&\sin\frac{\mathsf{A}}{2}=\sqrt{ctg\,\beta\,ctg\,\gamma},\qquad \cos\frac{\mathsf{A}}{2}=\sqrt{\frac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}},\\&tg\frac{\mathsf{A}}{2}=\frac{\sqrt{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{\cos\alpha},\qquad \sin\mathsf{A}=\frac{2\sqrt{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{\sin\beta\sin\gamma}.\end{aligned}$$

Den hier, wie auch den weiterhin auftretenden Quadratwurzeln ist das positive Vorzeichen zu geben, da α, β, γ spitze und A, B, Γ concave Winkel sind.

Aus den soeben erhaltenen Resultaten ergiebt sich

$$3)\quad \cos\alpha\,tg\frac{\mathsf{A}}{2}=\cos\beta\,tg\frac{\mathsf{B}}{2}=\cos\gamma\,tg\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=tg\frac{\mathsf{A}}{2}\,tg\frac{\mathsf{B}}{2}\,tg\frac{\Gamma}{2},$$

$$4)\qquad \frac{\sin\mathsf{A}}{\sin\alpha}=\frac{\sin\mathsf{B}}{\sin\beta}=\frac{\sin\Gamma}{\sin\gamma}=\frac{2\sqrt{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}.$$

Mit Berücksichtigung des für $\sin^2\frac{\mathsf{A}}{2}$ gefundenen Werthes findet man

$$tg\,\alpha\,tg\,\beta\,tg\,\gamma\sin^2\frac{\mathsf{A}}{2}=tg\,\alpha.$$

Stellt man noch die entsprechenden Ausdrücke für $tg\beta$ und $tg\gamma$ auf, so erhält man durch Addition aller drei

$$tg\,\alpha\, tg\,\beta\, tg\,\gamma\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{\Gamma}{2}\right)=tg\,\alpha+tg\,\beta+tg\,\gamma,$$

also mit Rücksicht auf Formel γ):

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{\Gamma}{2}=1$$

oder

5) $$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{\Gamma}{2}=2$$

oder endlich

$$\cos A+\cos B+\cos\Gamma=1.$$

Es giebt bekanntlich sechs wesentlich verschiedene, zur Bestimmung einer Ecke dienende Combinationen der Kanten- und Flächenwinkel:

1. α, β, γ; 3. A, β, γ; 5. α, β, B;
2. A, B, Γ; 4. α, B, Γ; 6. A, B, β.

Zwischen den drei in irgend einer dieser Gruppen vereinigten Winkeln muss natürlich eine Relation stattfinden, wenn die durch sie bestimmte Ecke einem gleichseitigen Tetraeder angehören soll.

Für die drei ersten Fälle haben sich die entsprechenden Relationen bereits ergeben:

1. $\alpha+\beta+\gamma=\pi$,
2. $\cos A+\cos B+\cos\Gamma=1$,
3. $\sin^2\frac{A}{2}\,tg\,\beta\,tg\,\gamma=1$.

Es ist ferner nach 2) $tg\frac{B}{2}\,tg\frac{\Gamma}{2}=\cos\alpha$ oder

6) 4. $$\cos\alpha\,ctg\frac{B}{2}\,ctg\frac{\Gamma}{2}=1.$$

Ersetzt man in der hieraus folgenden Gleichung $\cos^2\alpha\,ctg^2\frac{B}{2}\,ctg^2\frac{\Gamma}{2}=1$ mit Rücksicht auf 2) $ctg^2\frac{\Gamma}{2}$ durch $(tg\,\alpha\,tg\,\beta-1)$, so findet man

7) 5. $$\cos^2\alpha\,(tg\,\alpha\,tg\,\beta-1)\,ctg^2\frac{B}{2}=1.$$

Ausgehend von 5) findet man endlich

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}=\cos^2\frac{\Gamma}{2}=\frac{1}{1+tg^2\frac{\Gamma}{2}}=\frac{1}{1+\cos^2\beta\,ctg^2\frac{A}{2}},$$

8) 6. $$\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}\right)\left(1+\cos^2\beta\,ctg^2\frac{A}{2}\right)=1.$$

[Die beiden zuletzt entwickelten Gleichungen lassen sich in folgende für numerische Rechnungen bequemere Formen bringen:

7a) $$[\alpha+\gamma=\pi-\beta],\quad \cos(\alpha-\gamma)=\cos\beta\left(1+2\,tg^2\frac{B}{2}\right),$$

8a) $$\cos\frac{A+\Gamma}{2}=tg\,\beta\,\sin\frac{B}{2},\quad \cos\frac{A-\Gamma}{2}=ctg\,\beta\,\sin\frac{B}{2}].$$

Die Gleichung 6) gestattet, wenn die Flächenwinkel gegeben sind, die Cosinus der Kantenwinkel zu bestimmen. Auch die Sinus der letzteren sind leicht zu berechnen. Es ist nach 2) und 6)

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta\,\sin\gamma} = \frac{tg\frac{B}{2}\,tg\frac{\Gamma}{2}}{\sin\beta\,\sin\gamma}$$

oder

$$\sin\beta\,\sin\gamma = \frac{tg\frac{B}{2}\,tg\frac{\Gamma}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}.$$

Berechnet man in gleicher Weise $\sin\gamma\,\sin\alpha$ und $\sin\alpha\,\sin\beta$, so findet man durch Ausziehung der Quadratwurzel aus dem Product dieser Ausdrücke

$$9)\qquad \sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma = \frac{tg\frac{A}{2}\,tg\frac{B}{2}\,tg\frac{\Gamma}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{\Gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{\Gamma}{2}}{\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{\Gamma}{2}\right)^2}.$$

Somit ist

$$10)\qquad \sin\alpha = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{\Gamma}{2}} = \frac{\sin A}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{\Gamma}{2}}.$$

Man hat demnach

$$11)\qquad \frac{\sin A}{\sin\alpha} = \frac{\sin B}{\sin\beta} = \frac{\sin\Gamma}{\sin\gamma} = 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{\Gamma}{2},$$

woraus durch Vergleichung mit 4)

$$12)\qquad \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{\Gamma}{2} = \frac{\sqrt{\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma}}{\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma}$$

folgt. Aus den für $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ gefundenen Werthen ergiebt sich

$$13)\qquad tg\,\alpha = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{\Gamma}{2}}.$$

Hiernach ist

$$14)\qquad \frac{\sin^2\frac{A}{2}}{tg\,\alpha} = \frac{\sin^2\frac{B}{2}}{tg\,\beta} = \frac{\sin^2\frac{\Gamma}{2}}{tg\,\gamma} = \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{\Gamma}{2} = ctg\,\alpha\,ctg\,\beta\,ctg\,\gamma.$$

In Vorstehendem sind bereits mehrere Beziehungen zwischen symmetrisch gebildeten Ausdrücken ermittelt worden. Es lassen sich solche noch in grosser Zahl aufstellen. Man hat z. B.

$$\frac{\sin A}{\sin\alpha} = \frac{\sin A + \sin B + \sin\Gamma}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} = 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{\Gamma}{2} = \frac{2\sqrt{\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma}}{\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma}.$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf die vorausgeschickte Formel α)

$$15)\quad \begin{aligned} \sin A + \sin B + \sin \Gamma &= 8 \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{\Gamma}{2} \\ &= \frac{\sqrt{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}. \end{aligned}$$

Mit Benutzung von 3) findet man hieraus

$$16)\quad \begin{aligned} \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} &= \frac{tg\frac{A}{2}\,tg\frac{B}{2}\,tg\frac{\Gamma}{2}}{\sin A\sin B\sin\Gamma}, \\ \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} &= \frac{\sin A+\sin B+\sin\Gamma}{8\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{\Gamma}{2}}, \\ tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2}\,tg\frac{\gamma}{2} &= \frac{8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{\Gamma}{2}}{(\sin A+\sin B+\sin\Gamma)^2}. \end{aligned}$$

In allen bisher entwickelten Beziehungen treten nur die Flächen- und die Kantenwinkel der Ecke auf. Ich betrachte nun noch einige weitere auf die letztere bezügliche Grössen.

Der Sinus der Ecke, den ich kurz durch S bezeichnen will, ergiebt sich aus der bekannten Formel

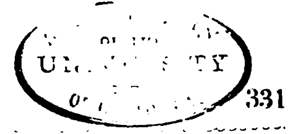
$$S = \sin\beta\sin\gamma\sin A.$$

Durch Einsetzung des für $\sin A$ früher gefundenen Werthes 2) nimmt der angegebene Ausdruck die symmetrische Form $2\sqrt{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$ an. Indem man mit Hilfe der in dem Vorhergehenden entwickelten Relationen dieses Resultat umformt, erhält man

$$17)\quad \begin{aligned} S &= \sin\beta\sin\gamma\sin A = \sin\gamma\sin\alpha\sin B = \sin\alpha\sin\beta\sin\Gamma \\ &= 2\cos\alpha\,tg\frac{A}{2} = 2\cos\beta\,tg\frac{B}{2} = 2\cos\gamma\,tg\frac{\Gamma}{2} \\ &= 2\sqrt{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} = 2\,tg\frac{A}{2}\,tg\frac{B}{2}\,tg\frac{\Gamma}{2} \\ &= 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{\Gamma}{2} \\ &= 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}(\sin A+\sin B+\sin\Gamma) \end{aligned}$$

u. s. w.

Der Ueberschuss E der Flächenwinkelsumme über einen gestreckten Winkel (der sogenannte sphärische Excess des der Ecke zugehörigen Dreiecks) ergiebt sich in folgender Weise:



$$\sin\frac{E}{2} = \sin\frac{A+B+\Gamma-\pi}{2} = -\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}\right)$$

$$= -\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{\Gamma}{2} + \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{\Gamma}{2} + \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{\Gamma}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{\Gamma}{2}$$

$$= \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{\Gamma}{2}\left[-1 + tg\frac{B}{2}\,tg\frac{\Gamma}{2} + tg\frac{\Gamma}{2}\,tg\frac{A}{2} + tg\frac{A}{2}\,tg\frac{B}{2}\right]$$

$$= \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{\Gamma}{2}\left[-1+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\right] \quad \text{[nach 6)]}$$

$$= \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{\Gamma}{2}\cdot 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \qquad \text{[nach } \beta)].$$

Dieser Ausdruck kann wiederum mannigfach umgeformt werden. So erhält man:

$$\sin\frac{E}{2} = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{\Gamma}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\, tg\frac{\alpha}{2}\, tg\frac{\beta}{2}\, tg\frac{\gamma}{2}\,(\sin A + \sin B + \sin\Gamma)$$

$$18)\qquad = \frac{\sqrt{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{tg\frac{A}{2}\,tg\frac{B}{2}\,tg\frac{\Gamma}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{S}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$= \sin A\,\frac{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \sin B\,\frac{\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}} = \sin\Gamma\,\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

In ähnlicher Weise lässt sich $\cos\frac{E}{2}$ ermitteln. Es ist

$$\cos\frac{E}{2} = \sin\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}\right)$$

$$= -\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{\Gamma}{2} + \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{\Gamma}{2} + \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{\Gamma}{2} + \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{\Gamma}{2}$$

$$= \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{\Gamma}{2}\left[-tg\frac{A}{2}\,tg\frac{B}{2}\,tg\frac{\Gamma}{2} + tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{\Gamma}{2}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\left[-\sqrt{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} + \sqrt{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}+\frac{1}{\cos\gamma}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\left[-\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\beta\cos\gamma + \cos\gamma\cos\alpha + \cos\alpha\cos\beta\right]$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\cdot 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\left(1+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right) \quad \text{[nach } \varepsilon)],$$

$$
19)\qquad \cos\frac{E}{2} = \frac{1+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}
$$

$$
= \tfrac{1}{2}\left(tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}+tg\frac{\gamma}{2}+tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2}\,tg\frac{\gamma}{2}\right) \qquad [\text{nach } \zeta)].
$$

Um die halbe Winkelöffnung P des der Ecke umschriebenen Rotationskegels (den Radius des dem zugehörigen sphärischen Dreieck umschriebenen Kreises) zu berechnen, gehe ich von der leicht zu beweisenden Gleichung

$$
ctg\,P\,tg\frac{\alpha}{2} = \cos\tfrac{1}{2}(B+\Gamma-A) = \cos(\Sigma-A)
$$

aus, in welcher $\Sigma = \frac{1}{2}(A+B+\Gamma)$ ist. Aus derselben folgt

$$
ctg\,P\left(tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}+tg\frac{\gamma}{2}\right) = \cos(\Sigma-A)+\cos(\Sigma-B)+\cos(\Sigma-\Gamma).
$$

Nun gilt allgemein die Beziehung

$$
\cos\Sigma+\cos(\Sigma-A)+\cos(\Sigma-B)+\cos(\Sigma-\Gamma) = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{\Gamma}{2}.
$$

Demnach ist, wenn zugleich der Factor von $ctg\,P$ nach ζ) umgeformt wird,

$$
ctg\,P\,\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{\Gamma}{2}-\cos\Sigma
$$

$$
= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{\Gamma}{2}+\sin\frac{E}{2}
$$

$$
= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{\Gamma}{2}\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right).
$$

Demnach ist

$$
ctg\,P = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{\Gamma}{2}
$$

$$
20)\qquad = \tfrac{1}{2}(\sin A+\sin B+\sin\Gamma)
$$

$$
= \frac{S}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}
$$

$$
= \sin\frac{E}{2}\,ctg\frac{\alpha}{2}\,ctg\frac{\beta}{2}\,ctg\frac{\gamma}{2}
$$

u. s. w.

Sehr einfach gestaltet sich endlich das Resultat bei der Berechnung der halben Winkelöffnung ϱ des der Ecke einbeschriebenen Rotationskegels. Man findet leicht

$$
tg\,\varrho\,ctg\frac{A}{2} = \sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha,
$$

$$
21)\qquad tg\,\varrho = \cos\alpha\,tg\frac{A}{2} = \tfrac{1}{2}S.
$$

(Was die drei anderen die Flächen der Ecke berührenden Rotationskegel betrifft, so findet man in ähnlicher Weise $\varrho_a = \frac{\mathsf{A}}{2}$, $\varrho_b = \frac{\mathsf{B}}{2}$, $\varrho_c = \frac{\Gamma}{2}$, ein auch geometrisch evidentes Resultat.)

In einer Ecke von allgemeinem Charakter sind E, P, ϱ oder E, P, S von einander unabhängig. Dagegen muss in der Ecke eines gleichseitigen Tetraeders, die ja nur von zwei Constanten abhängt, zwischen diesen Grössen eine Beziehung bestehen. Dieselbe ergiebt sich leicht aus den bisherigen Resultaten. Es ist nach 18) und 19)

$$ctg\frac{\mathsf{E}}{2} = \frac{1+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{S}$$

$$= \frac{2+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{S},$$

$$22)\qquad ctg\frac{\mathsf{E}}{2} = \frac{2}{S} + tg\,\mathsf{P} = ctg\,\varrho + tg\,\mathsf{P}.$$

Durch irgend zwei der drei Grössen $\frac{\mathsf{E}}{2}$, P, ϱ ist demnach die dritte bis auf ganze Vielfache von π bestimmt, also, insoweit es sich um die geometrische Interpretation handelt, in eindeutiger Weise.

Die Ecke selbst ist, da sie nur von zwei Constanten abhängt, durch irgend zwei der Grössen E, P, ϱ (oder S) bestimmt. Es muss also möglich sein, aus denselben irgendwelche Stücke der Ecke, insbesondere ihre Flächenwinkel und Kantenwinkel zu berechnen. Da E, P, ϱ, S in symmetrischer Weise von α, β, γ; A, B, Γ abhängen, so können diese letzteren durch jene allerdings nur mit Hilfe von Gleichungen des dritten Grades ausgedrückt werden. Es sind beispielsweise $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ bekanntlich die Wurzeln folgender Gleichung:

$$x^3 - (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)\,x^2 + (\sin\beta\sin\gamma + \sin\gamma\sin\alpha + \sin\alpha\sin\beta)\,x$$
$$- \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 0.$$

Nun ist

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{2\,tg\,\varrho}{\sin\frac{\mathsf{E}}{2}},$$

$$\sin\beta\sin\gamma + \sin\gamma\sin\alpha + \sin\alpha\sin\beta = -1 - \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + 8\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}$$

$$= -1 - tg^2\varrho + \frac{2\,tg^2\varrho}{\sin^2\frac{\mathsf{E}}{2}} = tg^2\varrho\left(1 + 2\,ctg^2\frac{\mathsf{E}}{2}\right) - 1,$$

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \tfrac{1}{2}\,\frac{S}{\sin\frac{\mathsf{E}}{2}} \cdot \frac{S}{ctg\,\mathsf{P}} = \frac{2\,tg^2\varrho\,tg\,\mathsf{P}}{\sin\frac{\mathsf{E}}{2}}.$$

Die obige Gleichung nimmt daher folgende Gestalt an:

$$23)\quad x^3 - \frac{2\,tg\,\varrho}{sin\frac{E}{2}}x^2 + \left[tg^2\varrho\left(1+2\,ctg^2\frac{E}{2}\right)-1\right]x - \frac{2\,tg^2\varrho\,tg\,P}{sin\frac{E}{2}} = 0.$$

Mit Hilfe der Beziehung 22) kann hieraus noch irgend eine der Grössen E, P, ϱ eliminirt werden.

In ähnlicher Weise lassen sich auch für die übrigen Functionen der Winkel Gleichungen aufstellen. Man findet z. B. $tg\frac{\alpha}{2}$, $tg\frac{\beta}{2}$, $tg\frac{\gamma}{2}$ als Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - sin\frac{E}{2}\left(ctg\frac{E}{2}+ctg\,\varrho\right)x^2 + x - sin\frac{E}{2}\,tg\,P = 0$$

oder

$$24)\quad x^3 - \frac{sin\left(\varrho+\frac{E}{2}\right)}{sin\,\varrho}x^2 + x - \frac{sin\left(\varrho-\frac{E}{2}\right)}{sin\,\varrho} = 0.$$

$tg\frac{A}{2}$, $tg\frac{B}{2}$, $tg\frac{\Gamma}{2}$ ergeben sich als Wurzeln folgender Gleichung:

$$25)\quad x^3 - tg\,\varrho\left(1+2\,tg\,P\,ctg\frac{E}{2}\right)x^2 + tg\,\varrho\left(ctg\frac{E}{2}+tg\,P\right)x - tg\,\varrho = 0.$$

Die Coefficienten dieser Gleichungen sind eindeutige Functionen von E, P, ϱ. Die Winkel sind daher (bis auf Vielfache von 2π) bestimmt. Durch irgend zwei der Grössen E, P, ϱ ist demnach eine bestimmte Ecke (oder die mit ihr symmetrische) definirt.

Im Anschluss an die vorhergehenden Untersuchungen lässt sich die Frage beantworten, innerhalb welcher Grenzen die Grössen E, P, $\varrho(S)$ liegen müssen, um einem reellen Tetraeder anzugehören. Ich muss mich aus Mangel an Raum hier darauf beschränken, das Resultat der betreffenden Untersuchung anzugeben.

Die Ecken sämmtlicher (reellen) gleichseitigen Tetraeder bilden eine doppelt-unendliche Mannichfaltigkeit, welche sich am klarsten überschauen lässt, wenn die zu einem und demselben Werthe von ϱ gehörigen Ecken in eine Gruppe zusammengefasst werden.

ϱ kann alle Werthe von 0 bis $arctg\frac{\sqrt{2}}{4}\left(=arcsin\frac{1}{3}\right)$ annehmen. Definirt man für einen innerhalb dieser Grenzen gelegenen Werth von ϱ einen Hilfswinkel ϑ durch die Gleichung $\sqrt{8}\,tg\,\varrho = sin\,\vartheta$, und bestimmt man vier neue Winkel ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, ϑ_4 durch die Gleichungen

$$cos\,\vartheta_1 = cos^2\frac{\vartheta}{2},\quad cos\,\vartheta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}cos\frac{\vartheta}{2},\quad cos\,\vartheta_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}sin\frac{\vartheta}{2},\quad cos\,\vartheta_4 = sin^2\frac{\vartheta}{2},$$

wobei offenbar $\vartheta_1 < \vartheta_2 < \vartheta_3 < \vartheta_4$ ist, so gilt Folgendes:

26) **Alle Ecken gleichseitiger Tetraeder, in denen ϱ den hier angenommenen Werth besitzt, lassen sich in eine stetige Reihe ordnen. Die Endglieder derselben sind die gleichseitigen Ecken**

$$\text{I.}\quad \alpha=\vartheta_1,\quad \beta=\gamma=\vartheta_3;\qquad\qquad \text{II.}\quad \alpha=\beta=\vartheta_2,\quad \gamma=\vartheta_4.$$

Man erhält alle Glieder dieser Reihe, indem man α stetig von ϑ_1 bis ϑ_2 anwachsen lässt. Es wächst dabei gleichzeitig γ von ϑ_3 bis ϑ_4, während β von ϑ_3 auf ϑ_2 abnimmt.

Mit wachsendem α nimmt auch P zu, E dagegen ab. Sein Maximum erreicht also E in der gleichschenkligen Ecke I, sein Minimum in II, und umgekehrt verhält es sich mit P. Die betreffenden Werthe sind

$$\text{I.}\quad tg\,P_1=\frac{2-\sqrt{2}\sin\frac{\vartheta}{2}}{2\cos\frac{\vartheta}{2}},\quad ctg\frac{E_1}{2}=\frac{2\sin\frac{\vartheta}{2}-\sqrt{2}\sin^2\frac{\vartheta}{2}+2\sqrt{2}}{\sin\vartheta};$$

$$\text{II.}\quad tg\,P_2=\frac{2-\sqrt{2}\cos\frac{\vartheta}{2}}{2\sin\frac{\vartheta}{2}},\quad ctg\frac{E_2}{2}=\frac{2\cos\frac{\vartheta}{2}-\sqrt{2}\cos^2\frac{\vartheta}{2}+2\sqrt{2}}{\sin\vartheta}.$$

Für $tg\,\varrho=\frac{\sqrt{2}}{4}$ reducirt sich diese Reihe auf ein einziges Glied, nämlich auf die gleichseitige Ecke des regulären Tetraeders. Es wird in diesem Falle $\vartheta_1=\vartheta_2=\vartheta_3=\vartheta_4=\frac{\pi}{3}$, $P_1=P_2=arctg\frac{\sqrt{2}}{2}$, $E_1=E_2=arctg\frac{\sqrt{2}}{5}$.

Für $\varrho=0$ erhält man keine Ecken im eigentlichen Sinne; es fallen die Ebenen derselben in eine zusammen. Ein Kantenwinkel ist stets gleich $\frac{\pi}{2}$, ein Flächenwinkel gleich 0. Die beiden Grenzfälle sind

$$\text{I.}\quad \alpha=0,\ \beta=\gamma=\frac{\pi}{2};\quad A=0,\ B=\Gamma=\frac{\pi}{2};\quad P_1=\frac{\pi}{4};\quad E_1=0;$$

$$\text{II.}\quad \alpha=\beta=\frac{\pi}{4},\ \gamma=\frac{\pi}{2};\quad A=B=0,\ \Gamma=\pi;\quad P_2=\frac{\pi}{2};\quad E_2=0.$$

Mit wachsendem ϱ nehmen P_1 und P_2 ab, E_1 und E_2 dagegen zu.

Zum Schluss mögen noch die äussersten bei reellen Ecken der betrachteten Art möglichen Grenzwerthe von E, P, ϱ und $S\,(=2\,tg\,\varrho)$ zusammengestellt werden.

Minim. v. E: 0, Maxim. v. E: $31^0 35' 12'' = 2\,arctg\frac{\sqrt{2}}{5}$,

„ „ P: $35^0 16' 54'' = arctg\frac{\sqrt{2}}{2}$, „ „ P: 90^0,

Minimum von ϱ: 0, Maximum v. ϱ: $19^{0}28'17'' = arctg\frac{\sqrt{2}}{4}$,

" " S: 0, " " S: $0{,}70717 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.

Ich kehre zur Betrachtung des Tetraeders zurück. Die Kanten desselben nenne ich a, b, c, die Kantenmittellinien in entsprechender Reihenfolge l, m, n; für die Winkel benutze ich die im vorigen Paragraphen eingeführte Bezeichnung. Ferner sei r der Radius der dem Tetraeder einbeschriebenen, R derjenige der gleichzeitig ihm und dem zugehörigen Spat umschriebenen Kugel. Mit r_0 und R_0 endlich bezeichne ich die Radien des in ein Begrenzungsdreieck und des um dasselbe beschriebenen Kreises.

Da die Kanten des zugehörigen Spats gleich l, m, n, die Diagonalen seiner Seitenflächen gleich a, b, c sind, so findet man unmittelbar:

$$*1)\quad \begin{aligned} a^2 &= m^2+n^2, & l^2 &= \tfrac{1}{2}(b^2+c^2-a^2), \\ b^2 &= n^2+l^2, & m^2 &= \tfrac{1}{2}(c^2+a^2-b^2), \\ c^2 &= l^2+m^2, & n^2 &= \tfrac{1}{2}(a^2+b^2-c^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^2 &= \tfrac{1}{4}(l^2+m^2+n^2) = \tfrac{1}{8}(a^2+b^2+c^2) \\ &= \tfrac{1}{4}(a^2+l^2) = \tfrac{1}{4}(b^2+m^2) = \tfrac{1}{4}(c^2+n^2). \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich mit Rücksicht auf die Formel $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$2)\quad \begin{aligned} &\cos\alpha = \frac{l^2}{bc}, \quad \cos\beta = \frac{m^2}{ca}, \quad \cos\gamma = \frac{n^2}{ab}, \\ &tg\,\varrho = \sqrt{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} = \frac{lmn}{abc}, \quad S = 2\frac{lmn}{abc}. \end{aligned}$$

Die Linien R, R_0, r bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit dem der Kathete R_0 anliegenden Winkel ϱ. Man hat demnach

$$3)\quad \begin{aligned} R_0 &= R\cos\varrho = \frac{R}{\sqrt{1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}} = \frac{abcR}{\sqrt{a^2b^2c^2+l^2m^2n^2}}, \\ r &= R\sin\varrho = \frac{R\sqrt{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{\sqrt{1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}} = \frac{lmnR}{\sqrt{a^2b^2c^2+l^2m^2n^2}}. \end{aligned}$$

Da $4FR_0 = abc$ ist, wenn F die Fläche eines Begrenzungsdreiecks des Tetraeders bezeichnet, so ist auch

$$4)\quad F = \frac{\sqrt{a^2b^2c^2+l^2m^2n^2}}{4R}, \quad R_0 = \frac{abc}{4F}, \quad r = \frac{lmn}{4F}.$$

Bekanntlich ist $F = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$ oder nach leichter Umformung

$$*5)\quad F = \tfrac{1}{2}\sqrt{m^2n^2+n^2l^2+l^2m^2}.$$

Die für R_0 und r gefundenen Werthe lassen sich daher auch folgendermassen schreiben:

$$*6) \quad R_0^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}, \quad r^2 = \frac{l^2 m^2 n^2}{4(m^2 n^2 + n^2 l^2 + l^2 m^2)}.$$

Das Volumen V des Tetraeders ist, wie eine einfache geometrische Betrachtung zeigt, gleich dem dritten Theile von demjenigen des zugehörigen Spats. Es ist also

$$*7) \quad V = \tfrac{1}{3} l m n = \tfrac{1}{12}\sqrt{2(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)},$$

ein Resultat, welches sich auch durch Substitution des für S gefundenen Werthes in die Formel $V = \frac{1}{6} abcS$ ableiten lässt.

Durch Vergleichung von F und V ergiebt sich ferner die Tetraederhöhe h. Es ist

$$8) \quad h = \frac{3V}{F} = \frac{abcS}{2} \cdot \frac{4R_0}{abc} = tg\,\varrho \,.\, 4R\cos\varrho = 4R\sin\varrho = 4r.$$

Dieses Resultat ist übrigens geometrisch evident, da der Mittelpunkt der einbeschriebenen Kugel mit dem Schwerpunkt identisch ist.

Die Eckmittellinie des Tetraeders ist $t = \frac{4}{3}R$; dem Vorhergehenden zufolge ist also $t = \frac{h}{3\sin\varrho}$. Da t nicht kleiner als h sein kann, so darf $3\sin\varrho$ den Werth 1 nicht übersteigen. Hieraus ergiebt sich für ϱ die bereits früher erwähnte, durch $\sin\varrho = \frac{1}{3}$ $\left(tg\,\varrho = \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ bestimmte obere Grenze. (Erreicht ϱ diese Grenze, so wird t mit h identisch, das Tetraeder also regulär.)

Um r_0 zu berechnen, benutze ich die bekannte Formel

$$r_0 = 4R_0 \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

indem ich den Factor von R_0 mit Hilfe von § 2, 20) umforme. Darnach ist

$$9) \quad r_0 = R_0 S\, tg\,\mathrm{P} = R\cos\varrho \,.\, 2\,tg\,\mathrm{P} = 2R\sin\varrho\, tg\,\mathrm{P}, \quad r_0 = 2r\, tg\,\mathrm{P}.$$

Die Formeln 2) gestatten eine einfache Berechnung der Kantenwinkel α, β, γ aus den am Tetraeder auftretenden Linien. Um durch letztere auch die Flächenwinkel A, B, Γ auszudrücken, gehe ich von den Relationen 2) des vorigen Paragraphen aus, indem ich in denselben

$$\sin\alpha = \frac{2F}{bc}, \quad \cos\alpha = \frac{l^2}{bc}, \quad tg\,\alpha = \frac{2F}{l^2} \text{ u. s. w.}$$

setze. So ergiebt sich

$$\sin\frac{\mathrm{A}}{2} = \sqrt{\frac{m^2 n^2}{4F^2}} = \frac{mn}{2F}, \quad \cos\frac{\mathrm{A}}{2} = \sqrt{\frac{l^2 \,.\, abac}{bc \,.\, 4F^2}} = \frac{al}{2F};$$

$$10)\quad \sin\frac{\mathsf{A}}{2}=\frac{mn}{2F},\quad \cos\frac{\mathsf{A}}{2}=\frac{al}{2F},\quad tg\frac{\mathsf{A}}{2}=\frac{mn}{al},\quad \sin\mathsf{A}=\frac{ah}{2F}.$$

F kann natürlich noch durch irgend einen der dafür gefundenen Ausdrücke ersetzt werden.

Stellt man sowohl für die Ecke, wie für das Begrenzungsdreieck des Tetraeders den Sinussatz auf, so folgt unmittelbar

$$*11)\quad \frac{a}{\sin\mathsf{A}}=\frac{b}{\sin\mathsf{B}}=\frac{c}{\sin\Gamma}.$$

Der soeben für $\sin\mathsf{A}$ abgeleitete Ausdruck führt zu demselben Resultate und zeigt zugleich, dass der gemeinsame Werth dieser drei Verhältnisse $\frac{2F}{h}$ ist.

Was endlich die für die Ecken des Tetraeders charakteristischen Grössen E, P, ϱ, S anbetrifft, so ergab sich bereits oder ist aus dem Bisherigen leicht abzuleiten

$$12)\quad \begin{cases} tg\,\mathsf{P}=\dfrac{r_0}{2r}=\dfrac{F}{r(a+b+c)}, \\ tg\,\varrho=\dfrac{lmn}{abc}=\dfrac{r}{R_0},\quad \sin\varrho=\dfrac{r}{R}=\dfrac{lmn}{4RF},\quad \cos\varrho=\dfrac{R_0}{R}=\dfrac{abc}{4RF}; \\ S=2\dfrac{lmn}{abc}=\dfrac{2r}{R_0}; \\ tg\dfrac{\mathsf{E}}{2}=\dfrac{2r}{r_0+2R_0},\quad \sin\dfrac{\mathsf{E}}{2}=\dfrac{2rr_0}{F},\quad \cos\dfrac{\mathsf{E}}{2}=\dfrac{r_0(r_0+2R_0)}{F}. \end{cases}$$

$tg\frac{\mathsf{E}}{2}$ findet man vermöge der Beziehung $ctg\frac{\mathsf{E}}{2}=tg\,\mathsf{P}+ctg\,\varrho$. Zu dem für $\sin\frac{\mathsf{E}}{2}$ angegebenen Werthe gelangt man von der Formel $\sin\frac{\mathsf{E}}{2}=tg\frac{\alpha}{2}tg\frac{\beta}{2}tg\frac{\gamma}{2}\times ctg\,\mathsf{P}$ [§ 2, 20] ausgehend, indem man $tg\frac{\alpha}{2}$, $tg\frac{\beta}{2}$, $tg\frac{\gamma}{2}$ in bekannter Weise durch r_0, a, b, c ausdrückt.

Wie sich am Schlusse des vorigen Paragraphen ergab, bestimmen ϱ und P die dreiseitige Ecke, mithin auch die Gestalt des Tetraeders eindeutig. Zur vollständigen Bestimmung des letzteren (abgesehen von seiner Lage) genügt es also, noch irgend eine in ihm auftretende Linie ihrer Länge nach anzugeben.

Um eine Uebersicht über die gesammte Mannichfaltigkeit der gleichseitigen Tetraeder zu gewinnen, kann man demnach zunächst die Länge einer Linie, etwa des Radius der umschriebenen Kugel, als constant annehmen und nur ϱ und P variiren lassen. Man erhält so alle überhaupt möglichen Formen, welche alsdann durch Veränderung jener Linie in jedem Maassstab dargestellt werden können.

Alle einer Kugel einbeschriebenen gleichseitigen Tetraeder bilden, wofern ihre Lage nicht in Betracht kommt, eine doppelt unendliche Man-

nichfaltigkeit, da sie von zwei Constanten, ϱ und P, abhängen. Fasst man zunächst alle diejenigen, für welche ϱ denselben Werth besitzt, in eine Gruppe zusammen, so zeigen die Resultate dieses Paragraphen, dass allen diesen auch r, R_0, h, t gemeinsam sind, da diese Linien nur von R und ϱ abhängen.

Es giebt also, den verschiedenen Werthen von P entsprechend, einfach unendlich viele, wesentlich unterschiedene gleichseitige Tetraeder, welche eine gemeinsame umschriebene und eine gemeinsame einbeschriebene Kugel besitzen. Ihre Höhen sind gleichlang, ebenso ihre Eckmittellinien, welche überdies gegen die zugehörigen Höhen und daher auch gegen die zugehörigen Tetraederebenen dieselbe Neigung haben. Auch die Radien der ihren Begrenzungsdreiecken umschriebenen Kreise sind gleichgross, diejenigen der einbeschriebenen dagegen verschieden. Ungleich sind ferner die Flächen dieser Dreiecke, mithin auch die Volumina der Tetraeder. Aus § 3, 26) folgt nun ferner:

Für $\varrho = arcsin \frac{1}{3}$, d. h. $r = \frac{1}{3} R$, reducirt sich die zugehörige Gruppe auf ein einziges Glied, das reguläre Tetraeder.

Ist $sin \varrho < \frac{1}{3}$ oder, was dasselbe bedeutet, $r < \frac{1}{3} R$, so sind für P und damit auch für $r_0 (= 2r\, tg P)$ zwei Grenzwerthe bestimmt. Denselben entspricht je ein Tetraeder, dessen Ecken und Begrenzungsdreiecke gleichschenklig sind. Diese beiden bilden die Endglieder einer stetigen Reihe von Tetraedern, welche von ungleichseitigen Dreiecken eingeschlossen werden und die man erhält, wenn man P oder r_0 von dem einen zum andern Grenzwerth allmälig übergehen lässt. Alle diese Tetraeder können durch eine einfache Construction erhalten werden, welche sich auf den am Schluss des ersten Paragraphen angegebenen Satz 19) stützt.

Es seien K und k zwei concentrische Kugeln mit den Radien R und $r (< \frac{1}{3} R)$. In einem beliebigen Punkte m der letzteren werde an dieselbe die Tangentialebene gelegt, welche K in dem Kreise K_0 schneiden möge. Es werde ferner auf K ein Punkt A bestimmt, welcher von dieser Ebene die Entfernung $4r$ besitzt und von ihr aus gesehen auf derselben Seite liegt, auf welcher sich der Mittelpunkt beider Kugeln befindet. Dem Vorhergehenden zufolge kann dann jedes um k und gleichzeitig in K beschriebene gleichseitige Tetraeder in eine solche Lage gebracht werden, dass ein Eckpunkt mit A zusammenfällt, während die drei anderen B, C, D auf dem Kreise K_0 liegen. Alle hierbei auftretenden Dreiecke BCD besitzen denselben Höhenschnittpunkt h und denselben Schwerpunkt s. Bezeichnet nämlich a den Fusspunkt der aus A auf die Ebene von K_0 gefällten Senkrechten, so liegt nach § 2, 19) h auf der Geraden ma und zwar halbirt m die Strecke ha. Ferner liegt bekanntlich in jedem Dreieck s auf der (hier mit ma identischen) Geraden hm und es ist $hs : sm = 2 : 1$. (Die Punkte h, s, m, a liegen also harmonisch.)

Nimmt man also auf K_0 einen beliebigen Punkt B an, verlängert man Bs über s hinaus um seine halbe Länge und legt man durch den Endpunkt dieser Verlängerung die zu Bh senkrechte Sehne CD, so ist $ABCD$ ein gleichseitiges Tetraeder. Die Begrenzungsdreiecke desselben sind gleichschenklig, wenn B einer der Endpunkte des durch a gehenden Durchmessers ist. Für zwei in Beziehung auf diesen Durchmesser symmetrische Lagen von B erhält man zwei symmetrische gleichseitige Tetraeder.

Wählt man endlich $\varrho = 0$, so wird auch $r = 0$. Die Begrenzungsdreiecke werden alsdann rechtwinklig und fallen in eine Ebene zusammen. Die zugehörigen Spate besitzen eine unendlich kleine Kantenlinie, im Grenzfall $\left(\text{für } \varrho_1 = \frac{\pi}{4}\right)$ noch eine zweite.

Ich wende mich zum Schluss noch zu einer eigenthümlichen reciproken Beziehung zweier gleichseitiger Tetraeder.

Es ist nach § 1, 3. unmittelbar ersichtlich, dass vier homologe Punkte der Ebenen eines gleichseitigen Tetraeders oder vier durch seine Eckpunkte gehende homologe Ebenen wieder ein gleichseitiges Tetraeder bilden, welches überdies mit dem ursprünglichen die Kantenmittellinien, von deren Länge abgesehen, gemein hat. Um die vorliegende Arbeit nicht allzusehr auszudehnen, gehe ich hier auf die sich aus dieser Bemerkung ergebenden Folgerungen nicht näher ein, sondern beschränke mich auf die Betrachtung eines speciellen Falles, der besonderes Interesse darbietet.

Die vier auf den Radien MA, MB, MC, MD in deren Endpunkten senkrecht stehenden Ebenen bestimmen dem Gesagten zufolge ein neues gleichseitiges Tetraeder $A''B''C''D''$, dessen Mittelpunkt M ist. MA'' steht augenscheinlich auf der Ebene des Dreiecks BCD senkrecht und schneidet dieselbe im Centrum m des um dieses beschriebenen Kreises K_0. Es ist demnach $MA''.Mm = MB^2$, d. h. $R''.r = R^2$, während $r'' = R$ ist, wenn nämlich R'' der Radius der dem Tetraeder $A''B''C''D''$ umschriebenen, r'' derjenige der ihm einbeschriebenen Kugel ist. Werden die soeben erhaltenen Resultate in der Form

$$R'' = \frac{R}{r} \cdot R, \quad r'' = \frac{R}{r} \cdot r$$

geschrieben, so erkennt man, dass in einem aus $A''B''C''D''$ durch Verkleinerung aller linearen Dimensionen im Verhältniss $R:r$ entstehenden Tetraeder $A'B'C'D'$

$$R' = R, \quad r' = r$$

ist. Ein solches erhält man nun offenbar, wenn man die Punkte, in denen die Kugel K von MA'', MB'' u. s. w. getroffen wird, als A', B' u. s. w. bezeichnet. Die Ebenen B', C', D', ... dieses Tetraeders berühren demnach die Kugel k, und die Berührungspunkte sind diejenigen Punkte, in denen sie die zu ihnen normal stehenden Geraden MA, ... treffen.

13) **Die beiden Tetraeder besitzen somit eine gemeinsame umschriebene und eine gemeinsame einbeschriebene Kugel; die nach den Ecken des einen gezogenen Radien stehen senkrecht auf den Ebenen des andern, und umgekehrt.**

Man erhält also $ABCD$ aus $A'B'C'D'$ durch dieselbe Construction, durch welche sich dieses aus jenem ergiebt. Um die Gleichartigkeit der gegenseitigen Beziehung, welche zwischen zwei derartigen Tetraedern besteht, anzudeuten, will ich dieselben reciproke Tetraeder nennen.

Ich bezeichne nun die zu $A'B'C'$ gehörigen Grössen durch dieselben mit einem oberen Index versehenen Buchstaben, wie die entsprechenden auf $ABCD$ bezüglichen. Nach dem Bisherigen ist somit

$$R'=R,\quad r'=r,\quad \text{also auch}\quad \varrho'=\varrho,\quad R'_0=R_0,\quad h'=h,\quad t'=t,\quad S'=S.$$

Um A', B', Γ' zu berechnen, beachte man, dass die Ecke $M(ABC)$ Polarecke von $D'(A'B'C')$ ist. Es ist also $\mathsf{A}'=\pi-\angle BMC$, und daher

$$14)\quad \begin{aligned} \cos\frac{\mathsf{A}'}{2} &= \sin\frac{BMC}{2}=\frac{a}{2R}=\frac{2R_0\sin\alpha}{2R} \\ &= \cos\varrho\sin\alpha, \\ \sin\frac{\mathsf{A}'}{2} &= \cos\frac{BMC}{2}=\frac{l}{2R}=\frac{\sqrt{bc\cos\alpha}}{2R}=\frac{2R_0\sqrt{\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha}}{2R} \\ &= \sin\varrho\sqrt{tg\beta\, tg\gamma}. \end{aligned}$$

Nach § 2, 2) ist $\sin\frac{\mathsf{A}}{2}=\sqrt{ctg\beta\, ctg\gamma}$. Hieraus ergiebt sich

$$15)\quad \sin\frac{\mathsf{A}}{2}\sin\frac{\mathsf{A}'}{2}=\sin\frac{\mathsf{B}}{2}\sin\frac{\mathsf{B}'}{2}=\sin\frac{\Gamma}{2}\sin\frac{\Gamma'}{2}=\sin\varrho=\sin\varrho'.$$

Infolge dessen gilt auch die Gleichung

$$\frac{\sin\frac{\mathsf{B}}{2}\sin\frac{\Gamma}{2}}{\sin\frac{\mathsf{A}}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\mathsf{B}'}{2}\sin\frac{\Gamma'}{2}}{\sin\frac{\mathsf{A}'}{2}}=\frac{\sin^2\varrho}{\sin\varrho}=\sin\varrho$$

oder, mit Rücksicht auf § 2, 13):

$$16)\quad ctg\alpha\, ctg\alpha'=ctg\beta\, ctg\beta'=ctg\gamma\, ctg\gamma'=\sin\varrho=\sin\varrho'.$$

Die Gleichartigkeit der gegenseitigen Beziehung tritt in diesen Formeln sehr deutlich hervor.

Es lassen sich ohne Schwierigkeit zahlreiche weitere Relationen aufstellen. Eine davon, welche die die Ecken beider Tetraeder definirenden Constanten verknüpft, mag hier noch abgeleitet werden. Nach 15) ist

$$\sin\frac{\mathsf{A}}{2}\sin\frac{\mathsf{B}}{2}\sin\frac{\Gamma}{2}\cdot\sin\frac{\mathsf{A}'}{2}\sin\frac{\mathsf{B}'}{2}\sin\frac{\Gamma'}{2}=\sin^3\varrho.$$

Andererseits folgt aus § 2, 18), 20)

$$ctg\,\mathsf{P}\,sin\frac{\mathsf{E}}{2}=\frac{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\mathsf{A}}{2}\cos\frac{\mathsf{B}}{2}\cos\frac{\Gamma}{2}\cdot tg\frac{\mathsf{A}}{2}\,tg\frac{\mathsf{B}}{2}\,tg\frac{\Gamma}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$=2\sin\frac{\mathsf{A}}{2}\sin\frac{\mathsf{B}}{2}\sin\frac{\Gamma}{2}.$$

Demnach lässt sich die Beziehung zweier Ecken, welche zu reciproken gleichseitigen Tetraedern gehören, vollständig durch die Gleichungen

$$17)\qquad ctg\,\mathsf{P}\,sin\frac{\mathsf{E}}{2}\,ctg\,\mathsf{P}'\,sin\frac{\mathsf{E}'}{2}=4\sin^3\varrho=4\sin^3\varrho'$$

ausdrücken.

Kehre ich noch einmal zu der vorhin (S. 335) betrachteten, einem bestimmten Werthe von ϱ entsprechenden Gruppe von gleichseitigen Tetraedern zurück, so ist es einleuchtend, dass das irgend einem dieser Tetraeder reciproke derselben Gruppe angehört, da in diesem ϱ denselben Werth besitzt. Insbesondere sind die beiden von gleichschenkligen Dreiecken begrenzten Tetraeder, welche als Endglieder der ganzen stetigen Reihe erschienen, einander reciprok. Lässt man also ein gleichseitiges Tetraeder bei constantem ϱ und R durch allmälige Veränderung von P von dem einen jener beiden zum andern übergehen, so durchläuft das ihm reciproke dieselbe Reihe in umgekehrter Richtung.† Es muss demnach auch für jeden Werth von ϱ ein sich selbst reciprokes Tetraeder geben. Hieraus folgt allerdings noch nicht, dass auch jeder einzelne Winkel sich selbst entspricht, d. h., dass $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$ ist. Vielmehr sind zunächst drei wesentlich verschiedene Beziehungen denkbar, nämlich:

$\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$ oder $\alpha=\beta'$, $\beta=\gamma'$, $\gamma=\alpha'$ oder $\alpha=\alpha'$, $\beta=\gamma'$, $\gamma=\beta'$.

Man erkennt mit Rücksicht auf 16) leicht, dass die beiden ersten Möglichkeiten $\alpha=\beta=\gamma$ ergeben und somit ausschliesslich auf das reguläre Tetraeder führen. Da sich dieses indessen auch der dritten Beziehung unterordnet, so hat man allgemein für ein sich selbst reciprokes Tetraeder

$$\alpha=\alpha',\quad \beta=\gamma',\quad \gamma=\gamma',\quad \text{also}\quad ctg^2\alpha=\sin\varrho,\quad ctg\,\beta\,ctg\,\gamma=\sin\varrho$$

oder

$$18)\quad ctg\,\alpha=\sqrt{\sin\varrho},\quad \cos(\beta-\gamma)=-\frac{\cos\alpha}{\cos2\alpha}=\frac{(1+\sin\varrho)\sqrt{1+\sin^2\varrho}}{(1-\sin\varrho)\sin\varrho}.$$

Durch das Bisherige ist nur bewiesen, dass ein diesen Formeln gemäss bestimmtes, zu einem gewissen Werthe von ϱ gehöriges Tetraeder dieselben Winkel besitzt, wie sein reciprokes; es bleibt noch zu entscheiden, ob es demselben congruent oder symmetrisch ist. Eine auf die ursprüngliche geometrische Definition der reciproken Beziehung zurückgehende Betrachtung führt leicht zu dem Resultat, dass in der That Congruenz stattfindet.

† Dabei ist von der speciellen Lage, in welcher sich bei der Construction das reciproke Tetraeder ergiebt, natürlich abzusehen.

XVII.

Allgemeine Formeln zur Bestimmung der Cardinalpunkte eines brechenden Systems centrirter sphärischer Flächen, mittels Kettenbruchdeterminanten dargestellt.

Von

Prof. Dr. Ludwig Matthiessen
in Rostock.

Auf die Darstellung und Discussion der dioptrischen Kettenbrüche von Gauss* ist in neuester Zeit mehrfach die Determinantenform mit Vortheil angewendet worden. Unter Anderen** bediente sich Ferraris derselben zur Ableitung der allgemeinen Formeln für die Bestimmung der Cardinalpunkte eines Systems beliebig vieler centrirter in Luft befindlicher Linsen mit Rücksicht auf die zweckmässigste Construction von Fernrohrobjectiven. Wir stellen uns die Aufgabe, die Formeln für ein System von a centrirten sphärischen Flächen, welche von $a+1$ verschieden brechenden Medien begrenzt sind, zu verallgemeinern. Dieselben lassen sich dann leicht auf eine Combination von beliebig vielen centrirten Systemen übertragen, welche durch verschieden brechende Medien getrennt und deren Cardinalpunkte gegeben sind. Sind die trennenden Medien von gleichem Brechungsvermögen, so werden die Partialsysteme für sich äquifocal und wir gelangen zu den von Ferraris aufgestellten Formeln. Während Ferraris synthetisch verfährt, wollen wir zur grösseren Allgemeinheit ein analytisches Verfahren einschlagen.

Sind $S_1, S_2, \ldots S_a$ oder $\Sigma_a, \Sigma_{a-1}, \ldots \Sigma_1$ die Scheitelpunkte der aufeinander folgenden Flächen, F und Φ die beiden Hauptbrennpunkte, f und φ die Brennweiten, H_α und H_β die Hauptpunkte, K_α und K_β die Knotenpunkte, α_1 und α_2 die Oerter der Hauptpunkte bezüglich der ersten und letzten Fläche, k_1 und k_2 die der Knotenpunkte, so werden die dioptrischen Gleichungen bestimmt sein, wenn gefunden sind:

---

* Gauss, Dioptrische Untersuchungen. Göttingen 1841.

** Casorati, Le proprietà cardinali dei cannocchiali anche non centrati. Milano 1872. S. 102. — Matthiessen, L., Die Differentialgleichungen der Dioptrik continuirlich geschichteter Linsen und ihre Anwendung auf die Dioptrik der Krystalllinse. Zeitschr. f. Math. u. Phys. XXIV, S. 305, 1879; Pflüger's Arch. f. d. ges. Physiol. XIX, S. 484, 1879. — Ferraris, Galileo, Sui cannocchiali con obbiettivo composto di più lenti. Torino 1880. S. 7; Atti R. Acc. di Torino XVI.

I. $S_1 F$ und $\Sigma_1 \Phi$,
II. $H_a F = f$ und $H_\beta \Phi = \varphi$,
III. $H_a S_1 = \alpha_1$ und $H_\beta \Sigma_1 = \alpha_2$,
IV. $K_a S_1 = k_1$ und $K_\beta \Sigma_1 = k_2$.

1. Wir suchen zunächst die Relationen für die Focaldistanzen $S_1 F$ und $\Sigma_1 \Phi$.

Bezeichnen wir die vorderen Brennweiten der a Flächen bezüglich der sie einschliessenden Medien mit $f_1, f_2, \ldots f_a$, die hinteren mit φ_1, $\varphi_2, \ldots \varphi_a$, die Abstände der Object- und Bildweiten bezüglich der einzelnen Flächen mit $s_0, s_1, s_2, \ldots s_{2a-1}$, so ist

$$1) \qquad \frac{f_1}{s_0} + \frac{\varphi_1}{s_1} = \frac{f_2}{s_2} + \frac{\varphi_2}{s_3} = \ldots \frac{f_a}{s_{2a-2}} + \frac{\varphi_a}{s_{2a-1}} = 1,$$

wobei die Strecken f_m und s_{2m-2} als wesentlich negative Grössen zu betrachten sind.

Denken wir uns den Hauptobjectpunkt axial oder paraxial vor dem System in B_1, sein Bild in B_2, dessen Bild in B_3 u. s. f., und sind d_1, $d_2, \ldots d_{a-1}$ die gegenseitigen Abstände der Flächen, so wird offenbar sein:

$S_1 B_1 = s_0$, $\qquad S_1 B_2 = s_1 = s_2 + d_1$,
$S_2 B_2 = s_2 = s_1 - d_1$; $\qquad S_2 B_3 = s_3 = s_4 + d_2$,
. . . .
$S_a B_a = s_{2a-2} = s_{2a-3} - d_{a-1}$; $\qquad S_a B_{a+1} = s_{2a-1}$.

Aus der Gleichung 1) ergeben sich folgende Relationen:

$$2) \qquad \begin{aligned} s_0 &= f_1 + \frac{f_1 \varphi_1}{d_1 - \varphi_1 + s_2}, \\ s_2 &= f_2 + \frac{f_2 \varphi_2}{d_2 - \varphi_2 + s_4}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ s_{2a-2} &= f_a + \frac{f_a \varphi_a}{-\varphi_a + s_{2a-1}}. \end{aligned}$$

Wenn dagegen der Hauptobjectpunkt hinter dem System in β_1 liegt, sein Bild in β_2 u. s. f., so wird sein:

$\Sigma_1 \beta_1 = s_{2a-1}$, $\qquad \Sigma_1 \beta_2 = s_{2a-2} = s_{2a-3} - d_{a-1}$,
$\Sigma_2 \beta_2 = s_{2a-3} = s_{2a-2} + d_{a-1}$, $\qquad \Sigma_2 \beta_3 = s_{2a-4} = s_{2a-5} - d_{a-2}$,
. . . .
$\Sigma_a \beta_a = s_1 = s_2 + d_1$; $\qquad \Sigma_a \beta_{a+1} = s_0$.

Aus den Gleichungen 1) ergeben sich die Ausdrücke:

$$3) \qquad \begin{aligned} s_{2a-1} &= \varphi_a - \frac{\varphi_a f_a}{d_{a-1} + f_a - s_{2a-3}}, \\ s_{2a-3} &= \varphi_{a-1} - \frac{\varphi_{a-1} f_{a-1}}{d_{a-2} + f_{a-1} - s_{2a-5}}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ s_1 &= \varphi_1 - \frac{\varphi_1 f_1}{f_1 - s_0}. \end{aligned}$$

Werden nun s_{2a-1} resp. s_0 gleich ∞, so geht B_1 in F, resp. β_1 in Φ über. Auf diese Weise werden die Focaldistanzen von der ersten und letzten Fläche bestimmt durch die beiden Kettenbrüche:

$$4)\quad S_1F = f_1 + \frac{f_1\varphi_1}{f_2 - \varphi_1 + d_1 + \frac{f_2\varphi_2}{f_3 - \varphi_2 + d_2 + \dots + \frac{f_{a-1}\varphi_{a-1}}{f_a - \varphi_{a-1} + d_{a-1}}}},$$

$$5)\quad \Sigma_1\Phi = \varphi_a - \frac{\varphi_a f_a}{f_a - \varphi_{a-1} + d_{a-1} + \frac{\varphi_{a-1}f_{a-1}}{f_{a-1} - \varphi_{a-2} + d_{a-2} + \dots + \frac{\varphi_2 f_2}{f_2 - \varphi_1 + d_1}}}.$$

Wir führen jetzt einige abgekürzte Bezeichnungen ein. Sind F_1 und Φ_1 die partiellen Brennpunkte der Fläche S_1, F_2 und Φ_2 die der Fläche S_2 u. s. f., so nennen wir

$$F_1\Phi_1 = i_1,\quad F_2\Phi_2 = i_2 \text{ u. s. w.}$$

die primären Focalinterstitien,

$$\Phi_1F_2 = J_1,\quad \Phi_2F_3 = J_2 \text{ u. s. w.}$$

die secundären Focalinterstitien.

Da nun allgemein

$$\Phi_mF_{m+1} = f_{m+1} - \varphi_m + d_m = J_m$$

das m^{te} secundäre Focalinterstitium J_m ist, so lassen sich die gefundenen Focaldistanzen 4) und 5) durch folgende Determinantenquotienten darstellen:

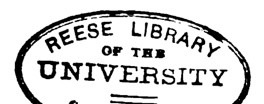
$$6)\quad S_1F = \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & 0 & . & 0 \\ -f_1 & J_1 & \varphi_2 & . & 0 \\ 0 & -f_2 & J_2 & . & . \\ . & . & . & . & \varphi_{a-1} \\ 0 & 0 & . & -f_{a-1} & J_{a-1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & J_1 & \varphi_2 & . & 0 \\ 0 & -f_2 & J_2 & . & . \\ . & . & . & . & \varphi_{a-1} \\ 0 & 0 & . & -f_{a-1} & J_{a-1} \end{vmatrix},$$

$$7)\quad \Sigma_1\Phi = \begin{vmatrix} \varphi_a & \varphi_a & 0 & . & 0 \\ f_a & J_{a-1} & \varphi_{a-1} & . & 0 \\ 0 & -f_{a-1} & J_{a-2} & . & . \\ . & . & . & . & \varphi_2 \\ 0 & 0 & . & -f_2 & J_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & J_{a-1} & \varphi_{a-1} & . & 0 \\ 0 & -f_{a-1} & J_{a-2} & . & . \\ . & . & . & . & \varphi_2 \\ 0 & 0 & . & -f_2 & J_1 \end{vmatrix}.$$

Da man jede Determinante, ohne ihren Werth zu verändern, um ihre Nebendiagonale drehen kann, so sind die beiden Nenner gleichwerthig; diese Determinante

$$8)\quad \begin{vmatrix} J_1 & \varphi_2 & . & 0 \\ -f_2 & J_2 & . & 0 \\ . & . & . & \varphi_{a-1} \\ 0 & 0 & -f_{a-1} & J_{a-1} \end{vmatrix} = R_{a-1}$$

nennen wir fortan die Interstitialdeterminante. Weil ausserdem



$$\begin{vmatrix} J_2 & \varphi_3 & . & 0 \\ -f_3 & J_3 & . & . \\ . & . & . & \varphi_{a-1} \\ 0 & . & -f_{a-1} & J_{a-1} \end{vmatrix} = \frac{\partial R_{a-1}}{\partial J_1}, \quad \begin{vmatrix} J_1 & \varphi_2 & . & 0 \\ -f_2 & J_2 & . & . \\ . & . & . & \varphi_{a-2} \\ 0 & . & -f_{a-2} & J_{a-2} \end{vmatrix} = R_{a-2} = \frac{\partial R_{a-1}}{\partial J_{a-1}},$$

so ergeben sich für die beiden Focaldistanzen die Ausdrücke:

$$9) \qquad S_1 F = \frac{f_1 R_{a-1} + f_1 \varphi_1 \dfrac{\partial R_{a-1}}{\partial J_1}}{R_{a-1}},$$

$$10) \qquad \Sigma_1 \Phi = \frac{\varphi_a R_{a-1} - f_a \varphi_a \dfrac{\partial R_{a-1}}{\partial J_{a-1}}}{R_{a-1}}.$$

Entwickelt man den Kettenbruch 5) nur bis zum ersten Partialnenner, also

$$\Sigma_1 \Phi = \varphi_a - \frac{\varphi_a f_a}{d_{a-1} + f_a - s_{2a-3}} = \varphi_a - \frac{\varphi_a f_a}{M_{a-1}},$$

so hat der Nenner M_{a-1} eine bemerkenswerthe geometrische Bedeutung. Es ist nämlich

$$M_{a-1} = d_{a-1} + f_a - s_{2a-3} = \beta_2 F_a,$$

und weil β_2 der hintere Brennpunkt des vorangehenden Systems von $a-1$ Flächen ist, so bedeutet M_{a-1} den Abstand des vorderen Brennpunktes der hinzutretenden Fläche S_a oder Σ_1 vom hinteren Brennpunkte des vorangehenden (wachsenden) Systems. Wir nennen deshalb M_{a-1} das secundäre Focalinterstitium des wachsenden Systems.

Weiter ist nun

$$M_{a-1} = \frac{\varphi_a f_a}{\varphi_a - \Sigma_1 \Phi},$$

und wenn wir den Kettenbruch 5) einführen,

$$11) \; M_{a-1} = \begin{vmatrix} J_{a-1} & \varphi_{a-1} & 0 & . & 0 \\ -f_{a-1} & J_{a-2} & \varphi_{a-2} & . & 0 \\ 0 & -f_{a-2} & J_{a-3} & . & . \\ . & . & . & . & \varphi_2 \\ 0 & 0 & . & -f_2 & J_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & J_{a-2} & \varphi_{a-2} & . & 0 \\ 0 & -f_{a-2} & J_{a-3} & . & . \\ . & . & . & . & \varphi_2 \\ 0 & 0 & . & -f_2 & J_1 \end{vmatrix}$$

Dreht man die beiden Determinanten um ihre Nebendiagonalen, so erhält man die Relation

$$12) \qquad M_{a-1} = \frac{R_{a-1}}{\left(\dfrac{\partial R_{a-1}}{\partial J_{a-1}}\right)} = \frac{R_{a-1}}{R_{a-2}}.$$

Es lässt sich noch eine andere Gleichung für M_{a-1} finden. Bezeichnen wir nämlich die hintere Brennweite desselben vorangehenden (wachsenden) Systems von $a-1$ Flächen mit φ_{-1} und den Abstand seines II. Hauptpunktes von Σ_1 mit D_{a-1}, so ist auch

13) $$M_{a-1} = f_a - \varphi_{-1} + D_{a-1}.$$

Wir nennen fortan D_{a-1} das secundäre Hauptpunktsinterstitium des wachsenden Systems. Da die Hauptpunkte der einzelnen Flächen in diesen selbst coincidiren, so ist an sich klar, dass die primären Hauptpunktsinterstitien gleich Null, die secundären gleich $d_1, d_2, \ldots d_a$ sind. Der Werth von D_{a-1} wird sich durch die Interstitialdeterminante ausdrücken lassen, wenn dies für die Brennweite φ möglich ist.

2. Wir suchen demgemäss die Relationen für die sub II erwähnten Focaldistanzen, also für die Hauptbrennweiten f und φ.

Wenn die Abstände conjugirter Punkte bezüglich der Hauptpunkte H_a und H_β des ganzen Systems mit x_0 und x_1 bezeichnet werden, so ist

$$\frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_1} = 1.$$

Betrachten wir nach Gauss statt der Flächen ihre Tangentialebenen und denken uns ein unendlich dünnes Strahlenbündel eines axialen oder paraxialen leuchtenden Punktes von vorn in das System eintretend, so schneidet dasselbe die aufeinander folgenden Flächen in Punkten, deren Ordinaten der Reihe nach sind:

$$S_1 A = y_1, \quad S_1 B = y_2, \quad S_3 C = y_3, \quad \ldots \quad S_a Z = y_a.$$

Aus ähnlichen Dreiecken ergiebt sich alsdann folgende Reihe von Proportionen:

$$\begin{aligned} y_1 &: s_1 = y_2 : s_2, \\ y_2 &: s_3 = y_3 : s_4, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y_{a-1} &: s_{2a-3} = y_a : s_{2a-2}. \end{aligned}$$

Ist ferner η die gleiche Ordinate der Punkte, in welchen die beiden Hauptebenen vom eintretenden und austretenden Strahlenbündel geschnitten werden, so ist noch

$$\eta : x_0 = y_1 : s_0, \quad y_a : s_{2a-1} = \eta : x_1.$$

Die Multiplication sämmtlicher Proportionen ergiebt die Gleichung

14) $$\frac{x_0}{x_1} = \frac{s_0 . s_2 . s_4 \ldots s_{2a-2}}{s_1 . s_3 . s_5 \ldots s_{2a-1}}.$$

Ist der vordere Hauptbrennpunkt F leuchtender Punkt, so ist $x_0 = f$, $s_0 = S_1 F$ und $x_1 = s_{2a-1} = \infty$, also

15) $$f = S_1 F \cdot \frac{s_2 . s_4 . s_6 \ldots s_{2a-2}}{(s_2 + d_1).(s_4 + d_2).(s_6 + d_3) \ldots (s_{2a-2} + d_{a-1})}.*$$

Ist dagegen der hintere Brennpunkt Φ leuchtender Punkt, so ist $x_1 = \varphi$, $s_{2a-1} = \Sigma_1 \Phi$ und $x_0 = s_0 = \infty$, folglich

* Matthiessen, Grundriss der Dioptrik geschichteter Linsensysteme. Leipzig 1877. S. 79.

16) $$\varphi = \Sigma_1 \Phi \cdot \frac{s_1 . s_3 . s_5 \ldots s_{2a-3}}{(s_1 - d_1).(s_3 - d_2).(s_5 - d_3)\ldots(s_{2a-3} - d_{a-1})}.$$

Mit Hilfe der Gleichungssysteme 2) und 3) lassen sich nun die Quotienten

$$\frac{s_{2m-2}}{s_{2m-2} + d_{m-1}} \quad \text{und} \quad \frac{s_{2m-3}}{s_{2m-3} - d_{m-1}}$$

auf folgende Art in Determinanten ausdrücken.

Man findet leicht mit Voraussetzung von 6)

$$S_1 F = f_1 \begin{vmatrix} 1 & \varphi_1 & 0 & . \\ -1 & J_1 & \varphi_2 & . \\ 0 & -f_2 & J_2 & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} : R_{a-1} = f_1 U_1 : R_{a-1},$$

$$\frac{s_2}{s_2 + d_1} = f_2 \begin{vmatrix} 1 & \varphi_2 & 0 & . \\ -1 & J_2 & \varphi_3 & . \\ 0 & -f_3 & J_3 & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} : \quad U_1 \quad = f_2 U_2 : U_1$$

u. s. f.

und schliesslich

$$\frac{s_{2a-2}}{s_{2a-2} + d_{a-1}} = f_a |1| : U_{a-1} = f_a U_a : U_{a-1}.$$

Demnach ist $U_a = 1$ und man erhält durch Multiplication aller dieser Gleichungen

17) $$f = \frac{f_1 f_2 f_3 \cdots f_a}{R_{a-1}}.$$

Auf gleiche Art findet man

18) $$\varphi = \frac{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \ldots \varphi_a (-1)^{a-1}}{R_{a-1}}.$$

Aus der Gleichung 12) folgt durch Analogie

$$R_{a-1} = R_{a-2} . M_{a-1},$$
$$R_{a-2} = R_{a-3} . M_{a-2},$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$R_1 \; = \; R_0 \; . \; M_1 .$$

Da für $a = 2$ noch $R_1 = M_1 = J_1$ gefunden wird, so ist $R_0 = 1$ und die Multiplication der Gleichungen ergiebt

19) $$R_{a-1} = M_1 M_2 \ldots M_{a-1},$$

in Worten: Die Interstitialdeterminante ist gleich dem Producte aller aufeinander folgenden Focalinterstitien des wachsenden Systems. Somit ist auch

20) $$f = \frac{f_1 f_2 f_3 \cdots f_a}{M_1 M_2 M_3 \ldots M_{a-1}},$$

21) $$\varphi = \frac{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \ldots \varphi_a (-1)^{a-1}}{M_1 M_2 M_3 \ldots M_{a-1}}.*$$

* Vergl. Grundriss etc. S. 71.

Aus beiden Gleichungen folgt sofort die bekannte Relation

22) $$\varphi = -n_1 n_2 \ldots n_a f = -nf.$$

3. Die Relationen 9), 10), 17) und 18) setzen uns in den Stand, die Werthe der Hauptpunktsdistanzen α_1 und α_2, sowie der Knotenpunktsdistanzen k_1 und k_2 durch die Interstitialdeterminante auszudrücken. Es ist nämlich

$$H_a S_1 = \alpha_1 = \quad f - S_1 F,$$
$$H_\beta S_a = \alpha_2 = \quad \varphi - \Sigma_1 \Phi,$$
$$K_a S_1 = k_1 = -\varphi - S_1 F,$$
$$K_\beta S_a = k_2 = -f - \Sigma_1 \Phi.$$

Man findet demgemäss

23) $$\alpha_1 = \frac{f_1 f_2 \ldots f_a}{R_{a-1}} - \left(f_1 + \frac{f_1 \varphi_1}{R_{a-1}} \cdot \frac{\partial R_{a-1}}{\partial J_1}\right),$$

24) $$\alpha_2 = \frac{\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_a (-1)^{a-1}}{R_{a-1}} - \left(\varphi_a - \frac{\varphi_a f_a}{R_{a-1}} \cdot \frac{\partial R_{a-1}}{\partial J_{a-1}}\right),$$

25) $$k_1 = -\frac{\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_a (-1)^{a-1}}{R_{a-1}} - \left(f_1 + \frac{f_1 \varphi_1}{R_{a-1}} \cdot \frac{\partial R_{a-1}}{\partial J_1}\right),$$

26) $$k_2 = -\frac{f_1 f_2 \ldots f_a}{R_{a-1}} - \left(\varphi_a - \frac{\varphi_a f_a}{R_{a-1}} \cdot \frac{\partial R_{a-1}}{\partial J_{a-1}}\right).$$

Es lässt sich nunmehr auch das secundäre Hauptpunktsinterstitium des wachsenden Systems mit Hilfe von 12) und 13) durch die Interstitialdeterminante ausdrücken; es ist

$$D_{a-1} = \varphi_{-1} - f_a + M_{a-1},$$

also

27) $$D_{a-1} = \frac{\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_{a-1} (-1)^{a-2}}{R_{a-2}} - \left(f_a - \frac{R_{a-1}}{R_{a-2}}\right).$$

Ein Gleiches gilt endlich von dem Interstitium der Hauptpunkte H_a, H_β und der Knotenpunkte K_a, K_β. Dasselbe ist

28) $$\varepsilon = \Delta + \alpha_1 - \alpha_2 = \Delta + k_1 - k_2,$$

wo $\Delta = d_1 + d_2 + \ldots + d_{a-1}$ zu setzen ist.

4. Wenn statt einer Reihe von brechenden Flächen lauter Systeme gegeben sind, so gelten sämmtliche Formeln auch für diesen Fall. Weil die Fundamentalformel 1) dieselbe bleibt, so bleibt die Interstitialdeterminante unverändert die gleiche, nur treten an die Stelle der singulären Abscissenanfangspunkte S_1, S_2, ... die Doppelpunkte

$$H_{1,1} H_{2,1}, \quad H_{1,2} H_{2,2}, \quad H_{1,3} H_{2,3} \text{ u. s. f.}$$

Setzt man die secundären Hauptpunktsinterstitien der Partialsysteme wieder, wie folgt:

$$H_{2,1} H_{1,2} = d_1, \quad H_{2,2} H_{1,3} = d_2, \quad H_{2,3} H_{1,4} = d_3 \text{ u. s. f.},$$

so ist

$$H_{1,1} B_1 = s_0, \qquad H_{2,1} B_2 = s_1 = s_2 + d_1,$$
$$H_{1,2} B_2 = s_2 = s_1 - d_1, \qquad H_{2,2} B_3 = s_3 = s_4 + d_2,$$

u. s. w. u. s. w.

Es ist mithin auch für diesen allgemeinen Fall $J_1 = f_2 - \varphi_1 + d_1$. Dabei bleibt zu beachten, dass

a) die Haupt- und Knotenpunktsdistanzen α_1 und k_1 der Combination aller Partialsysteme vom I. Hauptpunkte des ersten Systems, α_2 und k_2 vom II. Hauptpunkte des letzten Systems,

b) das secundäre Focalinterstitium des wachsenden Systems M_{a-1} jedesmal vom II. Brennpunkte der Combination aller vorangehenden Systeme bis zum I. Brennpunkte des hinzutretenden Systems, und

c) das secundäre Hauptpunktsinterstitium des wachsenden Systems D_{a-1} jedesmal vom II. Hauptpunkte der Combination aller vorangehenden Systeme bis zum I. Hauptpunkte des hinzutretenden Systems gerechnet werden.

Wenn die begrenzenden Medien von gleichem Brechungsvermögen sind, so wird offenbar $f_1 = -\varphi_1$, $f_2 = -\varphi_2$ u. s. f. und $f = -\varphi$. In diesem Falle wird die Interstitialdeterminante

$$R_{a-1} = \begin{vmatrix} J_1 & \varphi_2 & 0 & . & 0 \\ \varphi_2 & J_2 & \varphi_3 & . & 0 \\ 0 & \varphi_3 & J_3 & . & . \\ . & . & . & . & \varphi_{a-1} \\ 0 & 0 & . & \varphi_{a-1} & J_{a-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_{a-1} & \varphi_{a-1} & 0 & . & 0 \\ \varphi_{a-1} & J_{a-2} & \varphi_{a-2} & . & 0 \\ 0 & \varphi_{a-2} & J_{a-3} & . & . \\ . & . & . & . & \varphi_2 \\ 0 & 0 & . & \varphi_2 & J_1 \end{vmatrix}.$$

5. Wenn ein centrirtes System brechender sphärischer Flächen von continuirlich variabler optischer Dichtigkeit vorliegt, welches von zwei Medien begrenzt ist, die mit der Trennungsfläche gleiche Brechungsvermögen besitzen, so lassen sich mit Hilfe der aufgestellten Gleichungen auch die Differenziale der Variabeln f, φ, α_1, α_2 und ε darstellen, wie bereits früher von mir in mehreren Abhandlungen gezeigt worden ist.*

* Man sehe: Zeitschr. f. Math. u. Phys. XXIV, 1879; XXVI, 1881; XXVIII, 1883; und Pflüger's Arch. f. d. ges. Physiol. XIX, 1879; XXXII, 1883. Man vergl. auch Hermann, Die Differentialgleichungen etc., in Pflüger's Arch. XXVII, S. 309, 1882.

Rostock, 14. April 1884.

XVIII.

Ueber die einer algebraischen Fläche eingeschriebenen regulären Tetraeder, mit Berücksichtigung der Flächen zweiter Ordnung.

Von

Dr. Carl Hossfeld

in Jena.

Die nachfolgenden Zeilen beschäftigen sich hauptsächlich mit der Aufgabe: Einen Ueberblick zu gewinnen über die Gesammtheit der einer algebraischen Fläche eingeschriebenen regulären Tetraeder.

Die Möglichkeit einer die allgemeine Aufgabe determinirenden Fragestellung ist erst durch die Kenntniss der Mannichfaltigkeit der regulären einer Fläche eingeschriebenen Tetraeder gegeben. Offenbar kommt die Bestimmung dieser Mannichfaltigkeit auf die Bestimmung der Mannichfaltigkeit aller ähnlichen Flächen gegebener Ordnung, welche einem (beliebigen) Tetraeder umschrieben sind, hinaus. Nun giebt es im Raume siebenfach-unendlich viel ähnliche (und congruente) Flächen n^{ter} Ordnung für $n > 1$ (nämlich: die sechsfach-unendlich vielen Bewegungen des Raumes verwandeln die gegebene Fläche in congruente Flächen, hierzu kommen für jede Lage derselben die einfach-unendlich vielen Aehnlichkeitstransformationen in Bezug auf ein mit der Fläche fest verbundenes Centrum). Also sind unter sämmtlichen einem Tetraeder umschriebenen (oder durch vier feste Punkte hindurchgehenden) Flächen n^{ter} Ordnung dreifach-unendlich viel ähnliche, oder was wesentlich dasselbe ist: einer Fläche n^{ter} Ordnung ($n > 1$) können dreifach-unendlich viel reguläre Tetraeder eingeschrieben werden.

Damit ist zugleich gesagt, dass die Flächen, Kanten und Ecken solcher Tetraeder eine dreifach-unendliche Mannichfaltigkeit bilden. Daher muss jede beliebige Ebene des Raumes im Allgemeinen eine endliche Anzahl von Tetraederflächen enthalten; dagegen wird nicht jeder beliebige Strahl die Kante eines regulären eingeschriebenen Tetraeders tragen, vielmehr werden diese Kanten innerhalb der vierfach-unendlichen Strahlenmannichfaltigkeit einen Complex bilden; endlich muss jeder Punkt der gegebenen Fläche Eckpunkt von unendlich-vielen Tetraedern der erwähnten Art sein.

Hiernach treten an Stelle des allgemeinen Problems folgende Hauptfragen:

1. Wieviel Seitenflächen regulärer, einer Fläche n^{ter} Ordnung eingeschriebener Tetraeder liegen im Allgemeinen in jeder Ebene?

2. Welches ist der Grad des durch die Kanten aller regulären, einer Fläche n^{ter} Ordnung eingeschriebenen Tetraeder gebildeten Strahlencomplexes?

3. Welchen Kegel erzeugen die Kanten, welchen Kegel umhüllen die Flächen sämmtlicher regulären Tetraeder im Allgemeinen, welche in einem Punkte einer Fläche n^{ter} Ordnung dieser eingeschrieben sind?

Diesen unmittelbar sich ergebenden Fragen lässt sich leicht eine Fülle weiterer anreihen. In der vorliegenden Arbeit wird nur die erste Hauptfrage erledigt; das allgemeine Problem erscheint durch ihre Beantwortung als im Wesentlichen gelöst. Der erste Theil bezieht sich auf algebraische Flächen überhaupt, der zweite Theil verbreitet sich über die Formen, welche die allgemeinen Resultate für den besondern Fall der Flächen zweiter Ordnung annehmen.

I. Theil.

§ 1. Darlegung einer fundamentalen geometrischen Betrachtungsweise.

Die Lösung der Aufgabe auf geometrischem Wege gelingt mit Hilfe einer Betrachtungsweise, die sich im Allgemeinen folgendermassen charakterisiren lässt. Gewisse, zunächst in der Ebene sich abspielende Bewegungsvorgänge werden als Projectionen räumlicher Configurationen aufgefasst, indem man den Parameter der Bewegung als dritte Coordinate deutet. Diese Auffassung kann als eine rein geometrische bezeichnet werden, da sie sich nur auf die Grundsätze der Projection stützt. Die weiterhin verwerthete Deutung des Parameters einer räumlichen Bewegung als vierte Coordinate im Raume von vier Dimensionen ist dagegen nur eine geometrische Interpretation analytischer Gleichungen.

Durch die veränderte Deutung der Gleichungen können gewisse Eliminationsresultate sofort überschaut werden, weil sie nun in Gestalt bekannter algebraisch-geometrischer Sätze sich darbieten.

Doch wird die allgemeine Auseinandersetzung an Verständlichkeit gewinnen durch Betrachtung derjenigen besonderen Fälle, welche für das Spätere von Wichtigkeit sind.

1. Eine Curve $C^{(n)}$ n^{ter} Ordnung bewege sich in der Ebene ε derart, dass ihre Punkte parallele gerade Linien beschreiben. Jedes Glied $C_t^{(n)}$

der so entstehenden Curvenschaar kann als Resultat der Parallelprojection eines zu ε parallelen ebenen Schnittes ε_i mit einem über $C^{(n)}$ stehenden Cylinder $\Gamma^{(n)}$ n^{ter} Ordnung angesehen werden; man braucht nur in einer in der Richtung der Bewegung senkrecht auf ε stehenden Ebene η die Erzeugende des Cylinders $\Gamma^{(n)}$ und die Directrix der Projection beliebig, aber verschieden von einander anzunehmen.

In der Sprache der analytischen Geometrie heisst dies: Man fasse in der Gleichung:

$$f^{(n)}(x+\lambda, y) = 0,$$

welche eine Schaar ebener Curven n^{ter} Ordnung darstellt, wenn man λ die Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ ertheilt, diesen Parameter als z-Coordinate auf, so erhält man die Gleichung:

$$f^{(n)}(x, y, z) = 0$$

eines Cylinders n^{ter} Ordnung.

2. Alle ähnlichen und ähnlich liegenden Kegelschnitte $C_i^{(2)}$, welche einen festen Kegelschnitt $K^{(2)}$ in der Ebene ε doppelt berühren, können als successive Parallelprojectionen aller zur Ebene ε parallelen Schnitte ε_i mit einer Fläche zweiter Ordnung $F^{(2)}$ betrachtet werden. Um diese Projection herzustellen, construire man über $K^{(2)}$ einen Cylinder $\Gamma^{(2)}$, lege durch einen beliebigen der Kegelschnitte $C_i^{(2)}$ eine Fläche zweiter Ordnung, welche $\Gamma^{(2)}$ längs eines Kegelschnittes berührt, und betrachte nun als Directrix der Projection eine Erzeugende des Cylinders $\Gamma^{(2)}$.

Es sei

$$f^{(2)}(x, y) = 0$$

die Gleichung des festen Kegelschnitts $K^{(2)}$, so kann man die Gleichung eines doppeltberührenden Kegelschnitts $C_i^{(2)}$ immer in der Form annehmen:

$$f^{(2)}(x, y) - [g(x, y)]^2 = 0,$$

worin $g(x, y) = 0$ die Gleichung der Berührungssehne darstellt. Bildet man nun die Gleichung:

$$\lambda^2 - 2\lambda g(x, y) + [g(x, y)]^2 - f^{(2)}(x, y) = 0,$$

so stellt dieselbe, wenn man dem Parameter λ alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ zuertheilt, sämmtliche den Kegelschnitt $K^{(2)}$ doppelt berührende Kegelschnitte dar, welche dem $C_i^{(2)}$ ähnlich sind und mit ihm ähnliche Lage haben. Fasst man hingegen λ als z-Coordinate auf, so repräsentirt die Gleichung eine Fläche zweiter Ordnung, und setzt man z constant, so erhält man die Projection eines ebenen, der xy-Ebene parallelen Schnittes, also einen den $K^{(2)}$ doppelt berührenden Kegelschnitt.

3. Eine Fläche $F^{(n)}$ n^{ter} Ordnung bewege sich im Raume ϱ derart, dass ihre Punkte parallele gerade Linien beschreiben. Die Gleichung der so entstehenden Flächenschaar kann in der Form angenommen werden:

$$f^{(n)}(x+\lambda, y, z) = 0,$$

worin λ einen Parameter bedeutet, dessen successiven Werthen von $+\infty$ bis $-\infty$ alle Glieder der Flächenschaar entsprechen. Man kann aber λ als vierte Coordinate in Bezug auf ein vieraxiges Coordinatensystem im Raume von vier Dimensionen deuten; dann stellt die obige Gleichung:

$$f^{(n)}(x, y, z, t) = 0$$

ein Punktgebilde n^{ter} Ordnung von dreifacher Unendlichkeit dar. Setzt man in dieser Gleichung $t = constans$, so erhält man die Gleichung einer Fläche der Schaar im Raume ϱ, welche als Resultat der Parallelprojection eines zu ϱ parallelen räumlichen Schnittes mit dem Gebilde $f^{(n)}(x, y, z, t) = 0$ angesehen werden darf; die Richtung der Projection ist diejenige der t-Axe.

4. Auf Grund analytischer Gleichungen kann man die Schaar ähnlicher und ähnlich liegender Flächen zweiter Ordnung, welche eine solche $F^{(2)}$ im Raume ϱ längs Kegelschnitten berühren, als Resultate der Projection aller dem Raume ϱ parallelen räumlichen Schnitte mit einem Punktgebilde zweiter Ordnung von dreifacher Unendlichkeit im Raume von vier Dimensionen betrachten. Ist nämlich

$$f^{(2)}(x, y, z) = 0$$

die Gleichung der festen Fläche $F^{(2)}$ zweiter Ordnung, und

$$g(x, y, z) = 0$$

die Gleichung der einen Berührungskegelschnitt enthaltenden Ebene, so kann die Gleichung der in diesem Kegelschnitt die $F^{(2)}$ berührenden Fläche zweiter Ordnung immer in der Form angenommen werden:

$$f^{(2)}(x, y, z) - [g(x, y, z)]^2 = 0.$$

Bildet man nun die Gleichung:

$$t^2 - 2t\,g(x, y, z) + [g(x, y, z)]^2 - f^{(2)}(x, y, z) = 0$$

und deutet t als vierte Coordinate im Raume von vier Dimensionen, so stellt dieselbe ein dreifach-unendliches Punktgebilde dar, und setzt man $t = const.$, so erhält man eine Fläche der Schaar im Raume ϱ.

§ 2. Hilfssätze über reguläre Dreiecke und reguläre Tetraeder.

Hilfssatz 1. Der Ort der Mittelpunkte sämmtlicher regulären, einer ebenen Curve n^{ter} Ordnung eingeschriebenen Dreiecke ist eine Curve von der Ordnung

$$\frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{3}.$$

Es sei $C^{(n)}$ die in der Ebene ε gegebene Curve n^{ter} Ordnung. Ist $\varDelta$ ein reguläres, der $C^{(n)}$ eingeschriebenes Dreieck mit den Ecken A, B, C und dem Mittelpunkte M, und dreht man die Ebene ε im Punkte M um $\frac{2}{3}\pi$ und $\frac{4}{3}\pi$, so dass $C^{(n)}$ in die Lagen $C'^{(n)}$ und $C''^{(n)}$ übergeht, so

sind die drei Punkte A, B, C allen drei Curven $C^{(n)}$, $C'^{(n)}$, $C''^{(n)}$ gemeinschaftlich. Umgekehrt: Dreht man die Ebene ε in einem Punkte M um $\frac{2}{3}\pi$ und $\frac{4}{3}\pi$, so dass $C^{(n)}$ in die Lagen $C'^{(n)}$ und $C''^{(n)}$ übergeht, und haben dann die drei Curven einen Punkt A gemeinsam, so haben sie auch noch einen zweiten B und einen dritten C gemeinsam derart, dass ABC ein reguläres der $C^{(n)}$ eingeschriebenes Dreieck mit dem Mittelpunkte M bilden. Es fragt sich nun, wieviel Punkte M_i einer willkürlich angenommenen geraden Linie g in ε die Eigenschaft haben, dass eine zweimalige Rotation in denselben, wie sie eben angegeben wurde, eine Coincidenz dreier Curvenpunkte hervorruft?

Führt man die erwähnte Drehung der Ebene ε successive in allen Punkten der Geraden g aus, so erhält man zwei Schaaren von Curven n^{ter} Ordnung $C'^{(n)}$ und $C''^{(n)}$ mit folgender Eigenschaft: Jedes Glied einer solchen Curvenschaar geht aus einem beliebigen dadurch hervor, dass die Punkte des letzteren sich in parallelen geraden Linien fortbewegen, deren Richtung gegen g um $\frac{2}{3}\pi$, resp. $\frac{4}{3}\pi$ geneigt ist.

Jedem Punkte M_k auf g gehört eine Curve $C_k'^{(n)}$ und eine $C_k''^{(n)}$ zu. Wir finden nun die auf g gelegenen Mittelpunkte regulärer Dreiecke, wenn wir die Schnittpunkte der $C^{(n)}$ mit der als Ort der Schnittpunkte entsprechender $C'^{(n)}$ und $C''^{(n)}$ definirten Curve $\mathfrak{C}$ zu regulären Dreiecken zusammenfassen und deren Mittelpunkte aufsuchen. Welches ist aber die Ordnung der $\mathfrak{C}$? Wir verweisen die Lösung dieser Frage in den Raum, indem wir die beiden Curvenschaaren $C'^{(n)}$ und $C''^{(n)}$ als Resultate der Parallelprojection aller zu ε parallelen Schnitte ε_i mit zwei über entsprechenden Curven $C_k'^{(n)}$ und $C_k''^{(n)}$ stehenden Cylindern $\Gamma'^{(n)}$ und $\Gamma''^{(n)}$ n^{ter} Ordnung betrachten. Durch Drehung der Ebene ε im Punkte M_0 der Geraden g um $\frac{2}{3}\pi$ und $\frac{4}{3}\pi$ gehe C^n über in $C_0'^{(n)}$ und $C_0''^{(n)}$, g in g'_0 und g''_0; in den beiden in g'_0 und g''_0 senkrecht auf ε stehenden Ebenen η' und η'' nehme man nun die Erzeugenden der beiden über $C_0'^{(n)}$ und $C_0''^{(n)}$ stehenden Cylinder $\Gamma'^{(n)}$ und $\Gamma''^{(n)}$ so an, dass sie gegen g'_0 und g''_0 resp. gleiche Neigung haben; die Directrix der Projection ist dann die den Ebenen η' und η'' gemeinsame, in M_0 senkrecht auf ε stehende Gerade s_0.

Es treffen sich nun die beiden Cylinder $\Gamma'^{(n)}$ und $\Gamma''^{(n)}$ n^{ter} Ordnung in einer Raumcurve von der Ordnung n^2, deren Projection in die Ebene ε eine ebene Curve $\mathfrak{C}$ von derselben Ordnung ergiebt. Betrachtet man jetzt die n^3 Schnittpunkte der $C^{(n)}$ und $\mathfrak{C}$, so erkennt man, dass nicht alle zu regulären Dreiecken gehören, nämlich diejenigen n Punkte nicht, in welchen $C^{(n)}$ von g geschnitten wird (und welche offenbar zu $\mathfrak{C}$ gehören). Es kommen also im Ganzen nur $n^3 - n$ Punkte in Betracht, welche zu dreien $\frac{n^3-n}{3}$ reguläre der $C^{(n)}$ eingeschriebene Dreiecke mit

den Mittelpunkten auf g liefern, oder: die Ordnung der „Mittelpunktscurve“ ist

$$\frac{n^3-n}{3}=\frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{3},\quad \text{w. z. b. w.}$$

Zusatz. Die Mittelpunktscurve der regulären eingeschriebenen Dreiecke hat überall da einen Doppelpunkt, wo die ursprüngliche Curve einen solchen besitzt.

Man lege die Gerade g durch den Doppelpunkt D der Curve $C^{(n)}$. Durch Drehung der Ebene ε im Punkte D um $\frac{2}{3}\pi$ und $\frac{4}{3}\pi$ mag $C^{(n)}$ in $C_0'^{(n)}$ und $C_0''^{(n)}$ übergehen; beide Curven seien die Basen der beiden Cylinder $\Gamma'^{(n)}$ und $\Gamma''^{(n)}$ n^{ter} Ordnung, welche wie vorhin erzeugt sind. Man sieht, dass die durch D hervorgerufenen Doppelgeraden d' und d'' dieser Cylinder in jenem Punkte sich schneiden, dass ihre Schnittcurve der Ordnung n^2, und mithin auch deren Projection $\mathfrak{C}$ in ε im Punkte D einen vierfachen Punkt besitzt. Von den n^3 gemeinsamen Punkten der $C^{(n)}$ und der $\mathfrak{C}$ sind daher ausser den $n-2$ Punkten auf g noch die acht in D coincidirenden gemeinsamen Punkte auszunehmen; es bleiben mithin nur

$$n^3-(n-2)-8=n^3-n-6$$

Punkte übrig, deren drei immer ein reguläres der $C^{(n)}$ eingeschriebenes Dreieck liefern mit dem Mittelpunkt auf g. Auf dieser durch D gehenden, willkürlich gewählten Geraden liegen demnach nur noch

$$\frac{n^3-n-6}{3}=\frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{3}-2$$

Mittelpunkte, oder D ist für die Mittelpunktscurve ein Doppelpunkt. Die beiden der $C^{(n)}$ eingeschriebenen regulären Dreiecke, welche ihre Mittelpunkte in D haben, sind Nulldreiecke.

Hilfssatz 2. Die Spitzen aller regulären Tetraeder, deren Basisdreiecke einer ebenen Curve n^{ter} Ordnung eingeschrieben sind, bilden eine Raumcurve von der Ordnung

$$2\frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{3}.$$

Der Hilfssatz 1 lehrt uns, dass die Mittelpunkte aller regulären einer $C^{(n)}$ eingeschriebenen Dreiecke auf einer Curve C_M von der Ordnung $\frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{3}$ liegen. Ergänzen wir nun jedes dieser Dreiecke nach beiden Seiten der Ebene ε hin zu regulären Tetraedern, so liegen die Spitzen sämmtlicher so entstandenen Tetraeder auf dem Cylinder Γ von der Ordnung $\frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{3}$, welcher senkrecht über der Mittelpunktscurve C_M steht, und bilden eine Raumcurve R_S, welche wir auch „Curve der Tetraederspitzen“ nennen wollen. Um die Ordnung dieser

R_S zu bestimmen, suchen wir sie darzustellen als Schnitt zweier Flächen, deren eine der erwähnte Cylinder Γ ist. Wie werden wir die zweite Fläche definiren, so dass sie nothwendig die gesuchte Raumcurve enthält?

Man construire alle regulären Dreiecke, von denen je zwei Ecken auf $C^{(n)}$ liegen, und ergänze sie nach beiden Seiten der Ebene ε hin zu regulären Tetraedern. Dann erfüllen die Spitzen der letzteren eine Fläche F, welche nothwendig die Raumcurve R_S vollständig enthält.

Zunächst macht sich nun das Bedürfniss geltend, die Ordnung der Fläche F zu kennen. Um dieselbe zu finden, nehmen wir eine Gerade g' im Raume willkürlich an. Ein Punkt P_i derselben wird dann Punkt der Fläche F, d. h. Spitze des Tetraeders der oben beschriebenen Art sein, wenn der Fusspunkt M_i des von ihm auf ε gefällten Lothes das Centrum eines Kreises K_i mit dem Radius $\frac{P_i M_i}{\sqrt{2}}$ ist, auf dessen Peripherie zwei der Schnittpunkte mit der Curve $C^{(n)}$ um $\frac{1}{2}\pi$ auseinander liegen. Diese Bedingung lässt sich auch noch anders aussprechen. Dreht man die Ebene ε in allen Fusspunkten M (welche eine Gerade g erfüllen) successive um $\frac{1}{2}\pi$, so dass die Curve $C^{(n)}$ in die Lagen $C'^{(n)}$ übergeht, construirt auch den zugehörigen Kreis K mit dem Radius $\frac{PM}{\sqrt{2}}$, so müssen sich die beiden entsprechenden Curven $C_k'^{(n)}$ und K_k auf der $C^{(n)}$ schneiden, soll der zugehörige auf g' liegende Punkt P_k ein Punkt der gesuchten Fläche F sein. Es bilden nun die Curven $C'^{(n)}$ eine Schaar, wie sie S. 352 unter 1, die Kreise K den besondern Fall einer Kegelschnittschaar, wie sie S. 353 unter 2 beschrieben worden ist. Es lassen sich daher die $C'^{(n)}$ und K als Projectionen ebener zu ε paralleler Schnitte mit einem Cylinder $\Gamma'^{(n)}$ n^{ter} Ordnung und einem Kegel $X^{(2)}$ zweiter Ordnung ansehen, deren Schnittcurve $2n^{\text{ter}}$ Ordnung in die Ebene ε projicirt den Ort der Schnittpunkte entsprechender Curven $C'^{(n)}$ und K, eine ebene Curve $2n^{\text{ter}}$ Ordnung liefert. Da dieselbe $C^{(n)}$ in $2n^2$ Punkten schneidet, zu welchen $2n^2$ Dreiecke, ebensoviel Punkte M und P gehören, so ist die Ordnung der Fläche F gleich $2n^2$.

Wie schon gezeigt, muss die Curve der Tetraederspitzen R_S auf beiden Flächen F und Γ zugleich liegen, also deren totaler oder partieller Schnitt sein. Eine andere Erzeugungsweise der Fläche F zeigt uns, dass der Schnitt derselben mit Γ aus zwei getrennten Raumcurven besteht, von denen die eine einfach, die andere dreifach zu zählen ist; die dreifache Curve ist identisch mit R_S.

Es sei s_k eine zur Ebene ε senkrechte Gerade, M_k ihr Schnittpunkt mit dieser. Ihre Schnittpunkte mit F erhält man einfach, indem man ε im Punkte M_k um $\frac{1}{2}\pi$ dreht, wodurch $C^{(n)}$ in $C'^{(n)}$ übergeführt wird, sodann die n^2 Schnittpunkte S_i $(i = 1, 2, \ldots n^2)$ beider Curven bestimmt

und von M_k aus endlich auf s_k nach beiden Seiten hin die $2n^2$ Strecken $M_k S_i . \sqrt{2}$ abträgt.

Es sei nun s_0 eine Erzeugende des Cylinders Γ, ihr Fusspunkt M_0 also ein Punkt der Mittelpunktscurve C_M, so sind drei Strecken $M_0 S_i$ einander gleich, auf s_0 fallen also von den $2n^2$ Punkten je drei in zwei Punkten zusammen. Da dies sich auf jeder Erzeugenden des Cylinders wiederholt, so erkennen wir, dass in der That die Schnittcurve von F und Γ in eine einfache und in eine dreifache Raumcurve zerfällt, welch' letztere allein die Curve der Tetraederspitzen R_S repräsentirt.

Die Ordnung der letzteren ist nun sogleich gefunden. Eine zu ε senkrechte, übrigens beliebige Ebene η enthält $\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$ Erzeugende des Cylinders Γ, und — da auf jeder solchen Erzeugenden $2n^2-6$ einfache und zwei dreifache Punkte der Fläche F liegen — $(2n^2-6)\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$ Punkte der einfachen und $2\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$ der dreifachen Schnittcurve von F und Γ, in Summa also $2n^2\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$ Punkte, d. h. genau soviel, als eine Ebene mit der Schnittcurve der beiden Flächen bezw. von der Ordnung $2n^2$ und $\frac{(n-2)n(n+1)}{3}$ gemeinsam haben muss. Daher ist die Ordnung der einfachen Curve gleich $(2n^2-6)\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$, die Ordnung der dreifachen, d. h. der Raumcurve R_S, gleich $2\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$, w. z. b. w.

Zusatz. Die Raumcurve, der Ort der Spitzen aller regulären Tetraeder, deren Basisdreiecke einer ebenen Curve $C^{(n)}$ n^{ter} Ordnung eingeschrieben sind, hat überall da einen vierfachen Punkt, wo die $C^{(n)}$ einen Doppelpunkt besitzt.

Es sei D ein Doppelpunkt der $C^{(n)}$; aus dem Zusatz zum Hilfssatz 1 ersehen wir, dass in D die Mittelpunkte von zwei regulären, der $C^{(n)}$ eingeschriebenen Nulldreiecken liegen. Hieraus geht sofort hervor, dass in diesem Punkte die Spitzen von vier Nulltetraedern sich vereinigen.

§ 3. Die regulären Tetraeder, welche einer algebraischen Fläche eingeschrieben sind.

Wir sind nun in der Lage, die erste von uns aufgeworfene Hauptfrage, sowie eine mit ihr eng verknüpfte in zwei Lehrsätzen zu beantworten.

Lehrsatz 1. Eine willkürlich angenommene Ebene enthält im Allgemeinen die Seitenflächen von $2n\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$ regu-

lären einer allgemeinen Fläche n^{ter} Ordnung eingeschriebenen Tetraedern.

Der Beweis ist sofort gegeben. Die willkürlich angenommene Ebene ε schneidet die Fläche $F^{(n)}$ n^{ter} Ordnung im Allgemeinen in einer Curve $C^{(n)}$ n^{ter} Ordnung ohne Doppelpunkte. Nach Hilfssatz 2 liegen die Spitzen aller regulären Tetraeder, deren Basen der $C^{(n)}$ eingeschrieben sind, auf der Raumcurve R_S von der Ordnung $2\cdot\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$, welche $F^{(n)}$ in $2n\cdot\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$ Punkten, den Spitzen regulärer eingeschriebener Tetraeder, deren Basen in der Ebene ε liegen, trifft.

Zusatz. Jede Tangentialebene einer Fläche n^{ter} Ordnung enthält die Seitenflächen von $2n\cdot\frac{(n-1)n(n+1)}{3}-4$ regulären eingeschriebenen Tetraedern.

Bekanntlich ist die Schnittcurve einer Tangentialebene im Berührungspunkte mit einem Doppelpunkte versehen. Aus dem Zusatz zum Hilfssatz 2 wissen wir nun, dass die Curve der Tetraederspitzen R_S im Doppelpunkte der ursprünglichen ebenen Curve $C^{(n)}$ einen vierfachen Punkt besitzt, hier also die Fläche $F^{(n)}$ viermal schneidet, ohne endliche Tetraeder zu liefern. Daher muss die im Lehrsatz 1 gefundene Zahl um 4 vermindert werden.

Hiermit ist unser Ziel im Wesentlichen erreicht: Wir können einer gegebenen algebraischen Oberfläche beliebig viel reguläre Tetraeder einschreiben, sobald wir die Schnittpunkte dreier bestimmt definirten Flächen darstellen können.

Der eben bewiesene Lehrsatz legt uns die Frage nahe, welche Raumcurve wohl die $2n\cdot\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$ Spitzen der Tetraeder, deren Basen in einer Ebene liegen, auf $F^{(n)}$ beschreiben, wenn diese Ebene parallel mit sich selbst fortbewegt wird. Zum Zweck der Beantwortung dieser Frage beweisen wir zunächst folgenden

Hülfssatz. Die Spitzen aller regulären Tetraeder, deren Basisdreiecke einer Fläche n^{ter} Ordnung eingeschrieben und einer willkürlich gewählten Ebene parallel sind, bilden im Allgemeinen eine Fläche von der Ordnung $2\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$.

Die Fläche, von welcher in obigem Satze die Rede ist, wird gebildet durch die Gesammtheit der „Curven der Tetraederspitzen", welche zu den einzelnen Schnittcurven der Fläche $F^{(n)}$ mit einer Schaar paralleler Ebenen gehört.

Wir wollen diese Fläche Φ nun auf eine andere Weise erzeugen und aus dieser Erzeugung ihre Ordnung herleiten. Es sei ε die feste

Ebene, welcher die eingeschriebenen Basisdreiecke parallel sein sollen. Nimmt man eine zur Ebene ε senkrechte Gerade s an, welche $F^{(n)}$ in n Punkten trifft, und dreht man nun $F^{(n)}$ um s als Axe um $\frac{2}{3}\pi$ und $\frac{4}{3}\pi$ in die Lagen $F'^{(n)}$ und $F''^{(n)}$, so bilden je drei der n^3-n Schnittpunkte dieser drei Flächen, welche nicht auf s gelegen sind, ein reguläres Dreieck, welches $F^{(n)}$ eingeschrieben und dessen Ebene parallel zu ε ist. Die Spitzen der $2\frac{n^3-n}{3}$ regulären Tetraeder, zu welchen jene Dreiecke ergänzt werden können, liegen auf s. Man nehme nun eine Gerade g beliebig im Raume an; ein Punkt P_i derselben ist dann Punkt der Fläche Φ, wenn der Kreiskegel K_i, dessen Spitze in P_i liegt, dessen Axe die aus P_i auf ε gefällte Senkrechte s_i ist und dessen Oeffnung durch drei in einem Punkte zusammentreffende Kanten eines regulären Tetraeders bestimmt ist, durch einen Schnittpunkt (und folglich auch noch durch zwei andere) der drei Flächen $F^{(n)}$, $F_i'^{(n)}$, $F_i''^{(n)}$ hindurchgeht, von denen die beiden letzten aus $F^{(n)}$ durch Drehung um s_i als Axe um $\frac{2}{3}\pi$, resp. $\frac{4}{3}\pi$ entstanden sind.

Lässt man nun einen Punkt P auf g vorwärtsschreiten und construirt für jede Lage den zugehörigen Kegel K und die entsprechenden Flächen $F'^{(n)}$ und $F''^{(n)}$, so beschreibt K eine Kegelschaar, wie sie auf Seite 354 unter 4, $F'^{(n)}$ und $F''^{(n)}$ zwei Flächenschaaren, wie sie S. 353 unter 3 gekennzeichnet wurden. Die Zahl, welche angiebt, wie oft die als Ort der Schnittpunkte entsprechender Flächen $F_k'^{(n)}$, $F_k''^{(n)}$, K_k definirte Raumcurve R die $F^{(n)}$ trifft, ist die Ordnungszahl der Fläche Φ.

Den Ausführungen auf S. 354 gemäss betrachten wir die drei Flächenschaaren als Resultate der Parallelprojection räumlicher Schnitte mit drei Punktgebilden $\mathfrak{F}'^{(n)}$, $\mathfrak{F}''^{(n)}$, $\mathfrak{K}^{(2)}$ dreifacher Unendlichkeit im Raume von vier Dimensionen, von denen die ersten beiden n^{ter}, das letzte zweiter Ordnung ist. Diese drei Punktgebilde haben ein einfach-unendliches Punktgebilde der Ordnung $2n^2$ miteinander gemein, dessen Projection in den Raum der Fläche $F^{(n)}$ die Raumcurve R von derselben Ordnung $2n^2$ ergiebt. Jedoch nicht alle Schnittpunkte der R mit $F^{(n)}$ geben zu endlichen Tetraedern Anlass, deren Basisdreiecke der $F^{(n)}$ eingeschrieben sind und deren Spitzen auf g liegen. In den n Schnittpunkten der Geraden g mit der Fläche $F^{(n)}$ coincidiren nämlich je zwei der $2n^2$ Schnittpunkte entsprechender Flächen $F_k'^{(n)}$, $F_k''^{(n)}$ und K_k, welche der Raumcurve R angehören, ohne dass diese Schnittpunkte endliche Tetraeder liefern. Daher kommen von den $2n^3$ Schnittpunkten der R mit der $F^{(n)}$ nur $2n^3-2n$ in Betracht, von denen je drei ein reguläres Dreieck bilden, welches seinerseits einen Punkt der Fläche Φ auf der Geraden g bestimmt. Es liegen demnach auf der letztern $2\frac{n^3-n}{3}$ Punkte der Fläche Φ, oder: die Ordnung derselben ist gleich $2\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$, w. z. b. w.

Zusatz. Die Fläche, der Ort der Spitzen aller regulären Tetraeder, deren Basisdreiecke einer allgemeinen Fläche n^{ter} Ordnung eingeschrieben und einer festen Ebene parallel sind, besitzt $n(n-1)^2$ Doppelpunkte.

An eine allgemeine Fläche n^{ter} Ordnung lassen sich $n(n-1)^2$ Berührungsebenen legen, welche einer festen Ebene ε parallel sind. In den Berührungspunkten derselben haben die Schnittcurven Doppelpunkte. Es sei β eine die Fläche $F^{(n)}$ in der Curve $C^{(n)}$ mit dem Doppelpunkte B schneidende Tangentialebene. Legt man durch den Punkt B eine beliebige Gerade g, so gehört derselben eine Raumcurve R von der Ordnung $2n^2$ als Ort entsprechender Flächen $F'^{(n)}$, $F''^{(n)}$, K zu, deren Schnittpunkte mit $F^{(n)}$ zu drei je einen Punkt der Fläche Φ auf g bestimmen. Die Raumcurve R hat in diesem Falle, wo g durch den Berührungspunkt B der Ebene β hindurchgeht, in B acht Punkte mit $F^{(n)}$ gemein. Construirt man nämlich die Flächen $F_B'^{(n)}$ und $F_B''^{(n)}$, indem man $F^{(n)}$ um die Normale n in B als Rotationsaxe um $\frac{2}{3}\pi$ und $\frac{4}{3}\pi$ dreht, ferner den Kegel K_B, dessen Spitze in B gelegen ist, so sind die Spuren der drei Flächen $F_B'^{(n)}$, $F_B''^{(n)}$, K_B auf $F^{(n)}$ drei Raumcurven mit je einem Doppelpunkt in B. $F^{(n)}$ hat demnach in B acht Punkte mit der Raumcurve R gemeinsam, in den übrigen $n-1$ Schnittpunkten der g mit $F^{(n)}$ wie gewöhnlich je zwei Punkte. Daher kommen von den $2n^3$ Schnittpunkten der R mit $F^{(n)}$ nur $2n^3-2(n-1)-8$ in Betracht, von denen je drei einen Punkt der Fläche Φ auf g bestimmen. Es liegen demnach auf dieser, wie auf jeder durch B hindurchgehenden Geraden nur noch $2\frac{n^3-n-3}{3} = 2\frac{(n-1)\,n(n+1)}{3} - 2$ Punkte der Fläche Φ, oder: der Punkt B ist ein Doppelpunkt der Fläche Φ. Ist $F^{(n)}$ allgemein vorausgesetzt, also von der Classe $n(n-1)^2$, so hat Φ $n(n-1)^2$ Doppelpunkte, welche auf $F^{(n)}$ selbst gelegen sind.

Lehrsatz 2. Die Spitzen aller regulären, einer allgemeinen Fläche n^{ter} Ordnung eingeschriebenen Tetraeder, deren Basisdreiecke einer festen Ebene parallel sind, bilden eine Raumcurve von der Ordnung $2n\frac{(n-1)\,n(n+1)}{3}$ mit $n(n-1)^2$ Doppelpunkten.

Die Raumcurve P_S, von welcher in diesem Satze die Rede ist, ist der Schnitt der Fläche $F^{(n)}$ n^{ter} Ordnung mit Φ von der Ordnung $2\frac{(n-1)\,n(n+1)}{3}$, wie aus dem letztbewiesenen Hilfssatze hervorgeht, also von der Ordnung $2n\cdot\frac{(n-1)\,n(n+1)}{3}$. $F^{(n)}$ geht durch die $n(n-1)^2$ Doppelpunkte der Fläche Φ hindurch, ohne an diesen Stellen Singularitäten zu besitzen; ihre Schnittcurve mit Φ hat also $n(n-1)^2$ Doppelpunkte, w. z. b. w.

Zusammenstellung der aufgestellten und bewiesenen Sätze.

1. Der Ort der Mittelpunkte aller regulären, einer ebenen Curve n^{ter} Ordnung eingeschriebenen Dreiecke ist eine Curve von der Ordnung $\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$, welche überall da einen Doppelpunkt hat, wo die Grundcurve einen solchen besitzt.

2. Der Ort der Spitzen aller regulären Tetraeder, deren Basisdreiecke einer ebenen Curve n^{ter} Ordnung eingeschrieben sind, ist eine Raumcurve von der Ordnung $2\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$, welche überall da einen vierfachen Punkt hat, wo die Grundcurve einen Doppelpunkt besitzt.

3. Eine beliebige Ebene enthält im Allgemeinen die Seitenflächen von $2n\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$, eine Tangentialebene die Seitenflächen von $2n\frac{(n-1)n(n+1)}{3}-4$ regulären, einer allgemeinen Fläche n^{ter} Ordnung eingeschriebenen Tetraedern.

4. Der Ort der Spitzen aller regulären Tetraeder, deren Basisdreiecke einer allgemeinen Fläche n^{ter} Ordnung eingeschrieben und einer beliebigen festen Ebene parallel sind, ist im Allgemeinen eine Fläche von der Ordnung $2\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$ mit $n(n-1)^2$ Doppelpunkten.

5. Der Ort der Spitzen aller regulären, einer allgemeinen Fläche n^{ter} Ordnung eingeschriebenen Tetraeder, deren Basisdreiecke einer beliebigen festen Ebene parallel sind, ist eine Raumcurve von der Ordnung $2n\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$ mit $n(n-1)^2$ Doppelpunkten.

II. Theil.

Die im I. Theile gewonnenen, für Flächen beliebiger Ordnung giltigen Sätze liefern unter der besondern Annahme $n=2$ ohne Weiteres ebensoviele Sätze für die Flächen zweiter Ordnung.

Es handelt sich nun darum, die Verhältnisse zu untersuchen, unter welchen die allgemeinen Resultate im Fall der Flächen zweiter Ordnung Modificationen erfahren. Zu diesem Zwecke haben wir zunächst die auf Curven n^{ter} Ordnung bezüglichen Sätze für die Kegelschnitte zu bilden und die besonderen Formen, welche diese Sätze annehmen können, aufzusuchen.

§ 1. Hilfssätze über reguläre, einem Kegelschnitte eingeschriebene Dreiecke* und die ihnen entsprechenden regulären Tetraeder.

1. Der Ort der Mittelpunkte aller regulären, einem Kegelschnitte eingeschriebenen Dreiecke ist wiederum ein Kegelschnitt; derselbe zerfällt in ein Geradenpaar, sobald der Grundkegelschnitt in ein Geradenpaar zerfällt, und sein Doppelpunkt fällt mit demjenigen des Grundkegelschnittes zusammen.

Dieser Satz ergiebt sich unmittelbar aus dem Hilfssatz 1 S. 354 nebst Zusatz für $n = 2$.

Wir fügen noch die leicht zu verificirende Bemerkung hinzu, dass, im Falle der gegebene Kegelschnitt K in ein reelles (im Endlichen sich schneidendes) paralleles oder imaginäres Geradenpaar mit reellem Schnittpunkt zerfällt, der Mittelpunktskegelschnitt K_M bezw. in ein reelles, paralleles oder imaginäres Geradenpaar ausartet.

2. Zu ähnlichen Kegelschnitten gehören ähnliche Mittelpunktscurven der regulären eingeschriebenen Dreiecke.

Transformirt man nämlich K in einen ähnlichen Kegelschnitt K', so geht der Mittelpunkt M eines dem K eingeschriebenen regulären Dreiecks Δ in den Mittelpunkt M' des transformirten regulären Dreiecks Δ' über, woraus sich der Satz ergiebt.

3. Grundkegelschnitt und Mittelpunktskegelschnitt haben dasselbe Centrum, dieselben Axenrichtungen und sind von derselben Gattung.

Da die einem Kegelschnitte K eingeschriebenen regulären Dreiecke symmetrisch zu den Axen desselben liegen, so ist dies auch mit den Mittelpunkten der Fall, woraus die ersten beiden Eigenschaften folgen.

Jede Ellipse, Parabel, Hyperbel kann einem Paare imaginärer, paralleler, reeller, im Endlichen sich schneidender Geraden bezw. ähnlich genannt werden, und umgekehrt. Nach 2 folgt hieraus, in Verbindung mit der Bemerkung zu 1, die dritte Beziehung zwischen Grund- und Mittelpunktskegelschnitt.

Anmerkung. Die Mittelpunktscurve K_M eines Kreises reducirt sich auf einen Punkt, das Centrum desselben. Für eine Hyperbel, deren Asymptoten einen Winkel von 30^0 einschliessen, besteht K_M aus zwei reellen oder imaginären Geraden, je nachdem die Hyperbel im Winkelraum des stumpfen oder spitzen Winkels der Asymptoten liegt — weil

---

* Eine ausführliche analytische Behandlung hat dieser Gegenstand in der Inauguraldissertation erfahren: P. Rudolph, Die Eigenschaften der einem Kegelschnitte ein- und umschriebenen regulären Dreiecke.

für den zerfallenden Kegelschnitt, der aus zwei einen Winkel von 30° einschliessenden Geraden gebildet wird, K_M in die Winkelhalbirende degenerirt. Ist K eine gleichseitige Hyperbel, so fällt K_M mit K völlig zusammen. Es geht dies daraus hervor, dass die Curve K_M eines Paares rechtwinklig aufeinander stehender Geraden mit diesem identisch ist und der Mittelpunkt einer vom Scheitel einer gleichseitigen Hyperbel H dieses eingeschriebenen regulären Dreiecks auf H selbst gelegen ist.

4. Der Ort der Spitzen aller regulären Tetraeder, deren Basisdreiecke einem Kegelschnitte eingeschrieben sind, ist im Allgemeinen eine Raumcurve vierter Ordnung vom Geschlecht 1; sie zerfällt in vier gerade Linien, sobald der Grundkegelschnitt in ein Geradenpaar zerfällt, und vereinigt im Doppelpunkt des letztern diese Linien.

Dieser Satz ist die besondere Form des Hilfssatzes 2 S. 356 und des Zusatzes S. 358 für $n=2$.

5. Die Raumcurve vierter Ordnung, der Ort der Tetraederspitzen, liegt symmetrisch zur Ebene des gegebenen Kegelschnittes und zu den beiden über seinen Axen senkrecht zu seiner Ebene stehenden Ebenen. Unter den vier durch sie hindurchgehenden Kegeln zweiter Ordnung sind daher drei Cylinder, deren Axen die Schnittlinien der drei Symmetrieebenen sind; die Spitze des vierten Kegels liegt im Mittelpunkte des Grundkegelschnittes.

Ist der gegebene Kegelschnitt K eine Hyperbel, deren Asymptoten einen Winkel von 30° einschliessen, so zerfällt der eine der drei Cylinder in ein (reelles oder imaginäres) Ebenenpaar, die zugehörige $R^{(4)}$ also in zwei (reelle oder imaginäre) Kegelschnitte.

Ist K eine Parabel, so fallen die Axen zweier Cylinder ins Unendliche und auf diese selbst. $R^{(4)}$ ist dann als Schnitt zweier im unendlich-fernen Punkte von K sich berührenden parabolischen Cylinder eine Raumcurve vierter Ordnung vom Geschlecht 0 mit einem Doppelpunkte im unendlich-fernen Punkte von K. Für den Kreis reducirt sich $R^{(4)}$ auf zwei in der im Centrum desselben senkrecht stehenden Geraden liegende Punkte.

Besteht endlich K aus zwei einen Winkel von 30° einschliessenden Linien, so ist $R^{(4)}$ durch zwei Doppelgerade repräsentirt.

Hiermit sind alle besonderen Formen erwähnt, welche die auf die Kegelschnitte bezüglichen Sätze annehmen können, und somit alle Vorbereitungen für die Untersuchung der Flächen zweiter Ordnung getroffen.

Wir beschränken uns im Folgenden meistens auf die Angabe der Resultate; die Verhältnisse sind so einfach und leicht zu überschauen, dass die Beweise, deren Wiedergabe die Darstellung sehr breit machen würde, füglich dem Leser überlassen werden können.

§ 2. Die regulären Tetraeder, welche einer Fläche zweiter Ordnung eingeschrieben sind.

I. Eine beliebige Ebene enthält im Allgemeinen die Seitenflächen von acht, eine Tangentialebene die Seitenflächen von vier regulären, einer Fläche zweiter Ordnung eingeschriebenen Tetraedern.

Eine Kreisschnittebene enthält im Allgemeinen keine Seitenfläche eines regulären eingeschriebenen Tetraeders; enthält sie eine, so enthält sie unendlich viele congruente. In jeder der beiden Kreisschnittebenenschaaren einer Fläche zweiter Ordnung ohne Doppelpunkt giebt es zwei, im Ganzen also vier Ebenen, welche die Seitenflächen von unendlich vielen regulären eingeschriebenen Tetraedern enthalten. Diese vier Ebenen reduciren sich auf zwei (im Besondern zusammenfallende), wenn die Fläche Rotationsfläche ist. Von den Kreisschnittebenen eines Kegels zweiter Ordnung enthält entweder keine oder jede unendlich viele Seitenflächen regulärer eingeschriebener Tetraeder.

Eine Ebene, welche aus einer Fläche zweiter Ordnung eine gleichseitige Hyperbel ausschneidet, enthält im Allgemeinen die Seitenflächen von vier regulären eingeschriebenen Tetraedern.

Eine Ebene, welche eine Parabel herausschneidet, enthält sechs Seitenflächen regulärer eingeschriebener Tetraeder.

Die Tetraeder, deren Seitenflächen in einer Tangentialebene liegen, sind entweder sämmtlich reell oder sämmtlich imaginär, je nachdem die gegebene Fläche zweiter Ordnung geradlinig (aber ohne Doppelpunkt) oder nicht geradlinig ist.

Die Zahl der Tetraeder, deren Seitenflächen in einer Tangentialebene gelegen sind, reducirt sich auf zwei, sobald die Schnittcurve der Tangentialebene aus zwei, einen Winkel von 30^0 einschliessenden Geraden besteht.

Eine durch die Spitze eines Kegels zweiter Ordnung hindurchgehende Ebene enthält entweder die Seitenflächen von keinem, oder von unendlich vielen regulären eingeschriebenen Tetraedern.

Hilfssatz. Der Ort der Spitzen aller regulären Tetraeder, deren Basisdreiecke einer allgemeinen Fläche zweiter Ordnung eingeschrieben und einer willkürlich gewählten Ebene parallel sind, ist im Allgemeinen eine Fläche vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten und einem Doppelkegelschnitte.

Es folgt dieser Satz aus dem Hilfssatz auf S. 359 für $n=2$. Doch sei er hier besonders bewiesen, ohne Hilfsvorstellungen aus dem Raume von vier Dimensionen heranzuziehen. Es handelt sich nur um den Beweis, dass die Ordnungszahl der als Ort der Schnittpunkte entsprechender Flächen $F_k'^{(2)}$, $F_k''^{(2)}$, K_k definirten Raumcurve R gleich 8 ist. Nun bestimmen, wie man leicht sieht, die drei Flächenschaaren $F'^{(2)}$, $F''^{(2)}$

und K auf einer beliebig gewählten Ebene e drei Kegelschnittschaaren von der auf S. 353 unter 2 beschriebenen Art; es kommt daher achtmal vor, dass sich drei entsprechende Curven der Schaaren in einem Punkte treffen. Im Uebrigen gelten die im I. Theile angestellten Betrachtungen und Schlüsse und führen zu dem im Hilfssatze ausgesprochenen Resultate.

Die beiden Doppelpunkte der Fläche vierter Ordnung liegen auf der gegebenen Fläche zweiter Ordnung und zwar in den Berührungspunkten der zur festen Ebene parallelen Tangentialebenen.

Dass die Fläche einen Doppelkegelschnitt enthält, erkennt man durch folgende Betrachtung: Es sei S die Spitze eines Tetraeders, dessen Basisdreieck Δ der gegebenen $F^{(2)}$ eingeschrieben und der festen Ebene ε parallel ist; dann ist der Punkt S', welcher auf der den Mittelpunkt M der $F^{(2)}$ mit S verbindenden Geraden gleichweit nach der andern Seite absteht, ebenfalls Spitze eines regulären Tetraeders, dessen Basisdreieck Δ' der $F^{(2)}$ eingeschrieben und der gegebenen festen Ebene ε parallel ist. Construirt man nun in allen zu ε-parallelen Ebenen die Dreiecke, welche eine der Lage des Dreiecks Δ ähnliche Lage haben, und ergänzt sie nach beiden Seiten der Ebenen hin zu regulären Tetraedern, so liegen die Spitzen S derselben und die ihnen entsprechenden S' in zwei Kegelschnitten zweier verschiedenen, durch die Berührungspunkte B_1 und B_2 der zu ε parallelen Tangentialebenen hindurchgehenden Ebenen. Es folgt hieraus: Jede durch die Punkte B_1 und B_2 hindurchgehende Ebene trifft die Fläche vierter Ordnung in zwei Kegelschnitten. Der Ort der von B_1 und B_2 verschiedenen beiden Schnittpunkte derselben ist nothwendig ein Kegelschnitt, für die Fläche vierter Ordnung eine Doppelcurve.

Zusatz. Für den Kegel zweiter Ordnung artet die Fläche vierter Ordnung, welche einer beliebigen Parallelebenenschaar entspricht, in einen Kegel vierter Ordnung aus, dessen Spitze mit der Spitze des gegebenen Kegels coincidirt.

Die zu einer Schaar paralleler Kreisschnitte gehörende Fläche vierter Ordnung hat sich auf einen Kegelschnitt oder eine Doppelgerade reducirt, je nachdem die gegebene Fläche zweiter Ordnung eine allgemeine oder eine Rotationsfläche ist.

Aus vorstehendem Hilfssatze folgt sofort:

II. Die Spitzen aller regulären, einer allgemeinen Fläche zweiter Ordnung eingeschriebenen Tetraeder, deren Basisdreiecke einer festen Ebene parallel sind, bilden eine Raumcurve achter Ordnung mit sechs Doppelpunkten.

Zusatz. Für den Kegel zweiter Ordnung zerfällt dies Raumcurve in acht durch die Spitze desselben laufende Gerade.

Die einer Schaar paralleler Kreisschnittebenen entsprechende Raumcurve reducirt sich auf vier oder zwei Punkte, je nachdem die gegebene Fläche eine allgemeine oder eine Rotationsfläche ist.

§ 3. Construction regulärer, einer Fläche zweiter Ordnung eingeschriebener Tetraeder.

Die Aufgabe, die in einer beliebigen Ebene gelegenen Seitenflächen regulärer eingeschriebener Tetraeder und diese somit selbst zu construiren, ist im Allgemeinen eine irreductible Aufgabe achten Grades. Nur für einige specielle Schnitte reducirt sie sich, wie wir oben gefunden, auf Aufgaben sechsten und vierten Grades. Der constructiven, und zwar mit dem Lineal allein auszuführenden Bestimmung sind nur die in den Tangentialebenen liegenden Basisdreiecke regulärer Tetraeder zugänglich.

Handelt es sich allein darum, beliebig viel reguläre Tetraeder einer Fläche zweiter Ordnung einzuschreiben, so stelle man sich beliebig oft die immer veränderte Aufgabe:

Einer Fläche zweiter Ordnung ein reguläres Tetraeder einzuschreiben, dessen Lage der Lage eines gegebenen ähnlich ist.

Es seien f_1, f_2, f_3, f_4 die vier Seitenflächen des gegebenen regulären Tetraeders T, $F^{(2)}$ die gegebene Fläche zweiter Ordnung. Wir bringen die Ebene von f_1 mit $F^{(2)}$ zum Schnitt und, wenn letzterer imaginär, eine zu f_1 parallele Ebene ε_1; das Resultat ist der Kegelschnitt K_1; nun construiren wir den dem K_1 ähnlichen, dem Dreieck in f_1 umschriebenen Kegelschnitt K'_1, welcher eindeutig bestimmt ist, da zu seiner Construction fünf Punkte vorliegen. In derselben Weise verfahren wir in Bezug auf f_2 und f_3, und erhalten demgemäss die Kegelschnitte K'_2 und K'_3, welche mit K'_1 eine Fläche zweiter Ordnung $F'^{(2)}$ bestimmen, die dem Tetraeder T umschrieben ist und von welcher beliebig viel ebene Schnitte linear construirt werden können. Die beiden Flächen $F^{(2)}$ und $F'^{(2)}$ sind einander ähnlich und in ähnlicher Lage befindlich, denn sie haben sechs und folglich alle Punkte des durch $F^{(2)}$ auf der unendlich fernen Ebene bestimmten Kegelschnittes gemeinsam. Ermittelt man nun das Centrum von $F'^{(2)}$, hierauf die Schnittpunkte zweier parallelen Durchmesser von $F^{(2)}$ und $F'^{(2)}$ mit diesen Flächen, so hat man zwei Paare entsprechender Punkte und somit das Aehnlichkeitscentrum C als Schnittpunkt der Verbindungslinien entsprechender Punkte. Von C aus projicire man nun T in die Fläche $F^{(2)}$, womit die Aufgabe gelöst ist.

Es geht aus dieser Lösung zugleich der interessante Satz hervor: In eine Fläche zweiter Ordnung lässt sich immer ein reelles und nur ein reguläres Tetraeder einschreiben, dessen Lage der Lage eines beliebig gegebenen Tetraeders direct ähnlich ist.

Jena, den 5. August 1884.

Kleinere Mittheilungen.

XXIV. Bemerkungen über die projectivischen Sätze von Schlömilch.

(Jahrg. XVII S. 380 dieser Zeitschrift.)

(Hierzu Taf. IX Fig. 1–3.)

Fig. 1 zeigt in Orthogonalprojection ein Fünfflach, dessen Grundfläche, ein Vierseit $(A_{1...4})$, in der Zeichenebene liegt, dessen Spitze (B) sich in beliebiger Höhe über derselben befindet. Durch die Diagonale $|FG|$ des Vierseits ist eine Ebene $[FGA'_1]=[\varepsilon]$ gelegt und deren Schnitt $(A)'_{1...4}$ mit den Seitenflächen des Körpers gezeichnet. Wenn man die Punkte $(A_1A'_3,\ A_2A'_4,\ldots)$ verbindet, so schneiden alle diese Geraden den Strahl $|BE|$ in dem Punkte (B_1), welcher (B) harmonisch zugeordnet ist in Bezug auf $(E_1,\ E'_1)$, wie aus der Anschauung des Vierseits $(A_1\,A_3\,A'_3\,A'_1\ldots)$ erhellt.

Fig. 2 zeigt, dass diese harmonische Zuordnung der Punktreihe $|B\,B_1\,E'\,E''|$ auch dann eintritt, wenn $[\varepsilon']$ und (B') beliebig angenommen sind und dass infolge dessen das Vierseit $(A''_{1...4})$ in einer Ebene liegt, wie der zweite angeführte Satz ausspricht. Dieser enthält also eine Verallgemeinerung des ersten. Die dualistische Uebertragung desselben führt dagegen auf die gleiche Vorstellung zurück, indem er wohl eine Beziehung zwischen Punkten und Ebenen feststellt, aber nicht eine Beziehung zwischen Punkten unter sich einer solchen zwischen Ebenen unter sich zur Seite steht.

Aus Fig. 2 erkennt man ferner, dass die Diagonalen $|A'_1A'_3,\ A''_1A''_3|$ in einem Punkte (E'_2) des Strahles $|BE_2|$ zusammentreffen, welcher zu $|BE_1|$ harmonisch liegt in Bezug auf $|BA_1,\ BA_3|$. Ebenso müssen $|A'_2A'_4,\ A''_2A''_4|$ in (E'_3) des Strahles $|BE_3|$ sich schneiden. Die Schnittlinie $|E'_2\,E'_3|$ von $[E'_{123},\ E''_{123}]$ geht durch (e_1), in welchem $[BE_2E_3,\ E'_{123},\ E''_{123}]$ zusammentreffen.

Nehmen wir in dem Vierflach $[BE_{123}]$ die Grundfläche als $[E'_{123}]$, so fällt $|E'_2\,E'_3|$ in die Spurlinie $|e_1|$ der harmonischen $[E''_1]$ und wird Axe eines harmonischen Ebenenbüschels $e_1[BB_1\,E'_1\,E''_1]$. Fig. 3 zeigt den Punkt (P), in welchem sich die harmonischen Ebenen $[e_1\,E''_1,\ e_2E''_2,\ e_3E_3]$ schneiden, wenn wir auf $|BE_1,\ BE_2,\ BE_3|$ die Projectionscentren $(B_1\,B_2\,B_3)$ beliebig annehmen. Es ergiebt sich dann $|e'e''BP|=-1$.

Die Lage der $(y_{1,2,3})$ in $[B_{123}]=[\beta]$, nach welchen die Strahlen $|E_1 P|$ gerichtet sind, beweist, dass (P) eine zum Pol von $[\beta]$ in Bezug auf das Tetraeder $[B E'_{123}]$ projectivische Punktreihe auf $|Be'|$ beschreibt, wenn $[\beta]$ den Ebenenbüschel um die Spurlinie $|b|$ durchläuft. Die beiden Punktreihen sind gleichlaufend, so lange $|b|$ ausser dem Dreieck (E'_{123}) liegt; dieselben werden gegenläufig, wenn $|b|$ die Seiten von (E_{123}) schneidet; in jedem Falle kann (P) zweimal mit dem Pol von $[\beta]$ zusammenfallen, nämlich dann, wenn $[\beta]$ durch die Spitze (B) geht und wenn dieselbe mit $[\varepsilon']$ identisch ist.

Schliesslich mag darauf hingewiesen werden, dass in Fig. 2 das Vierseit durch einen Kegelschnitt ersetzt werden kann, für welchen (E_1) Pol und $|E_2 E_3|$ die entsprechende Polare ist. Wir erhalten dadurch ein Kegelpaar, deren Spitzen (B, B_1) sind und welche sich in zwei ebenen Curven $[E', E'']$ schneiden, worauf schon Steiner in seinen „Geometrischen Betrachtungen", Bd. 1 von Crelle's Journal, aufmerksam machte.

Zürich-Hottingen. F. Graberg.

XXV. Unterscheidungszeichen der Flächen zweiter Ordnung.

Die Unterscheidungszeichen der Flächen zweiter Ordnung gewinnt Schlömilch, Anal. Geometrie des Raumes § 38, aus der allgemeinen Gleichung zweiten Grades durch Specialisiren. Es sei im Folgenden gestattet, zunächst den umgekehrten Weg einzuschlagen und aus den ordinären Artengleichungen Bedingungen zu gewinnen, welche auch für die allgemeine Gleichung nothwendig sind. Dass dieselben gleichzeitig hinreichend sind, soll dann durch die von Baltzer, Leipz. Berichte 1873, S. 538, eingeführte Zerlegung bewiesen werden. Dabei wird eine Ausdehnung auf die singulären Flächen zweiter Ordnung gewonnen werden.

Flächen zweiter Ordnung mit nur einfachen Punkten werden durch eine der folgenden sechs Gleichungen dargestellt, und zwar im schiefwinkligen Coordinatensystem:

$$\text{I)}\ \frac{\xi^2}{\varkappa^2}+\frac{\eta^2}{\lambda^2}+\frac{\zeta^2}{\mu^2}+1=0,\qquad \text{II)}\ \frac{\xi^2}{\varkappa^2}-\frac{\eta^2}{\lambda^2}+\frac{\zeta^2}{\mu^2}-1=0,$$

$$\text{III)}\ \frac{\xi^2}{\varkappa^2}-\frac{\eta^2}{\lambda^2}+\zeta=0;$$

$$\text{IV)}\ \frac{\xi^2}{\varkappa^2}+\frac{\eta^2}{\lambda^2}+\frac{\zeta^2}{\mu^2}-1=0,\qquad \text{V)}\ \frac{\xi^2}{\varkappa^2}-\frac{\eta^2}{\lambda^2}+\frac{\zeta^2}{\mu^2}+1=0,$$

$$\text{VI)}\ \frac{\xi^2}{\varkappa^2}+\frac{\eta^2}{\lambda^2}+\zeta=0,$$

und zwar liefert I) eine imaginäre Fläche, II) ein hyperbolisches Hyperboloid, III) ein hyperbolisches Paraboloid, IV) ein Ellipsoid, V) ein elliptisches Hyperboloid, VI) ein elliptisches Paraboloid.

Die Determinante vierten Grades der Functionen von $\xi|\eta|\zeta$ ist stets von Null verschieden, bei den ersten drei positiv, bei den letzten drei negativ. Die ersten Unterdeterminanten (an der linken oberen Ecke) dritten und zweiten Grades sind bei I) und IV) beide positiv, bei II) und V) nicht beide positiv [welches variable Glied man auch als negativ nimmt]; bei III) und VI) ist die Unterdeterminante dritten Grades null.

Da diese sechs Artengleichungen aus der allgemeinen Gleichung zweiten Grades durch lineare Transformation gewonnen werden können, so unterscheiden sich die Determinanten der allgemeinen Gleichung und der Artgleichung nur durch das Quadrat der Substitutionsdeterminante als Factor, wodurch die oben gefundenen Eigenschaften [+, —, 0] keine Aenderung erleiden.

Es sei die Gleichung der Fläche zweiter Ordnung

$$u \equiv u_1 x + u_2 y + u_3 z + u_4 = 0,$$

wobei

$$u_1 = \tfrac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} = a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4,$$

$$u_2 = \tfrac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4,$$

$$u_3 = \tfrac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial z} = c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4,$$

$$u_4 \qquad = d_1 x + d_2 y + d_3 z + d_4.$$

Hier ist $a_2 = b_1$, $b_3 = c_2$ u. s. w. Die obenerwähnten Determinanten sind dann

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = (abcd), \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (abc), \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = (ab)$$

und die aus den Artengleichungen gewonnenen Bedingungen lauten:

$(abcd)$ positiv,	(abc) u. (ab) beide positiv,	imaginäre Fläche;
„ „	$(abc) = 0$ [(ab) negativ],	hyperbol. Paraboloid;
„ „	(abc) u. (ab) nicht beide positiv,	„ Hyperboloid;
$(abcd)$ negativ,	(abc) u. (ab) beide positiv,	Ellipsoid;
„ „	$(abc) = 0$ [(ab) positiv],	elliptisch. Paraboloid;
„ „	(abc) u. (ab) nicht beide positiv,	„ Hyperboloid.

Um zu zeigen, dass diese Bedingungen nicht nur nothwendig, sondern hinreichend sind, wollen wir u in Quadrate linearer Functionen von $x|y|z$ zerlegen und zwar zunächst unter der Voraussetzung, dass a_1 nicht null ist.

$$1) \quad a_1 u = [a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4]^2 + (ab) y^2 + 2(ac) yz + 2(ad) y + (a_1 c_3) z^2 + 2(a_1 d_3) z + (a_1 d_4),$$

wobei die vorkommenden Determinanten zweiten Grades folgende Bedeutung haben:

$$(ac) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \quad (a_1 c_3) = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}, \quad a_1 d_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ d_1 & d_4 \end{vmatrix}.$$

Ist (ab) nicht null, so können wir nach Multiplication mit demselben ein weiteres Quadrat absondern:

$$2) \quad a_1(ab)u = (ab)[a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4]^2 + [(ab)y + (ac)z + (ad)]^2 \\ + a_1[(abc)z^2 + 2(abd)z + (a_1 b_2 d_4)],$$

wobei wiederum folgende Abkürzungen gelten:

$$(abd) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}, \quad (a_1 b_2 d_4) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix}.$$

Ist auch (abc) von null verschieden, so dürfen wir dasselbe als Factor hinzufügen und gewinnen dadurch die erstrebte Zerlegung:

$$3) \quad \begin{aligned} a_1(ab)(abc)u = {} & (ab)(abc)[a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4]^2 \\ & + (abc)[(ab)y + (ac)z + (ad)]^2 \\ & + a_1[(abc)z + (abd)]^2 \\ & + a_1(ab)(abcd). \end{aligned}$$

Setzt man

$$\xi = a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4, \quad \eta = (ab)y + (ac)z + (ad), \quad \zeta = (abc)z + (abd)$$

und dividirt unter der Voraussetzung, dass $(abcd)$ von Null verschieden ist, durch $a_1(ab)(abcd)$, so wird

$$4) \quad \frac{(abc)}{(abcd)} u = \frac{\xi^2}{a_1(abcd):(abc)} + \frac{\eta^2}{a_1(ab)(abcd):(abc)} + \frac{\zeta^2}{(ab)(abcd)} + 1.$$

Die Gleichung $u = 0$ ist demnach unter der Voraussetzung, dass keine der Determinanten $(abcd)$, (abc), (ab), a_1 verschwindet, stets in die Form $(4) = 0$ überführbar und diese deckt sich unter unseren oben angeführten Bedingungen mit einer der Gleichungen I), II), IV), V). Die Bedingungen für die imaginäre Fläche, das Ellipsoid und die Hyperboloide sind demnach nicht nur nothwendig, sondern auch hinreichend, abgesehen von den nur vorläufigen Einschränkungen für a_1 und zum Theil (ab).

Ist $(abc) = 0$, so müssen wir bei der Gleichung $(2) = 0$ stehen bleiben und erhalten in der That, wenn wir

$$a_1[(abd)z + (a_1 b_2 d_4)] = \zeta'$$

setzen, die erwartete Gleichung des Paraboloids

$$(ab)\xi^2 + \eta^2 + \zeta' = 0,$$

welches je nach dem Vorzeichen von (ab) elliptisch oder hyperbolisch wird. Gleichzeitig erkennt man, dass (ab) und $(abcd)$ in diesem Falle stets entgegengesetzten Zeichens sind, so dass die Kenntniss des einen schon hinreicht.

Die Beschränkungen, welche bei der Aufstellung von 1), 2), 3) und 4) gemacht sind, sollen nun nach ihrem Werthe geprüft werden. Ob a_1 positiv oder negativ genommen wird, ist willkürlich [vergl. Schlömilch a. a. O. S. 221]; auch das verschwindende a_1 wird bei der Vertauschbarkeit von x mit y oder z etwas wesentlich Neues nur liefern, wenn gleichzeitig

$$a_1=0,\quad b_2=0,\quad c_3=0,\quad d_4=0,$$

also

$$\tfrac{1}{2}u=a_2\,xy+c_1\,xz+c_2\,yz+d_1x+d_2y+d_3z.$$

Die Determinante vereinfacht sich dann wesentlich [Baltzer, Det., § 5]:

$$(abcd)=\begin{vmatrix}0 & a_2 & c_1 & d_1\\ a_2 & 0 & c_2 & d_2\\ c_1 & c_2 & 0 & d_3\\ d_1 & d_2 & d_3 & 0\end{vmatrix}=[a_2d_3+(cd)]^2-4a_2d_3c_1d_2,$$

$$(abc)=2a_2c_1c_2,$$

$$(ab)=-a_2^2.$$

Will man keine neue Zerlegung machen, so genügt die Substitution $2x=x'+y'$, $2y=x'-y'$ mit der Determinante $-\frac{1}{2}$, um ein u' zu erhalten, dessen erster Coefficient a'_1 nicht verschwindet. Die neuen Determinanten sind dann

$$(a'b'c'd')=\tfrac{1}{4}(abcd),\quad (a'b'c')=\tfrac{1}{4}a_2c_1c_2,\quad (a'b')=-\tfrac{1}{4}a_2^2;$$

da (ab) hier immer negativ, werden wir imaginäre Flächen und Ellipsoide nicht erhalten; ebenso wenig elliptische Flächen, da $(abcd)$ stets positiv. Es bleibt ein hyperbolisches Hyperboloid für den Fall, dass c_1 und c_2 und selbstredend a_2 von Null verschieden sind; ein hyperbolisches Paraboloid, wenn eines derselben null ist.

Man kann aber auch unter der Voraussetzung, dass a_2 nicht null ist, die Zerlegung in Quadrate ohne vorhergehende Transformation ausführen. Es ist

$$\begin{aligned}2a_2u &= 4(a_2x+c_2z+d_2)(a_2y+c_1z+d_1)-4(c_2z+d_2)(c_1z+d_1)\\ &=[a_2(x+y)+(c_2+c_1)z+d_2+d_1]^2-[a_2(x-y)+(c_2-c_1)z+d_2-d_1]^2\\ &\qquad -4[c_1c_2z^2+(c_1d_2+c_2d_1)z+d_1d_2].\end{aligned}$$

Ist nun c_1 oder c_2 null, so erhält man die Gleichung eines hyperbolischen Paraboloids, da die letzte Klammer linear für z wird:

$$\xi^2-\eta^2+\zeta'=0.$$

Sind c_1 und c_2 beide von null verschieden, so können wir fortfahren:

$$2a_2c_1c_2u=c_1c_2\xi^2-c_1c_2\eta^2-[2c_1c_2z+c_2d_1+c_1d_2]^2+(cd)^2$$

und erhalten die Gleichung eines hyperbolischen Hyperboloids, da immer nur zwei Quadrate eines Zeichens werden können. Die für a_1 angenommene Beschränkung beeinträchtigt also in keiner Weise unsere obigen Bedingungen; dieselben bleiben nothwendig und sind hinreichend.

Ist ferner gegen die bei 2) gemachte Voraussetzung $(ab)=0$, so kann an seine Stelle $(a_1 c_3)$, (ac) oder eine andere Unterdeterminante von (abc) treten. Ein besonderer Fall wird es aber sein, wenn gleichzeitig

$$(ab)=0, \quad (ac)=0, \quad (a_1 c_3)=0.$$

Es verschwinden dann nämlich alle Unterdeterminanten zweiten Grades von (abc), dies selbst und infolge des Verschwindens aller Unterdeterminanten zweiten Grades auch (abd), (acd), (bcd), somit $(abcd)$, d. h. es ist in diesem Falle $(abc)=0$, $(abcd)=0$. Die Fläche zweiter Ordnung sowohl, wie der Asymptotenkegel sind singulär. Die Gleichung 1) geht dann über in die Form

$$\xi^2+\eta=0,$$

d. i. die Gleichung eines parabolischen Cylinders, für den wir die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen so gefunden haben.

Ist nun

$$(ab)=0, \quad (ac)=0, \quad (a_1 c_3)=0, \quad (ad)=0, \quad (a_1 d_3)=0,$$

so verschwinden alle Unterdeterminanten zweiten Grades von (abc) und $(abcd)$, welche nicht d_4 enthalten, und (abc) und $(abcd)$ selbst. Die Gleichung 1) erscheint in der Form

$$[a_1 x+a_2 y+a_3 z+a_4]^2+(a_1 d_4)=0,$$

d. h.: die Fläche zweiter Ordnung ist reducibel und besteht aus zwei parallelen Ebenen.

$$(ab)=0, \quad (ac)=0, \quad (a_1 c_3)=0, \quad (ad)=0, \quad (a_1 d_3)=0, \quad (a_1 d_4)=0$$

sind sechs nothwendige und hinreichende Bedingungen, dass die Fläche zweiter Ordnung eine Doppelebene ist, mit der Gleichung

$$[a_1 x+a_2 y+a_3 z+a_4]^2=0.$$

Dass alle anderen Zerlegungen in diesem Falle zu derselben Gleichung führen, liegt, wie das Verschwinden aller Unterdeterminanten von (abc) bei drei, von $(abcd)$ bei sechs Bedingungen, an dem symmetrischen Aufbau von (abc) und $(abcd)$.

Die bei 3) gemachte Voraussetzung, dass (abc) von Null verschieden sein sollte, wird hinfällig, sobald wir die Gleichung eines Paraboloids vor uns haben. Zu betonen ist hier, dass (abc) gegenüber den anderen Subdeterminanten eine besondere Stellung einnimmt, deren geometrische Bedeutung noch betrachtet werden soll.

Ist nun

$$(abc)=0 \quad \text{und} \quad (abd)=0,$$

so nimmt die Gleichung 2) die Form an

$$(ab)\xi^2+\eta^2+(a_1 b_2 d_4)=0,$$

d. i. die Gleichung eines Cylinders, elliptisch bei positivem (ab), hyperbolisch bei negativem (ab) [vergl. Schlömilch a. a. O. § 24]. Da $(abc)=0$ und $(abd)=0$, sind die Subdeterminanten (ab), (bc), (bd)

proportionirt und es verschwinden infolge dieser zwei Bedingungen alle Subdeterminanten dritten Grades von $(abcd)$, welche d_4 nicht enthalten. $(abcd)$ ist selbst gleich Null.

Ist

$$(abc)=0,\quad (abd)=0,\quad (a_1 b_2 d_4)=0,$$

so geht die Gleichung 2) über in

$$(ab)[a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4]^2 + [(ab)y + (ac)z + (ad)]^2 = 0,$$

d. i. die Gleichung zweier Ebenen mit realer endlich ferner Durchschnittslinie. Die Ebenen selbst sind imaginär, wenn (ab) positiv ist. Zu bemerken ist, dass mit (abc), (abd), $(a_1 b_2 d_4)$ alle Subdeterminanten dritten Grades verschwinden, wie oben bewiesen ist und wie ersichtlich gemacht werden kann, wenn man setzt

$$u=(ax+by+cz+d)(a'x+b'y+c'z+d'),$$

da dann

$$16(abcd)=\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \\ d & d' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a' & a \\ b' & b \\ c' & c \\ d' & d \end{vmatrix},\quad 8(abc)=\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a' & a \\ b' & b \\ c' & c \end{vmatrix},\quad 4(ab)=\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a' & a \\ b' & b \end{vmatrix} = -(ab')^2,$$

wo $(abcd)$, (abc) und alle anderen Determinanten höheren als zweiten Grades als Producte schmaler Determinanten verschwinden. Da die Fläche zweiten Grades neun, die zwei Ebenen sechs unabhängige Coefficienten enthalten, so sind drei Bedingungen nothwendig und hinreichend, dass die Fläche zweiter Ordnung aus zwei sich schneidenden Ebenen besteht.

Ist (abc) nicht null, so wird die Gleichung 3) noch eine Besonderheit bieten für den Fall

$$(abcd)=0;$$

sie geht dann über in

$$(ab)(abc)\xi^2+(abc)\eta^2+a_1\zeta^2=0,$$

d. i. die Gleichung eines Kegels mit dem Centrum $\xi=0\,|\,\eta=0\,|\,\zeta=0$, welches real ist, während der Kegel selbst imaginär sein kann (vergl. Schlömilch a. a. O. S. 222], was eintritt für den Fall, dass (ab) und (abc) beide positiv sind. Andernfalls ist es ein realer Kegel, der je nach der Stellung der schneidenden Ebene in einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel geschnitten wird [Baltzer, Anal. Geom., § 53].

Hiermit sind sämmtliche ordinäre und singuläre Flächen zweiter Ordnung erledigt. Ehe die Bedingungen zusammengestellt werden, soll noch ein Blick auf die geometrische Bedeutung der Determinanten $(abcd)$ und (abc) geworfen werden, der ihren Einfluss auf die Gestalt der Fläche zweiter Ordnung erklärt.

$(abcd)$ ist die Hesse'sche Determinante von u, welche für die Krümmung der Fläche entscheidend ist. Da dieselbe constant, ist auch die Krümmung der Fläche constant, und zwar enthält die Fläche nur

elliptische Punkte bei negativer Determinante, da die Krümmung dann positiv; nur hyperbolische Punkte bei positiver Determinante; $(abcd)=0$ macht die Krümmung unendlich, die Fläche geradlinig zu einem Kegel, Cylinder, Ebenenpaar oder Doppelebene [vergl. Baltzer a. a. O. § 59).

Die Determinante (abc) ist die Determinante der quadratischen Form von $x|y|z$. Es sei

$$v=v_1x+v_2y+v_3z,$$

wobei

$$v_1=a_1x+a_2y+a_3z, \quad v_2=b_1x+b_2y+b_3z, \quad v_3=c_1x+c_2y+c_3z;$$

dann ist $v=0$ die Gleichung eines Kegels mit dem Centrum $0|0|0$ und der unendlich fernen Geraden der Fläche $u=0$. Dieser Entscheidungskegel, dessen Kanten denen des Asymptotenkegels parallel sind, gestattet nun, die unendlich ferne Linie der Fläche zu bestimmen und daraus auf die Art derselben zu schliessen.

Wir wenden die entsprechende Zerlegung wie oben an und erhalten unter den Voraussetzungen a_1 positiv und (ab) nicht null:

$$1') \qquad a_1v=[a_1x+a_2y+a_3z+a_4]^2+(ab)y^2+2(ac)yz+(a_1c_3)z^2,$$

$$2') \quad a_1(ab)v=(ab)[a_1x+a_2y+a_3z+a_4]^2+[(ab)y+(ac)z]^2+a_1(abc)z^2.$$

Sind nun (ab) und (abc) beide positiv, so ist der Kegel und die unendlich ferne Linie imaginär. Die Fläche ist dann imaginär, oder ein Ellipsoid oder ein imaginärer Kegel mit realem Centrum.

Sind (ab) und (abc) von Null verschieden, aber nicht beide positiv, so ist der Entscheidungskegel ein realer Kegel, die unendlich ferne Linie ein realer Kegelschnitt und die Fläche kann demnach ein Hyperboloid oder ein realer Kegel sein.

Ist $(abc)=0$, so ist der Kegel reducibel und besteht aus zwei Ebenen, die unendlich ferne Gerade also aus zwei Geraden. Ist (ab) positiv, so sind diese Geraden imaginär, ihr Durchschnittspunkt real und die Fläche ist ein elliptisches Paraboloid oder ein elliptischer Cylinder, oder sie besteht aus zwei imaginären Ebenen einer realen Geraden.

Ist neben $(abc)=0$, (ab) negativ, so sind die unendlich fernen Geraden real und die Fläche ist ein hyperbolisches Paraboloid oder ein hyperbolischer Cylinder, oder besteht aus zwei realen Ebenen.

Ist $(ab)=0$, so kann die Gleichung 1) benutzt werden und liefert nur Besonderheiten, wenn daneben $(ac)=0$, $(a_1c_3)=0$; dann muss sie aber an Stelle von 2') treten. Der Kegel ist dann höchst reducibel und besteht aus einer Doppelebene, die unendlich ferne Gerade aus einer Doppelgeraden und die Fläche zweiter Ordnung ist ein parabolischer Cylinder oder besteht aus zwei parallelen Ebenen, welche endlich auch zusammenfallen können.

Damit ist die geometrische Erklärung der Bedingungen, soweit sie aus dem Entscheidungskegel entnommen werden konnte, geliefert. Das

gewonnene **Resultat** ist folgendes, giltig für schiefwinklige wie rechtwinklige Coordinatensysteme:

Ist $u=0$ die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung, in welcher x^2 einen positiven Coefficienten hat, und ist $(abcd)$ die aus den zweiten Ableitungen [hier Coefficienten] gebildete Hesse'sche Determinante, (abc), (ab) u. s. w. entsprechende Subdeterminanten, so sind die **nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die 15 Arten der Flächen zweiter Ordnung** folgende:

A. $(abcd)$ positiv: die Fläche ist hyperbolisch;
B. $(abcd)$ negativ: die Fläche ist elliptisch;
C. $(abcd)=0$: die Fläche ist singulär.

(abc) und (ab) beide positiv:
I) A. die Fläche hat nur imaginäre Punkte,
IV) B. Ellipsoid,
VII) C. ein imaginärer Kegel mit realem Centrum.

(abc) und (ab) von Null verschieden, aber nicht beide positiv:
II) A. hyperbolisches Hyperboloid,
V) B. elliptisches Hyperboloid,
VIII) C. realer [elliptischer] Kegel.

$(abc)=0$: α) (ab) negativ, β) (ab) positiv;
III) α) hyperbolisches Paraboloid,
VI) β) elliptisches Paraboloid.

$(abc)=0$, $(abd)=0$:
IX) α) hyperbolischer Cylinder,
X) β) elliptischer Cylinder.

$(abc)=0$, $(abd)=0$, $(a_1b_2d_4)=0$:
XII) α) zwei reale Ebenen einer Geraden,
XIII) β) zwei imaginäre Ebenen einer realen Geraden.

$(ab)=0$, $(ac)=0$, $(a_1c_3)=0$:
XI) parabolischer Cylinder.

$(ab)=0$, $(ac)=0$, $(ad)=0$, $(a_1c_3)=0$, $(a_1d_3)=0$:
XIV) zwei parallele Ebenen.

$(ab)=0$, $(ac)=0$, $(ad)=0$, $(a_1c_3)=0$, $(a_1d_3)=0$, $(a_1d_4)=0$:
XV) eine Doppelebene.

Berlin, Juli 1884. A. Thaer.

XXVI. Bemerkung über den Ellipsenquadranten.

Bezeichnet $CA=a$ die grosse, $CB=b$ die kleine Halbaxe, γ die Amplitude des Fagnano'schen Punktes D, und E die Quadrantenlänge, so ist bekanntlich

$$arc\,BD = \int_0^{\gamma} \sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}\,.\,d\varphi, \quad \tan\gamma = \sqrt{\frac{a}{b}},$$

$$arc\,BD - arc\,AD = a - b,$$
$$arc\,BD + arc\,AD = E.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt $E = 2\,arc\,BD - a + b$, d. i.

$$E = 2\int_0^{\gamma} \sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}\,.\,d\varphi - a + b.$$

Mittelst der Substitution

$$\tan\varphi = \tan\gamma\,.\,t = \sqrt{\frac{a}{b}}\cdot t$$

ergiebt sich weiter

$$E = 2ab\int_0^1 \sqrt{\frac{a+bt^2}{(b+at^2)^3}}\cdot dt - a + b$$

und durch theilweise Integration

$$1) \qquad E = a + b - 2ab\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{(a+bt^2)(b+at^2)}}.$$

Wegen $a^2 + b^2 > 2ab$ ist der Radicand

$$(a+bt^2)(b+at^2) = ab + (a^2+b^2)t^2 + abt^4 > ab(1+t^2)^2,$$

daher

$$2) \qquad E > a + b - 2\sqrt{ab}\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{1+t^2};$$

andererseits folgt aus 1), wenn der Satz $\sqrt{\alpha\beta} < \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ für $\alpha = a + bt^2$ und $\beta = b + at^2$ benutzt wird,

$$3) \qquad E < a + b - \frac{4ab}{a+b}\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{1+t^2}.$$

Nach Ausführung der auf t bezüglichen Integration ergiebt sich das nicht üble Resultat

$$4) \qquad a + b - (2 - \tfrac{1}{2}\pi)g < E < a + b - (2 - \tfrac{1}{2}\pi)h,$$

worin g das geometrische, h das harmonische Mittel zwischen den Halbaxen bedeutet.

Den Genauigkeitsgrad der Ungleichungen 4) zeigt die nachstehende Tabelle, worin $a = 1$ und zur Abkürzung

$$1 + b - (2 - \tfrac{1}{2}\pi)g = E_g, \quad 1 + b - (2 - \tfrac{1}{2}\pi)h = E_h,$$
$$E - E_g = \Delta_g, \qquad E - E_h = \Delta_h$$

gesetzt ist.

b	E_g	Δ_g	E	Δ_h	E_h
0,0	1,000	+ 0,000	1,000	− 0,000	1,000
0,1	0,964	0,052	1,016	0,006	1,022
0,2	1,008	0,048	1,051	0,006	1,057
0,3	1,065	0,031	1,096	0,006	1,102
0,4	1,129	0,022	1,151	0,004	1,155
0,5	1,197	0,014	1,211	0,003	1,214
0,6	1,268	0,008	1,276	0,002	1,278
0,7	1,341	0,005	1,346	0,001	1,347
0,8	1,416	0,002	1,418	0,000	1,418
0,9	1,493	0,000	1,493	0,000	1,493
1,0	1,571	0,000	1,571	0,000	1,571

Wie man sieht, differirt E_h wenig von E, so lange $b \geqq 0,1$ ist; bei nicht sehr excentrischen Ellipsen darf also näherungsweise

$$E = a + b - \frac{(4-\pi)ab}{a+b} \tag{5}$$

gesetzt werden, was für viele praktische Anwendungen ausreicht. Unter den verschiedenen Formeln, welche eine gleiche Annäherung gewähren, dürfte sich die obige durch ihre grosse Einfachheit auszeichnen.

Schlömilch.

XXVII. Ueber die cubische Parabel mit Directrix.

Wie die ebene Parabel eine Directrix hat, auf welcher die Schnittpunkte von je zwei rectangulären Tangenten liegen, so giebt es auch eine specielle cubische Parabel mit (geradliniger) Directrix, auf welcher die Schnittpunkte von je drei rectangulären Schmiegungsebenen liegen.

In Schröter's Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung steht der Satz:

„Wenn man von einem beliebig gewählten festen Punkte $\mathfrak{O}$ Parallelen zieht zu sämmtlichen Tangenten einer cubischen Parabel und Parallelebenen legt zu sämmtlichen Schmiegungsebenen derselben, so bilden jene Strahlen einen Kegel zweiten Grades und diese Ebenen sind die Berührungsebenen desselben Kegels.“

Lassen sich nun an diesen Kegel drei rectanguläre Tangentialebenen legen, so giebt es noch unendlich viele solche Tripel von rectangulären Tangentialebenen, deren Kanten auf einem zweiten, gleichseitigen Kegel liegen. Hieraus folgt der Satz:

Hat eine cubische Parabel Ein Tripel oder Trieder von rectangulären Schmiegungsebenen, so hat sie unendlich viele solche Trieder.

Es sei O die Spitze eines rectangulären Trieders, dessen Kanten die x-, y-, z-Axe genannt werden sollen. Alle übrigen Schmiegungsebenen schneiden die drei Ebenen dieses Trieders je in den Tangenten einer Parabel, z. B. die xy-Ebene in der Parabel P. Ist also O' die Spitze eines zweiten Trieders, so bilden dessen Durchschnitte mit der xy-Ebene ein Dreieck ABC, dessen Seiten P berühren und dessen Höhendurchschnitt H somit auf der Directrix von P liegt, welche durch O geht, weil P die x- und die y-Axe berührt. Nun ist H die Projection von O' auf der xy-Ebene, also liegen die Spitzen sämmtlicher Trieder, O', O'', ..., auf einer durch OH und die z-Axe gehenden Ebene, weil ihre Projectionen H', H'' u. s. f. auf der Directrix OH liegen. Ebenso beweist man, dass die Triederspitzen O', O'', ... auf einer durch die y-Axe und die Directrix der Parabel in der xz-Ebene, und endlich auf einer dritten, durch die x-Axe und durch die Directrix der Parabel in der yz-Ebene gehenden Ebene, also auf einer durch O gehenden Geraden liegen, d. h.:

Die Spitzen sämmtlicher rectangulären Trieder von Schmiegungsebenen der cubischen Parabel liegen auf einer Geraden.

Diese Gerade kann man also die Directrix der cubischen Parabel nennen. Aus dem Gesagten geht weiter unmittelbar hervor:

Die Projection der Directrix einer cubischen Parabel auf irgend einer Schmiegungsebene ist die Directrix der in dieser Ebene enthaltenen Parabel.

Der um das Dreieck ABC beschriebene Kreis geht durch den Brennpunkt der Parabel in der xy-Ebene; ein zweites Trieder O' schneidet diese Ebene in einem andern Dreieck $A'B'C'$, dessen Umkreis ebenfalls durch den Brennpunkt geht u. s. f., oder:

Bei einer cubischen Parabel mit Directrix wird jede Schmiegungsebene von allen rectangulären Triedern in Dreiecken geschnitten, deren Umkreise durch denselben Punkt gehen, nämlich durch den Brennpunkt der dieser Schmiegungsebene entsprechenden Parabel, und deren Höhendurchschnitte auf einer Geraden, der Directrix dieser Parabel, liegen.

Für die cubische Parabel mit Directrix giebt es zwei specielle Beispiele; das erste ist in dem Satze enthalten (s. den Aufsatz über die Krümmung der Flächen, diese Zeitschr. Bd. XXIX S. 129):

„Die Mittelpunkte O aller Ellipsoide (oder centrischen Flächen zweiten Grades), welche irgend eine Fläche in einem Punkte S in dritter Ordnung berühren, liegen auf einer bestimmten, durch S gehenden Geraden SO, und ihre Hauptebenen sind die Schmiegungsebenen einer cubischen Parabel, deren Directrix SO ist.

Das zweite Beispiel erhält man durch die Normalenregelflächen, deren Basis ein ebener Schnitt des Ellipsoids ist. Es sei nämlich

$$1)\qquad \frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1$$

die Gleichung des Ellipsoids. In dem Punkte S oder (ξ, η, ζ) desselben ziehe man die Normale und bestimme auf ihr einen Punkt $M(x, y, z)$ durch die Relationen

$$2)\qquad \xi\left(1+\frac{m^2}{a^2}\right)=x,\quad \eta\left(1+\frac{m^2}{b^2}\right)=y,\quad \zeta\left(1+\frac{m^2}{c^2}\right)=z$$

(m ist ein Parameter, welcher die Lage von M auf der Normale durch die Gleichung bestimmt $m^2=SM.p$, wo p der Abstand der Tangentialebene in S vom Mittelpunkte ist), so erhält man aus 1) und 2)

$$3)\qquad \frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{m^2}{a^2}\right)^2}+\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{m^2}{b^2}\right)^2}+\frac{z^2}{c^2\left(1+\frac{m^2}{c^2}\right)^2}=1.$$

Für einen bestimmten Werth von m ist 3) die Gleichung eines Ellipsoids, auf welchem der Punkt M liegt; durch Veränderung des Parameters m erhält man eine Reihe von Ellipsoiden, welche ich Systemellipsoide nenne, denn die Durchschnittspunkte jeder Normale von 1) mit ihnen bilden ein affin-veränderliches System.

Ist nun

$$4)\qquad \frac{\xi}{A}+\frac{\eta}{B}+\frac{\zeta}{C}=1$$

irgend eine Ebene, welche 1) in der Ellipse E schneidet, so sind

$$5)\qquad \frac{x}{A\left(1+\frac{m^2}{a^2}\right)}+\frac{y}{B\left(1+\frac{m^2}{b^2}\right)}+\frac{z}{C\left(1+\frac{m^2}{c^2}\right)}=1$$

die dieser Ebene entsprechenden Systemebenen, wovon jede das einem bestimmten Parameter m entsprechende Systemellipsoid in einer Ebene schneidet; alle diese Ellipsen liegen auf der Regelfläche, welche von den Normalen von 1) gebildet wird, deren Fusspunkte auf dem Umfang von E liegen. Man setze nun

$$6)\qquad A\left(1+\frac{m^2}{a^2}\right)=X,\quad B\left(1+\frac{m^2}{b^2}\right)=Y,\quad C\left(1+\frac{m^2}{c^2}\right)=Z,$$

so erhält man durch Elimination von m

$$7)\qquad \begin{gathered}\frac{Y}{B\frac{b^2-c^2}{b^2}}-\frac{Z}{C\frac{b^2-c^2}{c^2}}=1,\\ -\frac{Z}{C\frac{a^2-c^2}{b^2}}+\frac{X}{A\frac{a^2-c^2}{a^2}}=1,\\ \frac{X}{A\frac{a^2-b^2}{a^2}}-\frac{Y}{B\frac{a^2-b^2}{b^2}}=1.\end{gathered}$$

Dies sind die Gleichungen von drei Parabeln in Tangentialcoordinaten, wovon jede zwei Axen berührt; also berühren alle Systemebenen 5) diese drei Parabeln, somit osculiren sie eine cubische Parabel, deren Directrix sich in den Directricen der (ebenen) Parabeln 7) projicirt. Diese Directricen entsprechen den Gleichungen (in Cartesischen Coordinaten):

$$8) \qquad \frac{y}{z}=\frac{C}{B}\frac{b^2}{c^2}, \quad \frac{z}{x}=\frac{A}{C}\frac{c^2}{a^2}, \quad \frac{x}{y}=\frac{B}{A}\frac{a^2}{b^2}.$$

Dieselben Relationen stellen aber auch die Projectionen der Geraden vor, welche den Mittelpunkt O des Ellipsoids 1) mit dem Pol von E verbindet. D. h.:

Die Normalenregelflächen, deren Basis ein ebener Schnitt E eines Ellipsoids (oder Hyperboloids) ist, werden von den Schmiegungsebenen einer cubischen Parabel in Ellipsen geschnitten, deren Directrix die vom Mittelpunkt nach dem Pol von E gezogene Gerade ist.

Bewegt sich die Ebene 5) parallel mit sich selbst, so wird sie endlich Tangentialebene des Ellipsoids 1) im Punkte S. Die Directricen 8) der drei Parabeln und somit auch die Directrix der cubischen Parabel bleiben unveränderlich. Die Systemebenen 5) bewegen sich ebenfalls parallel mit sich selbst und berühren im Grenzfalle jede ihr Systemellipsoid, woraus folgt:

Jede Normale eines Ellipsoids schneidet sämmtliche Systemellipsoide in Punkten, deren Tangentialebenen Schmiegungsebenen einer cubischen Parabel sind und deren Directrix der nach dem Fusspunkt der Normale gehende Halbmesser ist.

Die Normale eines Ellipsoids lässt sich also in doppelter Weise auffassen, entweder als Gerade oder als unendlich dünnes Normalenbündel; und dann gehört zu ihr eine cubische Parabel mit Directrix, die sich nach dem Obigen leicht construiren lässt. Es sind jedoch drei specielle Fälle zu berücksichtigen:

1. Die Normale fällt mit einer Axe zusammen, dann stehen die Systemebenen senkrecht auf derselben. Das Normalenbündel ist das sogenannte Sturm'sche Konoid (Compt. rend. 1845; ursprünglich von Hamilton entdeckt Irish Ac. t. 15);
2. die Normale liegt in einer Hauptebene des Ellipsoids, die Systemebenen berühren einen parabolischen Cylinder;
3. im allgemeinen Falle osculiren die Systemebenen eine cubische Parabel mit Directrix.

Reutlingen, Januar 1884. Dr. O. Böklen.

XXVIII. Nachtrag zur Abhandlung: „Ueber die Krümmungsmittelpunkte der Polbahnen".

(Diese Zeitschrift, Bd. XXIX S. 212 flg.)

(Hierzu Taf. IX Fig. 4 u. 5.)

Die Construction der Krümmungsmittelpunkte der Polbahnen, welche ich in dieser Zeitschrift Bd. XXIX S. 218 gegeben habe, lässt eine Abänderung zu, welche im Folgenden mitgetheilt werden soll. Zu dieser modificirten Construction gelangen wir durch Benutzung eines einfachen planimetrischen Satzes, auf den meines Wissens bisher noch nicht aufmerksam gemacht worden ist; die Ableitung desselben mag daher hier Platz finden.

Ziehen wir in dem Paralleltrapez $A_1 A_2 B_2 B_1$ (Fig. 4 Taf. IX) durch den Schnittpunkt C_0 der beiden Diagonalen eine Parallele zu $A_1 A_2$, beziehentlich $B_1 B_2$, dann ist der reciproke Werth der Strecke $C_0 C_1 = C_0 C_2$ gleich der Summe der reciproken Werthe der Strecken $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$. Der Beweis für die Richtigkeit dieses Satzes ergiebt sich sofort, wenn man beachtet, dass

$$\triangle A_1 C_1 C_0 \sim \triangle A_1 B_1 B_2 \text{ und } \triangle B_1 C_1 C_0 \sim \triangle B_1 A_1 A_2.$$

Denn es ist demzufolge

$$A_1 C_1 = \overline{C_0 C_1} \cdot \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{B_1 B_2}}, \quad B_1 C_1 = \overline{C_0 C_1} \cdot \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{A_1 A_2}},$$

und durch Addition beider Relationen erhält man

$$A_1 C_1 + B_1 C_1 = A_1 B_1 = \overline{C_0 C_1} . \overline{A_1 B_1} \left(\frac{1}{A_1 A_2} + \frac{1}{B_1 B_2} \right),$$

also, wie behauptet,

$$\frac{1}{C_0 C_1} = \frac{1}{A_1 A_2} + \frac{1}{B_1 B_2}.$$

Legt man durch den Schnittpunkt der beiden nicht parallelen Seiten des Trapezes einen Parallelstrahl zu $A_1 A_2$ bez. $B_1 B_2$, so wird letzterer von den beiden Diagonalen in zwei Punkten getroffen, deren Entfernung durch den Schnittpunkt der nichtparallelen Seiten des Trapezes in zwei gleiche Theile zerlegt wird; es lässt sich ganz analog dem Vorhergehenden nachweisen, dass der reciproke Werth eines solchen Theiles gleich der Differenz der reciproken Werthe der Strecken $B_1 B_2$ und $A_1 A_2$ ist.

Was nun den eigentlichen Gegenstand dieser Mittheilung anlangt, so bemerken wir, dass wir die in der citirten Abhandlung erhaltenen Resultate als bekannt voraussetzen und deshalb die gleichen Bezeichnungen wie früher benutzen. Auf S. 218 wurde gezeigt, dass auf dem durch das Momentancentrum M gehenden Strahle MG, welcher zu DD_0 bez. EE_0 parallel ist (Fig. 5), ein Punkt H existirt, dessen Verbindungs-

strahlen mit D und E die Polbahnnormale MD_0 in den beiden Krümmungsmittelpunkten K_p und K_π der Polbahnen schneiden. Dieser Punkt H lässt sich unter Verwendung des oben angeführten Satzes direct finden, d. h. ohne Zuhilfenahme der Punkte G und J. Beachten wir nämlich, dass

$$\triangle K_p M H \sim \triangle K_p D_0 D$$

ist, so folgt

$$MK_p : MH = K_p D_0 : DD_0 = MD_0 - MK_p : DD_0;$$

setzen wir hierin der früher eingeführten Bezeichnung gemäss $MK_p = \varrho_p$, so ergiebt sich demnach

$$\frac{1}{MH} = \frac{\overline{MD_0}}{\varrho_p . \overline{DD_0}} - \frac{1}{DD_0}.$$

Auf S. 220 fanden wir nun für $\frac{1}{\varrho}$ den Ausdruck

$$\frac{1}{\varrho_p} = \left(\frac{2}{MD} + \frac{1}{ME}\right) \cos\varphi_1 . \cos\varphi_2,$$

welcher unter Berücksichtigung des Umstandes, dass $\varphi_1 = \angle D_0 M D_{01}$, $\varphi_2 = \angle D_0 M D_{02} = \angle D_{01} M D$ ist, auch in der Form

$$\frac{1}{\varrho_p} = \frac{2}{MD_0} + \frac{1}{ME_0}$$

geschrieben werden kann. Letzteren Werth in den Ausdruck für $\frac{1}{MH}$ eingesetzt, giebt

$$\frac{1}{MH} = \frac{1}{DD_0} + \frac{\overline{MD_0}}{\overline{ME_0} . \overline{DD_0}};$$

wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke MDD_0 und MEE_0 erhält man schliesslich

$$\frac{1}{MH} = \frac{1}{DD_0} + \frac{1}{EE_0}.$$

Ziehen wir nun durch den Schnittpunkt S_0 der Diagonalen des Paralleltrapezes DEE_0D_0 eine Parallele zu DD_0 bez. EE_0, welche DE in S treffen mag, so ist auf Grund des vorher bewiesenen Satzes

$$\frac{1}{S_0 S} = \frac{1}{DD_0} + \frac{1}{EE_0};$$

wir erkennen somit, dass $MH = SS_0$ ist. Da aber MH parallel zu DD_0 gezogen wurde, so finden wir H direct, indem wir von dem Schnittpunkte S_0 der Diagonalen des Paralleltrapezes DD_0E_0E ein Perpendikel auf MN fällen; letzteres trifft den durch M parallel zu DD_0 gelegten Strahl in dem gesuchten Punkte H.

Zürich, October 1884. M. Grübler.

XXIX. Notiz über die Lambert'sche Reihe.

Allem Anschein nach ist bisher unbemerkt geblieben, dass sich die Lambert'sche Reihe in ein bestimmtes Integral umsetzen lässt, welches die elliptische Function $sin^2 am u$ enthält. Multiplicirt man nämlich die bekannte Gleichung

$$sin^2 am \frac{Kx}{\pi} = \frac{K-E}{\varkappa^2 E} - \frac{2\pi^2}{\varkappa^2 K^2} \sum \frac{nq^n}{1-q^{2n}} cos\, nx, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

mit $l(1-2q\, cos\, x + q^2)\, dx$, integrirt zwischen den Grenzen $x = 0$, $x = \pi$ und benutzt die bekannten Formeln

$$\int_0^\pi l(1-2q\, cos\, x + q^2)\, dx = 0, \quad \int_0^\pi l(1-2q\, cos\, x + q^2)\, cos\, nx\, dx = -\frac{\pi q^n}{n},$$

so erhält man

$$\int_0^\pi l(1-2q\, cos\, x + q^2)\, sin^2 am \frac{Kx}{\pi}\, dx = \frac{2\pi^3}{\varkappa^2 K^2} \sum \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}.$$

Die auf der rechten Seite stehende Reihe geht in die Lambert'sche Reihe über, wenn q durch $\sqrt{q}$ ersetzt wird.

SCHLÖMILCH.

Historisch-literarische Abtheilung

der

Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.



XXIX. Jahrgang.

Leipzig,
Verlag von B. G. Teubner.
1884.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

I. Abhandlungen.

II. Recensionen.

Geschichte der Mathematik.

Philosophie der Mathematik.

Arithmetik, Algebra, Analysis.

Synthetische, analytische, descriptive Geometrie.

Mechanik und Physik.

Historisch-literarische Abtheilung.

Die arabische Tradition der Elemente Euklid's.

Von

Joh. Ludwig Heiberg

in Kopenhagen.

Hierzu Taf. III Fig. 4—6.

I. Es ist bekannt, mit welchem Eifer die Araber die griechische Fachwissenschaft aufnahmen; so giebt es kaum ein einigermassen bedeutendes Werk eines griechischen Mathematikers, das nicht von ihnen ins Arabische übersetzt und commentirt worden wäre. Aber von all' dem Reichthum ist nur sehr wenig gedruckt und noch wenigeres in solcher Weise, dass es auch dem Nichtorientalisten zugänglich wäre. Was bekannt gemacht worden, ist sehr dazu geeignet, zu zeigen, welch' ein ergiebiges Feld hier noch brach liegt. Es muss daher die sorgfältige und anregende Abhandlung von Herrn Dr. Klamroth „Ueber den arabischen Euklid" (Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft XXXV, 1881, S. 270 — 326) von allen Denen mit Freude begrüsst werden, die sich mit der Geschichte der Mathematik beschäftigen. Dies ist um so mehr der Fall, als der Verfasser S. 326 zu dem Resultat gelangt, dass 26 Sätze nebst mehreren Definitionen, Scholien und Corollarien im griechischen Euklid unecht seien, und dass viele Sätze, besonders im stereometrischen Theile, ursprünglich weit einfachere Beweise hätten. Ein so durchgreifendes Resultat berechtigt den Verfasser zu der Forderung, ein künftiger Herausgeber Euklid's müsse sich auf die eine oder andere Weise mit der arabischen Tradition abfinden. Das werde ich meinerseits hier versuchen, da in der Gesammtausgabe der Werke Euklid's, die Herr Prof. H. Menge in Mainz und ich unternommen haben, die Elemente mir zugefallen sind.

Zuerst werden wir von Herrn Klamroth darüber belehrt, dass die herrschende Ansicht, als ob Campanus die arabische Uebersetzung ziemlich treu wiedergebe, irrig ist. Von den Elementen hatten die Araber zwei Uebersetzungen, die des Hajjaj (c. 800) und des Ishak ben Hunein (c. 900). Von der ersten besitzen wir die Bücher I—VI allein im Cod.

Leidensis 965 (geschr. im J. 1144/45) und XI—XIII vielleicht im Cod. Haun. 81 (Saec. XIII), die zweite, von Thabit ben Korra verbessert, giebt Bodl. 279 (geschr. 1238) vollständig (Lib. I – XIII), während Haun. 81 nur V—X enthält; die nichteuklidischen Bücher XIV und XV, von Kosta ben Luca übersetzt, sind im Bodl. 279 und Haun. 81 enthalten. Die drei genannten Handschriften haben Herrn Klamroth vorgelegen, und er hat gefunden, dass die lateinische Uebersetzung des Campanus weder mit der einen, noch mit der andern der echten arabischen Uebersetzungen stimmt.

Der Verf. berührt bei dieser Gelegenheit auch die neuerdings vielfach behandelte Frage über das Verhältniss zwischen Adelhard von Bath und Campanus, aber seine Bemerkungen hierüber wollen wir hier nicht näher berücksichtigen. Hier ist uns nur das wichtig, dass er, den Campanus betreffend, zu dem Dilemma kommt (S. 274): entweder hat Adelhard-Campanus selbst Veränderungen und namentlich Zusätze gemacht, oder er benutzte eine jetzt verschollene arabische Recension der Elemente. Jedenfalls gilt, was ich in meinen „Studien über Euklid" Cap. I über den Werth der arabischen Ueberlieferung für die Textkritik der *στοιχεῖα* gesagt, fortan nur für Campanus, nicht für die ursprünglichen arabischen Uebersetzungen. Für diese muss die Untersuchung von vorn angefangen werden.

Der Verf. zeigt nun an Beispielen S. 311 flgg., dass Hajjaj's Uebersetzung rücksichtlich der Treue weit hinter Ishak zurückbleibt, indem Hajjaj eher „ein bequemes Schulbuch", als „ein treues Abbild des Originals" geben wollte. Sonderbar ist es, dass die Bücher XI—XIII im Haun. 81, die nach der Subscription der Hajjaj'schen Uebersetzung angehören, sehr wenig von der Uebersetzung des Ishak abweichen. Ob der Verf. mit seiner Vermuthung S. 304—305 hierüber das Richtige trifft, lasse ich dahin gestellt.

Diese beiden Uebersetzungen sind noch ungedruckt, und wir erfahren überhaupt erst durch diese Arbeit Klamroth's Näheres über ihre Beschaffenheit. Gedruckt sind nur die XIII (in einigen Exemplaren gar nur XII) Bücher in der Bearbeitung des Nasireddin Tusi (Romae 1594). Diese XIII Bücher enthalten 452 Sätze. Rechnet man dazu für die zwei letzten Bücher nach Codd. Pariss. 1129 u. 1216, die einen Auszug der vollständigen Bearbeitung Nasireddin's bieten, 16 Sätze, so ergiebt sich für Nasireddin die Gesammtzahl von 468 Sätzen, die von Haji Khalfa I S. 383 für Hajjaj's Uebersetzung bezeugt ist. Klamroth schliesst hieraus, dass Tusi die Uebersetzung des Hajjaj zu Grunde legte. Es scheint mir aber sehr zweifelhaft, ob wir aus Tusi durchaus auf den Bestand der Sätze bei Hajjaj schliessen dürfen. An der einzigen Stelle nämlich, wo sichere Controle möglich ist, scheint keine Uebereinstimmung zu sein. Denn bei Tusi fehlt VI, 12 (S. 277

steht unrichtig VII, 12), während er bei Hajjaj (Cod. Leid.) da ist, wenigstens wenn es erlaubt ist, aus dem Schweigen Klamroth's einen Schluss zu ziehen. Umgekehrt fehlt im Leid. dem I. und III. Buche je ein Satz (S. 273), was bei Tusi nicht der Fall ist. Auch führen Tusi's Worte bei Haji Khalfa I S. 383 eher darauf, dass Tusi aus beiden Uebersetzungen mit Ausscheidung der unechten Zusätze sich seine Recension gebildet (*dicit se, quae de archetypo in editionibus laudatis inveniantur, ab iis separasse, quae accesserint*). Bis also weitere Forschungen das Verhältniss des Tusi zu Hajjaj feststellen, wissen wir über Hajjaj Nichts, als was der Leidensis giebt; namentlich ist es nicht sicher, dass Hajjaj wie Tusi X, 28—29 wegliess.

Ishak's Uebersetzung enthält 478 Sätze (vergl. Haji Khalfa I S. 383), indem hier VI, 12; X, 28—29 nicht wie bei Tusi fehlen und XIII, 1—3 sechs Sätze bilden; dazu hat Ishak noch vier Sätze, die weder der griechische Text, noch Tusi kennen (übersetzt bei Klamroth S. 278 flgg.). Dass diese vier Sätze unecht sind, ist gar nicht zu bezweifeln. Warum Klamroth S. 279 „überzeugt ist, dass sie von Ishak in seiner griechischen Vorlage vorgefunden wurden", sehe ich nicht ein.

Von den bisher genannten Abweichungen abgesehen, stimmen Hajjaj (so weit wir ihn kennen), Ishak und Nasireddin vollständig überein und ihr Euklid weicht vielfach von unserem griechischen ab. Da nun die arabische Tradition bis ins VIII. Jahrhundert hinaufreicht und unsere ältesten Handschriften dem IX. angehören, verlangt Klamroth „aus historischen Gründen" (S. 280), man solle dem arabischen Euklid mehr Glauben schenken als dem griechischen der Handschriften. Man könnte hier sofort einwenden wollen, dass Cod. Vatican. Gr. 190 allem Anschein nach eine vortheonische Recension enthält (Studien über Euklid, Seite 177 flgg.); wo sie also mit den Theonischen Handschriften stimmt, müsse man annehmen, dass wir den Text hätten, wie ihn Theon im IV. Jahrh. las. Aber dieser Umstand allein vermag nicht die Ansicht Klamroth's zu erschüttern. Wenn sonst Nichts gegen ihn einzuwenden wäre, müssten wir eher die Integrität der Redaction im Vatic. 190 aufgeben, und die Meinung annehmen, wofür auch sonst Einiges sprechen könnte, dass die vortheonische Redaction im Vatic. 190 durch Einmischung der Theonischen Vulgata contaminirt sei.

Wenn man den Verf. auf's Wort nehmen wollte (S. 280: „sofern mich keine griechische Handschrift der Elemente widerlegt, die bis ins VIII. Jahrhundert hinaufreicht"), wäre freilich die Widerlegung sehr leicht. Denn es giebt eben eine solche griechische Handschrift, den Palimpsest in British Museum (Add. 17211) aus dem VII. oder Anfang des VIII. Jahrhunderts (Wright: Catalogue of Syriac ms. in the Br. M. II, S. 549). Ich habe die fünf werthvollen Blätter im Sommer 1882 collationirt und werde nächstens meine Lesung vollständig mittheilen. Hier

will ich nur das für die vorliegende Frage Wichtige vorgreifend in aller Kürze geben. Von X, 17, der im Arabischen fehlt, finden sich im Palimpsest zwei Fragmente (ed. August II, S. 18, 23—30 und S. 19, 5 bis zum Schluss). X, 82 hat im Palimpsest die Nummer $\pi\alpha$ (81); unmöglich können also im Palimpsest, wie im Arabischen, vorher acht Sätze gefehlt haben; auch in den übrigen griechischen Handschriften ist der Satz öfters als 81 numerirt. Von X, 113—114, die im Arabischen fehlen, hat der Palimpsest Folgendes erhalten: August II, S. 139, 1 bis zum Schluss und X, 114 (als $\varrho\iota\gamma$) bis S. 140, 20. XIII, 14 ist als $\iota\vartheta$ numerirt (ohne Zweifel waren die analytischen Beweise für Propp. 1—5 besonders numerirt); bei den Arabern ist er Prop. 8. Noch wichtiger ist es aber, dass der Palimpsest auch in den Lesarten ziemlich mit unseren Handschriften stimmt; namentlich ist die Aehnlichkeit mit dem alten Bodleianus überraschend. Aber selbst wenn wir diesen positiven Beweis nicht hätten, könnten wir mit Gewissheit behaupten, dass unsere Handschriften, worunter mehrere aus dem IX.—X. Jahrh. sind und in wesentlichen Punkten übereinstimmen, ohne nach demselben Original abgeschrieben zu sein, eine Redaction repräsentiren, die an Alter der arabischen fast gleich kommt. Aber wenn auch die „historischen Gründe" Klamroth's somit wegfallen, scheint mir die Frage doch noch nicht erledigt, da der Zeitunterschied zwischen dem Palimpsest und der ältesten arabischen Uebersetzung so gering ist (etwa 1 Jahrhundert).

Bekanntlich können wir aber stellenweise die griechische Ueberlieferung weit höher hinauf verfolgen durch Citate bei älteren Schriftstellern, und einige dieser Citate widersprechen bestimmt der arabischen Tradition. Da die Abweichungen in den späteren Büchern am häufigsten sind, wo die Citate am spärlichsten vorkommen (besonders das X. Buch wird äusserst selten citirt), kann die Zahl der Beweisstellen nicht gross sein. Wenn aber die Glaubwürdigkeit der arabischen Ueberlieferung auch nur an einer Stelle ernstlich erschüttert ist, so gewinnen die angeführten relativen Gründe einen erhöhten Werth, und das Eine mit dem Andern befestigt die Auctorität der griechischen Handschriften.

Zuerst hebe ich hervor, dass wenigstens die zwei der von Tusi weggelassenen Sätze unmöglich unecht sein können, wie Klamroth geneigt ist zu glauben (S. 280). Denn VI, 23 wird von Eutokius zu Apollonius S. 32 mit dieser Nummer citirt; also kann VI, 12 nicht gefehlt haben, wenn nicht ein gar sonderbarer Zufall obwaltet. Und X, 29 ist fast wörtlich von Proklus S. 205, 10 angeführt, und zwar als im X. Buche befindlich. Da diese Citate 200—300 Jahre älter sind als die arabische Uebersetzung, verdienen sie doch wohl entschieden den Vorzug. Weil aber die genannten drei Sätze bei Ishak gefunden werden, konnte man meinen, dass Tusi hier in seinem Streben, den Text zu reinigen, zu weit gegangen sei und die Sätze ohne Stütze der Ueberlieferung gestrichen

habe. Aber die angeführte Stelle aus Eutokius (zu Apollon. S. 32) spricht auch gegen die Tradition bei Ishak; denn bei ihm ist VI, 23 als VI, 25 numerirt. Ebenso citirt Simplicius in Aristot. phys. fol. 114b VI, 10 mit dieser Nummer (vergl. Studien üb. Eukl. S. 206), während der Satz bei Ishak VI, 13 ist. Endlich führt Pappus die Sätze XIII, 2, 4, 16 mit diesen Nummern an (V, S. 430, 27; 420, 7; 424, 7); bei Ishak ist dagegen XIII, 2 in XIII, 3 und 4 getheilt, XIII, 4 ist XIII, 8, und XIII, 16 ist als XIII, 19 numerirt. Zu Gunsten der Araber könnte man geltend machen wollen, dass Eutokius in Apollon. S. 44 III, 15 statt III, 16 citirt; denn bei den Arabern bilden III, 11+12 nur einen Satz; hier scheint aber bei Eutokius nur ein zufälliger Fehler vorzuliegen, da der etwas ältere Simplicius in Aristot. phys. fol. 14a Elem. III, 33 mit dieser Nummer citirt.

Bei der angefochtenen Echtheit der Heronischen Definitionen (vergl. jedoch Stud. üb. Eukl. S. 192) will ich kein grosses Gewicht darauf legen, dass Heron öfters mit unseren Handschriften gegen die Araber stimmt; V Def. 12 — 13, die bei den Arabern vertauscht sind, stehen bei ihm in dieser Ordnung (Deff. 126—127, 6); XI Def. 21—22 stehen bei den Arabern vor Def. 18 und 11, während Heron diese vier Definitionen in der richtigen Ordnung hat, doch an verschiedenen Stellen (Def. 24; 84, 2; 96); XI Def. 23 und 25—29 stehen so bei Heron (Def. 96; 100—104), fehlen aber bei den Arabern. Umgekehrt darf aber ebenso wenig daraus auf Uebereinstimmung zwischen Heron's Handschriften von Euklid und denen der Araber geschlossen werden, dass XI Def. 5—7 bei Heron (XI Def. 4 und 8 sind bei ihm Def. 115, 2 vereinigt) wie bei den Arabern fehlen; denn Heron lässt auch XI Def. 16, 19—20 weg.

Dagegen ist es von grosser Bedeutung, dass, wenn die Angabe Klamroth's S. 315 vollständig ist, von den im Griechischen vorhandenen Corollarien nur VI, 8; VIII, 2 und X, 3 auch im Arabischen enthalten sind, da wir doch mehrere der übrigen schon im III. und V. Jahrhundert nachweisen können. So ist das Corollar XIII, 17 von Pappus V S. 436, 5 angeführt, II, 4 und III, 1 von Proklus S. 304, 2 flgg., das nach VII, 2 von demselben S. 303, 22; IV, 15 von Simplicius in Aristot. phys. fol 15. I, 15 kennt schon Proklus S. 301.

Endlich können auch innere Gründe gegen die Glaubwürdigkeit der arabischen Ueberlieferung hervorgehoben werden. Denn wenn es auch unerlaubt ist, aus einer vorgefassten Ansicht von dem Ingenium eines alten Verfassers argumentiren zu wollen, das und das habe er nicht schreiben oder weglassen können, so kann doch bei einem mathematischen Schriftsteller, wie Euklid, mit einiger Sicherheit geschlossen werden, dass Sätze, die häufig verwendet werden, nicht ursprünglich haben fehlen können. Nun werden X, 13—14, die die Araber weglassen, im Verlaufe des X. Buches sehr häufig angewandt (X, 19, 22, 23, 24, 27 u. s. w.),

ebenso X, 17, die auch im arabischen Text fehlt (X, 19, 27, 37). Auch XII, 6 und XII, 13 sind beziehungsweise für den griechischen Beweis für XII, 11 und XII, 15 unentbehrlich; wie wird der Beweis bei den Arabern zu Stande gebracht, denen jene zwei Sätze fehlen?

Wenn man dies Alles zusammennimmt, wird man, wie ich glaube, zugeben müssen, dass die arabische Tradition nicht nur nicht der der griechischen Codices vor der Hand vorzuziehen ist, sondern sogar bedeutend hinter ihr zurückbleibt und als mutilirt zu betrachten ist. Dadurch ist ja aber die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass die den Arabern vorliegenden griechischen Handschriften dennoch stellenweise den unsrigen gegenüber Ursprünglicheres bieten können. Die Frage muss also mehr im Einzelnen erörtert werden.

II. Es dringt sich also die Frage auf, ob die Araber ganz aus freier Hand die ihnen vorliegenden griechischen Handschriften mutilirt und umgestaltet haben, oder aber ob die ihnen zugekommenen Handschriften schon von dem in unseren gewöhnlichen Handschriften überlieferten Texte abwichen. Das Letztere muss unbedingt bejaht werden; denn es giebt (bisher unbeachtete) griechische Handschriften, die in gewissen Stücken mit den arabischen Uebersetzungen so genau übereinstimmen, dass wir nothwendig annehmen müssen, dass Codices dieser Classe von den arabischen Uebersetzern benutzt wurden. Die Biblioteca communale in Bologna besitzt unter ihren wenigen griechischen Handschriften einen schönen Euklid aus dem XI. Saec. (Nr. 18—19, 2 Voll.). Ich hatte einen Theil der Handschrift in Bologna collationirt, wurde aber erst in Florenz auf ihre besondere Bedeutung aufmerksam, und konnte dann, Dank der Liberalität der Bibliothekverwaltung, durch Vermittelung des zuvorkommenden Bibliothekars der Laurenziana den Codex noch auf einige Tage in dieser Bibliothek benutzen. Zu einer vollständigen Collation reichte die Zeit aber nicht aus. Was ich notirt habe, werde ich hier veröffentlichen, indem ich hoffe, später einmal meine Mittheilungen vervollständigen zu können.

Die Handschrift enthält zuerst sämmtliche *προτάσεις* der XIII Bücher der Elemente und der Data (93 Propp.); dann *προοίμια τῆς γεωμετρίας* (= Variae collectiones 15—68 bei Hultsch, Heron S. 252 bis 274; vergl. Wachsmuth, Rhein. Mus. 1874 S. 317 flgg.); dann Elem. I—XIII; doch fehlt von XIII, 18 der Schluss (von S. 427, 29 ed. Greg. an); am Rande steht *λειπ. φυλλ. ις.* Endlich folgen die Data, aber am Anfang defect (*λείπει ἡ ἀρχή* mg.) und nur bis Prop. 88 Greg. (= 86 Cod.) reichend. In den Datis findet sich eine sehr sonderbare Blätterversetzung, indem Prop. 33 extr., 33 *ἄλλως*, 34 init. und Prop. 43, 44 init. ihre Stellen vertauscht haben. Nun finden wir in Laurentianus 28, 1 Saec. XIV genau dieselbe Umstellung, und auch sonst stimmt diese Hds.,

die einst dem Demetrius Cydonius gehörte,* in diesem Theile** dergestalt mit Bonon. überein, dass sie nothwenig als eine Copie darnach betrachtet werden muss.*** Ich citire daher im Folgenden diese beiden Handschriften als eine, ohne die kleinen, wenig bedeutenden Varianten zu berücksichtigen.

In den IX ersten Büchern stimmen Zahl und Ordnung der Sätze ganz mit der gewöhnlichen überein. Ich habe nur das erste Buch vollständig collationirt, und daraus ergiebt sich, dass Bonon. ein recht guter Vertreter der Theonischen Handschriftenclasse ist. Am Schlusse des X. Buches sind einige bemerkenswerthe Abweichungen. X, 116 Cod. ist X, 116 ed. August (II S. 143) mit dem ἄλλως; dann folgt als ριζ August II S. 296 mit dem ἄλλως (August II S. 297), dann ohne Nummer August II S. 297—298. Am Rande steht bei diesen Sätzen mit erster Hand August II S. 295 Nr. 37 mit der Bemerkung (man. 1): ἰστέον, ὅτι ἡ τούτου τοῦ θεωρήματος πρότασις ἡ αὐτή ἐστι τῇ τοῦ ρς, ὅθεν καὶ ἐν τοῖς ἔσω παραλέλειπται, ἡ δὲ καταγραφὴ καὶ τὸ σχῆμα οὐ τὰ αὐτά εἰσιν· γέγραπται δὲ ἐν ἄλλῳ καὶ ριζ· διὸ καὶ ἡμεῖς τοῦτο παρατεθείκαμεν. Dann folgt, ebenso am Rande man. 1, August II S. 295 Nr. 38 mit der Notiz: ὡσαύτως καὶ τούτου τοῦ θεωρήματος ἡ πρότασις ἡ αὐτή ἐστι τῇ τοῦ ρζ, οὐ μὴν ἡ καταγραφὴ καὶ τὸ σχῆμα ἐκείνῳ τὰ αὐτά εἰσίν· ἔστι δὲ ἐν ἑτέρῳ καὶ ριη· διὸ καὶ ἡμῖν παραγέγραπται. εἶτα τὸ ἔνδον ριζ ἐν ἐκείνῳ ἐστὶ ριθ καὶ ἑξῆς τὰ λοιπά.

Mit dem XI. Buche fangen die Differenzen an, die uns hier beschäftigen sollen.

Um nun die Uebereinstimmung zwischen Bonon. und den Arabern zu constatiren, stelle ich zunächst neben den betreffenden Satz des Bonon. (XII, 6 = XII, 7 Greg.) die Uebersetzung des arabischen Textes bei Klamroth S. 318.

Πᾶν πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας.	Jedes Prisma mit dreieckiger Basis lässt sich zerlegen in drei gleiche Pyramiden mit dreieckiger Basis.
ἔστω πρίσμα τὸ $AB\Gamma\Delta EZ$ (Fig. 4) τρίγωνον ἔχον βάσιν τὴν $\Gamma Z\Delta$. λέγω, ὅτι τὸ $AB\Gamma\Delta EZ$ πρίσμα διαιρεῖται	Von dem Prisma $AB\Gamma\Delta EZ$ (Fig. 5) sei das Dreieck $\Gamma Z\Delta$ die Basis; ich behaupte, dass sich das Prisma

* „Iste liber est Demetrii Chidonii" Fol. 1v. Nun war Demetrius Cydonius ein Freund des bekannten Nicolaus Cabasilas (ihr Briefwechsel z. B. bei Montfaucon, Bibl. Coislin. S. 428 flgg.), und im Bonon. sind mehrere Scholien mit der Ueberschrift Θεοδώρου Καβασίλα. Ich vermuthe also, dass Bonon. der Familie Cabasila's angehört hat und dass jene Scholien Autograph sind. Theodorus Cabasilas ist mir sonst nicht bekannt.

** Sie enthält noch verschiedene astronomische Schriften.

*** Doch sind Elem. XIII, 18 und ebenso die Data vollständig.

εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΔ, ΒΖ, ΖΕ. ἡ ἄρα πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΓΒΔ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Ζ σημεῖον, ἴση ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ ΒΔΕ τρίγωνον κορυφὴν δὲ τὸ Ζ σημεῖον † ἴση ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον κορυφὴν δὲ τὸ Β σημεῖον. καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΒΓΔ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Ζ σημεῖον, ἴση ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον κορυφὴν δὲ τὸ Β σημεῖον. διῄρηται ἄρα τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, ὧν βάσεις μέν εἰσιν ΑΒΓΔΕ,* ΔΕΖ κορυφὴ δὲ τὰ Β, Ζ σημεῖα.

ΑΒΓΔΕΖ in drei gleiche Pyramiden mit dreieckiger Basis zerlegen lässt. Wir ziehen die Linien *ΒΔ*, *ΒΖ* und *ΖΕ*, so ist die Pyramide, deren Basis das Dreieck *ΓΒΔ* und deren Spitze *Ζ* ist, gleich der Pyramide mit der Basis *ΒΔΕ* und der Spitze *Ζ*. Nun ist aber die Pyramide, deren Basis das Dreieck *ΒΔΕ* und deren Spitze *Ζ* ist,** gleich der Pyramide, deren Basis das Dreieck *ΔΕΖ* und deren Spitze *Β* ist. Also ist die Pyramide, deren Basis das Dreieck *ΓΒΔ* und deren Spitze *Ζ* ist, gleich der Pyramide, deren Basis das Dreieck *ΔΕΖ* und deren Spitze *Β* ist. Also ist das Prisma *ΑΒΓΔΕΖ* in drei gleiche Pyramiden zerlegt, deren Basen die Dreiecke *ΓΒΔ*, *ΒΔΕ* und *ΔΕΖ*, und deren Spitzen die Punkte *Β* und *Ζ* sind.

Ueberblicken wir jetzt die Besonderheiten des Bononiensis.

Im XI. Buche sind die Abweichungen verhältnissmässig geringer. In XI, 23 bietet die Handschrift statt εἰ γὰρ μή S. 169, 25 Aug. — πρόβλημα S. 170, 2 Folgendes: ἐπεὶ γὰρ αἱ ΔΕ, ΕΖ τῆς ΔΖ, τουτέστι τῆς ΜΝ, μείζους εἰσὶ ἢ ἡμίσειαι, ἡ ΕΔ ἄρα τῆς ΜΞ, τουτέστιν ἡ ΑΒ τῆς ΔΞ μείζων ἐστί. καὶ ἐὰν ὁμοίως ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΞ, ἐκείνῳ ἴσην πρὸς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ἀναστήσωμεν τὴν ΞΡ, συσταθήσεται τὸ πρόβλημα. S. 170, 24: λέγω bis zum Schluss fehlt; es folgt das Lemma II S. 299 August. XI, 37 (λζ′) lautet im Bonon.:

Ἐὰν ὦσιν ὁσαιδηποτοῦν εὐθεῖαι ἀνάλογον, καὶ τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀνάλογον ἔσται. καὶ ἐὰν τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ ἀνάλογον ἔσονται.

ἔστωσαν ὁσαιδηποτοῦν εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀφ᾽ ἑκάστης τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΚ, ΓΛ, ΕΜ, ΗΝ. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ΑΚ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΛ στερεόν, οὕτως τὸ ΕΜ στερεὸν πρὸς τὸ ΗΝ στερεόν. πεποιήσθω γὰρ ὡς

---

* Zu lesen: αἱ ΒΓΔ, ΒΔΕ. Das Porisma fehlt in beiden.

** Die Lacune im Bonon. ist so zu suppliren: ἡ δὲ πυραμὶς ἡ βάσιν μὲν ἔχουσα τὸ ΒΔΕ τρίγωνον κορυφὴν δὲ τὸ Ζ σημεῖον.

ἡ AB πρὸς τὴν $ΓΔ$, οὕτως ἥ τε $ΓΔ$ πρὸς τὴν $Ξ$ καὶ ἡ $Ξ$ πρὸς τὴν O. ὡς ἄρα ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, τουτέστιν ἡ AB πρὸς τὴν O, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης, τουτέστι τὸ AK, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τουτέστι τὸ $ΓΛ$. ὡς δὲ ἡ EZ πρὸς τὴν $HΘ$, οὕτως* ἥ τε $HΘ$ πρὸς τὴν $Π$ καὶ ἡ $Π$ πρὸς τὴν P. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ EZ πρὸς τὴν P, οὕτως τὸ EM πρὸς τὸ HN. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $ΓΔ$ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $HΘ$, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AB πρὸς τὴν $ΓΔ$, οὕτως ἥ τε $ΓΔ$ πρὸς τὴν $Ξ$ καὶ ἡ $Ξ$ πρὸς τὴν O, ὡς δὲ ἡ EZ πρὸς τὴν $HΘ$, οὕτως ἥ τε $HΘ$ πρὸς τὴν $Π$ καὶ ἡ $Π$ πρὸς τὴν P, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν O, οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν P. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AB πρὸς τὴν O, οὕτως τὸ AK στερεὸν πρὸς τὸ $ΓΛ$ στερεόν, ὡς δὲ ἡ EZ πρὸς τὴν P, οὕτως τὸ EM στερεὸν πρὸς τὸ HN στερεόν· ὡς ἄρα τὸ AK στερεὸν πρὸς τὸ $ΓΛ$ στερεόν, οὕτως τὸ EM στερεὸν πρὸς τὸ HN στερεόν.

ἔστω δὴ πάλιν ὡς τὸ AK στερεὸν πρὸς τὸ $ΓΛ$ στερεόν, οὕτως τὸ EM στερεὸν πρὸς τὸ HN στερεόν. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $ΓΔ$, οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $HΘ$. πεποιήσθω γὰρ ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $ΓΔ$, οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $ΣT$, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς $ΣT$ τῷ HN ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ $ΣT$. ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $ΓΔ$, οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $ΣT$, καὶ ὡς ἄρα τὸ AK στερεὸν πρὸς τὸ $ΓΛ$ στερεόν, οὕτως τὸ EM στερεὸν πρὸς τὸ $ΣT$ στερεόν. τὸ EM ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν HN, $ΣT$ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ HN τῷ $ΣT$. καὶ ὁμόλογός ἐστιν ἡ $HΘ$ τῇ $ΣT$. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ $HΘ$ τῇ $ΣT$. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $ΓΔ$, οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $ΣT$, ἴση δὲ ἡ $ΣT$ τῇ $HΘ$, ὡς ἄρα ἡ AB πρὸς τὴν $ΓΔ$, οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $HΘ$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI, 38 Aug. fehlt wie bei den Arabern (**Klamroth** S. 276). XI, 39 Aug. = XI, 38 Bonon. lautet, wie folgt:

Ἐὰν κύβου** τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσι διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ, ἡ τῶν ἐπιπέδων κοινὴ τομὴ δίχα τεμεῖ τὴν τοῦ κύβου διάμετρον, καὶ αὐτὴ δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς τοῦ κύβου διαμέτρου.

κύβου γὰρ τοῦ AB (Fig. 6) τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τῶν $ΓΔ$, AE, BZ, $HΘ$ αἱ πλευραὶ δίχα τετμήσθωσαν αἱ $ΓΔ$, $ΔA$, AE, $EΓ$, BZ, ZH, $HΘ$, $ΘB$ κατὰ τὰ K, $Λ$, M, N, $Ξ$, O, $Π$, P, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω τὰ KM, $ΠΞ$, $NΛ$, OP, καὶ ἔστω τῶν ἐπιπέδων κοινὴ τομὴ ἡ $ΣT$, διάμετρος δὲ τοῦ κύβου ἔστω ἡ BA. λέγω, ὅτι ἡ $ΣT$ δίχα τέμνει τὴν τοῦ κύβου διάμετρον, καὶ αὐτὴ δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς τοῦ κύβου διαμέτρου.

---

* L. οὕτως ἔστω.

** Auch Vatic. 190 und Paris. 2346 haben κύβου XI, 39 statt παραλληλεπιπέδου. Auch **Campanus** XI, 40 hat „*cubi*".

ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΓΣ, ΣΑ, ΒΤ, ΤΗ. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΕ τῇ ΔΑ, καί ἐστι τῆς μὲν ΓΕ ἡμίσεια ἡ ΓΝ τῆς δὲ ΔΑ ἡμίσεια ἡ ΛΑ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΝ τῇ ΛΑ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΣΝ τῇ ΣΛ ἴση. δύο δὴ αἱ ΓΝ, ΝΣ δυσὶ ταῖς ΛΑ, ΛΣ ἴσαι εἰσί· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΝΣ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΣΛΑ ἴση. βάσις ἄρα ἡ ΓΣ βάσει τῇ ΣΑ ἴση, καὶ τὸ ΓΝΣ τρίγωνον τῷ ΑΛΣ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΓΣ, ΣΝ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΛΣ, ΣΑ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ τῶν ΝΣ, ΣΑ. αἱ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΣ, ΣΝ, ΝΣ, ΣΑ ταῖς ὑπὸ τῶν ΛΣ, ΣΑ, ΛΣ, ΣΝ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ τῶν ΛΣ, ΣΑ, ΛΣ, ΣΝ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΝΣ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Σ δύο εὐθεῖαι αἱ ΣΓ, ΣΑ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσι τὰς ὑπὸ τῶν ΓΣΝ, ΝΣΑ. ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΣ τῇ ΣΑ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΤ τῇ ΤΗ ἐπ᾽ εὐθείας ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΓΒ, ΑΗ τῇ ΕΘ, ἀλλὰ καὶ παράλληλοι, αἱ δὲ παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι παράλληλοί εἰσιν, αἱ ΓΒ, ΑΗ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι. καὶ ἐπεζευγμέναι εἰσὶν αἱ ΓΑ, ΒΗ. καί ἐστι τῆς μὲν ΓΑ ἡμίσεια ἡ ΣΑ, τῆς δὲ ΒΗ ἡμίσεια ἡ ΒΤ. αἱ ΣΑ, ΒΤ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι. καὶ ἐπεζευγμέναι εἰσὶν αἱ ΣΤ, ΑΒ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΣΤ τῇ ΤΤ ἡ δὲ ΑΤ τῇ ΤΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI, 40 Greg. = XI, 39 Bonon.

Ἐὰν ᾖ δύο πρίσματα ἰσουψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν τρίγωνον τὸ δὲ παραλληλόγραμμον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα.

ἔστω δύο πρίσματα ἰσουψῆ τὰ ΑΒΓΔΕΖ, ΗΘΚΛΜΝ, καὶ τὸ μὲν ἐχέτω τρίγωνον βάσιν τὸ ΚΛΝ τὸ δὲ παραλληλόγραμμον τὸ ΒΓΔΕ, καὶ ἔστω τὸ ΒΓΔΕ τοῦ ΝΚΛ τριγώνου διπλάσιον. λέγω, ὅτι ἴσα ἐστὶ τὰ πρίσματα. πεπληρώσθω γὰρ τὰ παραλληλεπίπεδα* τὰ ΑΔ, ΗΛ. ἐπεὶ οὖν τὸ ΒΔ παραλληλόγραμμον τοῦ ΝΚΛ τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον, ἔστι δὲ τοῦ ΝΚΛ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΝΛ παραλληλόγραμμον, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔ τῷ ΝΛ. ἐπὶ ἴσων οὖν βάσεων τῶν ΒΔ, ΝΛ ἰσουψῆ ἐστι στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΔ, ΗΛ. ἴσα** ἐστὶν ἀλλήλοις. ἀλλὰ τοῦ μὲν ΑΔ ἥμισύ ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα, τοῦ δὲ ΗΛ ἥμισυ τὸ ΗΘΚΛΜ*** πρίσμα. καὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἄρα πρίσμα τῷ ΗΘΚΛΜΝ πρίσματι ἴσον ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XII. Auch hier finden wir in der Ordnung der Sätze eine bemerkenswerthe Uebereinstimmung zwischen Bonon. und den Arabern. Denn in beiden fehlt XII, 6 Greg.; XII, 6 Cod. = XII, 7 Greg.; XII, 7 Cod. = XII, 9 Greg.; XII, 8 = XII, 8; XII, 9 = XII, 10 Greg.; XII, 10 = XII, 12 Greg.; XII, 11 = XII, 11; Alles wie im arabischen Text (Klamroth

* Bonon. hat παράλληλα ἐπίπεδα.

** L. [ὥστε τὰ ΑΔ, ΗΛ] ἴσα.

*** L. ΗΘΚΛΜΝ.

S. 276). Dagegen finden sich XII, 13—14 Greg., die den Arabern fehlen, im Bonon., wo XII, 12—17 = XII, 13—18 Greg.

Im Einzelnen bemerke ich Folgendes.

XII, 4 lautet der Beweis (von II S. 206, 23 Aug. an):
ἐπεὶ γάρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΗ, ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΗΓ τριγώνῳ. τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΗΓ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΝΞ** πρὸς τὴν ΞΦ. καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΝΞ πρὸς τὴν ΞΦ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΗΓ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΜΝΞ τρίγωνον πρὸς τὸ ΣΦΞ τρίγωνον. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΜΝΞ, οὕτως τὸ ΗΔΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΣΦΞ τρίγωνον,*** οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ ΔΗΓ, ΖΘΚ ἐπίπεδα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ ΣΦΞ, ΡΤΥ ἐπίπεδα. ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ ΔΗΓ, ΖΘΚ ἐπίπεδα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ ΣΦΞ, ΡΤΥ ἐπίπεδα. ἀλλὰ τὰ μὲν ἐν τῇ ΑΒΓΔ πυραμίδι πρίσματα διπλάσιά ἐστι τοῦ πρίσματος, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ ΔΗΓ, ΖΘΚ ἐπίπεδα, τὰ δ' ἐν τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι πρίσματα διπλάσιά ἐστι τοῦ πρίσματος, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ ΣΦΞ, ΡΤΥ ἐπίπεδα. ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΔ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι πρίσματα. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΑΕΗ βάσις πρὸς τὴν ΜΠΣ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΕΗΖ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΜΠΣΡ πυραμίδι πρίσματα. ὡς δὲ ἡ ΖΘΚ βάσις πρὸς τὴν ΤΡΥ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΖΘΚΔ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΡΤΥΟ πυραμίδι πρίσματα. ἔσται ἄρα ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων, πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΔ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.*

XII, 5. Die Buchstaben auf der Figur sind andere; sonst nur kleinere Differenzen. So wird statt S. 210, 24—26 Aug. nur gelesen: *λέγω δή, ὅτι οὐδὲ πρὸς μεῖζον.*

XII, 6 Bonon. = 7 Greg. s. oben.

XII, 8 ist in Laur. 28, 1 (und gewiss auch in Bonon.) etwas abweichend; im Satze selbst ist nach *βάσεις* hinzugefügt: *πρὸς ἀλλήλας;* der Beweis lautet: †

---

* Die Buchstaben auf der Figur entsprechen einander so: Bonon. *Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ, Φ* = Greg. *Α, Β, Γ, Η, Κ, Θ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Δ, Ε, Ζ, Θ, Π, Σ, Ρ, Τ, Υ, Φ.*

** Hier ist eine leicht auszufüllende Lacune.

*** Ebenso. Sie rühren aber vielleicht vom Redactor her.

† Um die gewöhnliche Figur benutzen zu können, erinnere man sich, dass die Buchstaben so correspondiren:

Greg *ΑΒΓΔΕΖΗΘΚΛΜΝΞΟΠΡ*
Bonon. *ΑΒΓΕΖΗΔΘΚΛΜΝΞΟΡΠ.*

ἔστωσαν ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ΑΒΓ, ΕΖΗ αἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κορυφὰς δὲ τὰ Δ, Θ σημεῖα, καὶ ἔστω ἴση ἡ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΕΖ, ΖΗ γωνία, ἡ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ τῇ ὑπὸ τῶν ΕΖ, ΖΘ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῇ ὑπὸ τῶν ΘΖ, ΖΗ ὁμόλογος —** δὲ ἔστω ἡ ΒΓ τῇ ΖΗ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς πρὸς τὴν ΕΖΗΘ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΖΗ. συμπεπληρώσθωσαν γὰρ τὰ ΒΔΜΑ, ΖΘΡΟ στερεά. ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΑ,*** οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΖΕ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΕΖ, ΖΗ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον τῷ ΖΡ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΑΔ τῷ ΕΘ ὅμοιόν ἐστι, τὸ δὲ ΝΒ τῷ ΖΠ. ἀλλὰ τὰ μὲν ΒΝ, ΑΔ, ΒΜ τὰ τρία τοῖς ἀπεναντίον αὐτῶν τοῖς ΛΔ, ΜΝ, ΑΛ ἴσα ἐστί, τὰ δὲ ΖΡ, ΕΘ, ΠΖ τὰ τρία τοῖς ἀπεναντίον αὐτῶν τοῖς ΘΟ, ΕΟ, ΡΠ ἴσα ἐστίν. ὅλον ἄρα τὸ ΒΔΜΑ στερεὸν ὅλῳ τῷ ΖΘΡΟ στερεῷ ὅμοιόν ἐστι. τὰ δὲ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλα ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. τὸ ΒΔ ΜΑ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΖΘΡΟ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΖΗ. καί ἐστι τοῦ μὲν ΒΔΜΑ στερεοῦ ἕκτον μέρος ἡ ΑΒΓ πυραμὶς τοῦ δὲ ΖΘΡΟ στερεοῦ ἕκτον μέρος ἡ ΕΖΗΘ πυραμίς· καὶ ἡ ΑΒΓΔ ἄρα πυραμὶς πρὸς τὴν ΕΖΗΘ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΖΗ.*

Das Porisma fehlt, wie im Arabischen.

Auch XII, 7, 9 Bonon. (= XII, 9, 10 Greg.) und namentlich XII, 16 Bonon. (= XII, 17 Greg.) weichen nicht unbeträchtlich von der Vulgata ab.

Im XIII. Buche findet sich keine der Umstellungen und sonstigen Eigenthümlichkeiten des arabischen Textes. Die *ἀναλύσεις* und *συνθέσεις* von XIII, 1—5 finden sich, wie auch in vielen anderen Hdss., nach XIII, 5; XIII, 6 fehlt, was bei den Arabern nicht der Fall ist; zu XIII, 5 ist ein *ἄλλως* am Rande beigeschrieben (August II S. 302). Es kann hier erwähnt werden, dass im Paris. 2344 das *ἄλλως* August II S. 302 die Stelle von XIII, 6 einnimmt, während dieser Satz fol. 331ᵃ zwischen der Unterschrift des XII. und der Ueberschrift des XIII. Buches steht mit dem Zusatz: *τοῦτο θεώρημα τὸ ς ἐστὶ τοῦ ιγ βιβλίου.* Da Peyrard III S. 566 in Bezug auf Paris. 2344 (*e*) irrt, wird dasselbe wohl von Vatic. 1038 gelten. Der Schluss des XIII. Buches, der im Bonon. fehlt, stimmt im Laur. 28, 1 ganz mit Gregorius.

Ist nun die Fassung der Bücher XI—XIII, die Bonon. bietet, als die ursprünglichere zu betrachten, oder ist sie eine Entstellung der Vulgata? Allem Anschein nach das Letztere. Denn von den im Bonon.

---

* L. *ΕΖ, ΖΗ.*

** So in der Hds., vielleicht um die Lacune anzudeuten.

*** L. *ΒΑ.*

fehlenden Sätzen sind die meisten für spätere Beweise nothwendig, so XII, 6 für XII, 11; XII, 7 Coroll. für XII, 10; XIII, 6 für XIII, 17. Weniger von Gewicht ist es, dass Pappus I S. 424, 7 den Satz XIII, 16 mit der richtigen Nummer citirt, während er im Bonon. XIII, 15 ist.* Um so schwerer wiegt aber die ganze Gestalt der Beweise im Bonon., die wenig mit dem umständlichen und sorgfältigen Euklid der früheren Bücher gemein hat. Es tritt ein Streben nach Kürzung des Ausdrucks und des Beweisganges sehr deutlich hervor, und dabei eine gewisse Nachlässigkeit. Besonders charakteristisch in dieser Beziehung ist nebst XII, 6 Bonon., wo am Anfang alle Begründung fehlt, noch XII, 4 (s. oben), wo nicht nur ohne alle Vorbereitung plötzlich von *τὰ ἐν τῇ ΑΕΗΖ πυραμίδι πρίσματα* und *τὰ ἐν τῇ ΖΘΚΔ πυρ. πρ.* gesprochen wird, sondern auch der nothwendige Schluss des Beweises weggelassen ist, dass man mit derselben Construction fortfahren solle. Ich glaube also, dass diese Recension einem byzantinischen Mathematiker zuzuschreiben ist, der die Euklidischen Beweise zu lang und zu ermüdend fand und sich daher begnügte, den Gang anzudeuten. Dass der Redactor ganze Propositiones wegliess, die ihm unnöthig schienen, ist bei diesem Streben begreiflich; warum er aber XII, 9 vor XII, 8, XII, 12 vor XII, 11 gestellt hat, ist mir noch nicht klar.

Dessenungeachtet ist aber der Bononiensis für die Bücher XI—XIII sehr beachtenswerth. Denn offenbar lag dem Epitomator eine ausgezeichnete Handschrift vor, wahrscheinlich aus der vortheonischen Classe, deren einziger Vertreter sonst Vatic. 190 ist. Denn selbst die gekürzte und nachlässige Form von XII, 4 lässt deutlich erkennen, dass der dem Epitomator vorliegende Beweis nicht der der gewöhnlichen Theonischen Handschriften war, sondern derjenige, den wir im Vatican. 190 (und Paris. 2346 sammt 2342 am Rande, Peyrard III S. 552) finden; vergl. namentlich den Schluss. Auch fehlen im Laur. 28, 1 (und gewiss auch Bonon.) die Worte S. 206, 6 flgg. Aug.: *καὶ τῶν γενομένων πυραμίδων ἑκατέρα τὸν αὐτὸν τρόπον, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίνηται* und S. 206, 17 flgg.: *καὶ τῶν γενομένων πυραμίδων ἑκατέρα τὸν αὐτὸν τρόπον νενοήσθω διῃρημένη, καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω*, was sonst nur im Vatic. 190 der Fall ist. Auch die Lesart *κύβου* statt *παραλληλεπιπέδου* XI, 39 ist nur Vatic. 190, Bonon. und Paris. 2346 gemeinsam. Unter diesen Umständen wird es bedeutsam, dass, während im X. Buch und sonst früher sowohl Bonon., als Laur. 28, 1 die Notiz *τῆς Θέωνος ἐκδόσεως* mehrmals haben, lesen wir in den Büchern XI—XIII nicht solches; nur hat Laur. 28, 1 am Schlusse des Ganzen: *Εὐκλείδου στοιχείων ιγ τῆς Θέωνος ἐκδόσεως;* das beweist aber für den Bonon. nichts, da in ihm der Schluss der Elemente fehlt, und Laur. 28, 1

* Der Ordnung nach; denn die Nummern fehlen im Bonon. in XII, und in XIII von 6 an.

hier ohne Zweifel nach einer andern Vorlage geschrieben ist. Auch sonst sind Uebereinstimmungen zwischen Bonon. und Vatic. 190 in diesen Büchern nachweisbar; da aber die Collation Peyrard's, worauf ich bis jetzt noch für diesen Theil der Elemente verwiesen bin, sehr unzuverlässig ist, und da ich den Bonon. auch noch nicht vollständig kenne, beschränke ich mich für diesmal auf das schon Gesagte. Soviel ist aber sicher, dass zur Feststellung der vortheonischen Recension für die stereometrischen Bücher (XI—XIII) ausser Vatic. 190 noch Bonon. mit Laurent. 28, 1 und wohl auch Paris. 2346 und die Randbemerkungen in Paris. 2342 herangezogen werden müssen. Erst wenn dieses Material vollständig vorliegt, wird es möglich sein, den gegenseitigen Werth dieser Handschriften festzustellen und die Frage zu entscheiden, ob die Besonderheiten des Bonon. allein auf Interpolation beruhen oder vielmehr zum Theil eine ursprünglichere Fassung repräsentiren.*

III. Bei aller Uebereinstimmung zwischen den Arabern und Bonon. bleiben aber auch viele Differenzen zurück, besonders in den Definitionen des XI. Buches, die Bonon. so hat, wie die übrigen griechischen Handschriften, während bei den Arabern mehrere fehlen, und im XIII. Buche. Es fragt sich also, ob diese Differenzen selbstständige Aenderungen der Araber sind oder ob umgekehrt das beiden gemeinsame Urbild ungetrübter bei den Arabern erhalten ist, im Bonon. dagegen durch Vermengung mit der Vulgata theilweise verwischt. Für das letztere Alternativ könnte sprechen, dass die Umstellung von XI, 33 – 34, die wir in der arabischen Uebersetzung, nicht aber im Bonon. finden, durchaus der beiden gemeinsamen Umstellung von XII, 8—9 entspricht. Das kann aber auch so erklärt werden, dass die Araber, an die ihnen überlieferte Ordnung von XII, 8—9 anknüpfend, XI, 33—34 in ähnlicher Weise umstellten.** Dagegen kann mit vollständiger Gewissheit behauptet werden, dass, wenn die Araber das Prisma als nothwendig dreiseitiges definiren (Klamroth S. 283 flgg.), so kommt das auf ihre Rechnung allein. Denn diese beschränktere Definition ist den griechischen Mathematikern durchaus fremd, und der Epitomator, dessen Werk uns, sei es vollständig oder

* So spricht sehr viel für die Unechtheit von XI, 38. Der Satz steht an einer sonderbaren Stelle und wird erst XII, 17 angewandt, und selbst da könnte man sich mit XI Def. 4 begnügen (Simson: Elem. Glasguae 1756, S. 404). Im Vatic. 190 steht am Rande: *ἔν τισι τῶν ἀντιγράφων οὐ φέρεται τὸ λη* (nach freundlicher Mittheilung des Herrn Dr. A. Mau). Durch die Freundlichkeit des Herrn H. Omont erfahre ich, dass der Satz im Paris. 2346 gänzlich fehlt.

** Gelegentlich bemerke ich, dass im Griechischen die Reihenfolge von XI, 32—33—34; XII, 5—8—9; XII, 11—12—15 eine vollständig analoge ist, während bei den Arabern die Analogie bei den letzten drei Sätzen (XII, 11—10—12, im Bonon. XII, 11—10—14) gebrochen ist.

nur zum Theil, im Bonon. vorliegt, und der offenbar Mathematiker war und seinen Auszug mit Verstand gemacht hat, konnte unmöglich den landläufigen Begriff ändern. Daran, dass Euklid selbst die engere Definition gegeben haben und diese erst im Laufe der Zeit erweitert sein sollte (Klamroth S. 284), ist nun vollends gar nicht zu denken. Denn schon bei Archimedes (De sph. et cyl. I, 13) hat *πρίσμα* die weitere Bedeutung, ohne dass er hierin eine Neuerung andeutet, und nicht nur bei Euklid selbst (XI, 40; XII, 7) ist es deutlich, dass das dreiseitige Prisma nur eine specielle Gattung ist, sondern auch in der arabischen Uebersetzung heisst es XII, 6 (Klamroth S. 318): Jedes Prisma mit dreieckiger Basis. Ueberhaupt ist es mir sehr zweifelhaft, ob *πρίσμα*, wie Klamroth S. 284 vorbringt, seinen Namen von der Aehnlichkeit mit dem Zahne einer Säge erhalten hat. Das Wort bedeutet doch wohl nur: das Herausgesägte; man hat wahrscheinlich das Prisma als einen durch Sägen eckig gemachten Cylinder aufgefasst, so dass die Dreiseitigkeit auch nicht zum ursprünglichen Begriffe gehört. Auch ist es mir wenig glaublich, dass ein Grieche die Definitionen der Platonischen Körper (XI, Deff. 25, 27—29*; vergl. Klamroth S. 283) habe weglassen können.

Ich glaube also Folgendes mit einiger Wahrscheinlichkeit aufstellen zu dürfen: Bonon. enthält von den stereometrischen Büchern nur ein Excerpt, das zwar überall mit Verstand gemacht, in der Form aber nachlässig und nur auf Kürze angelegt ist; als Vorlage diente dem Epitomator ein Exemplar der vortheonischen Redaction. Eine dem Bonon. verwandte Handschrift lag dem arabischen Uebersetzer vor, der die Abweichungen von unseren übrigen Handschriften noch mehrte.

Natürlich hängt aber das Urtheil über die Nichtübereinstimmungen zwischen Bonon. und den Arabern wesentlich davon ab, was wir von arabischen Varianten in den übrigen Büchern zu halten haben. Dass ein Theil derselben bis auf die griechische Vorlage zurückgehe, kann natürlich nicht absolut geleugnet werden. Es kann ja von den Büchern I—X eine ähnliche Redaction existirt haben, wie diejenige, die wir für die Bücher XI—XIII noch im Bonon. besitzen. Die Wahrscheinlichkeit dieser Annahme schwindet aber bedeutend dadurch, dass nach Klamroth's Bemerkung S. 316 eben diese Bücher im Arabischen sich „durch das Fehlen der Zusätze und durch eine kürzere Fassung der Beweise" vor den übrigen auszeichnen. Es ist doch gewiss ein bedeutsames Zusammentreffen, dass auch bei den Arabern ein nicht unmerklicher Unterschied gerade da hervortritt, wo sich eine abweichende Redaction auch

* XI Def. 26 (*τετράεδρον*) fehlt in allen guten griechischen Hdss. und ist unecht; Euklid gebraucht selbst *πυραμὶς ἐκ τεσσάρων τριγώνων ἰσοπλεύρων* XIII, 13. Vergl. auch Hero, Def. 100.

griechisch erhalten hat. Da nun, wie im ersten Capitel erwiesen, bei den Arabern gar Manches fehlt, was im echten Euklid unstreitbar da war, halte ich es für weit wahrscheinlicher, dass die Varianten, wenigstens in allem Wesentlichen, den Arabern selbst zuzuschreiben sind. Freilich muss man dabei den Arabern eine grosse Kühnheit in willkürlichen Aenderungen zutrauen. Dass dies aber in der That nicht so unerlaubt ist, als Klamroth andeutet, und dass besonders die Weglassung von Definitionen und ganzen Sätzen des Originals, sowie auch allerlei Umstellungen u. dergl. keineswegs gescheut wurden, lehrt am besten die im Bodleian. 280 (scr. a. 1260—1261) enthaltene Vorrede,* die ich aus Nicoll und Pusey: Catalog. codd. orientt. Bodl. Pars II, Vol. II Seite 260 flgg. vollständig hierher setze (vergl. Studien üb. Euklid S. 16 flgg.): *Liber tamen* (trotz der Arbeiten Vieler) *non vacat erroribus, qui emendatione indigeant et (partium) collocationem non semper eandem exhibet, quod sane explicari oportet, neque est immunis obscuritatibus (passim) occurrentibus, prolixitatibus frigidis, omissionibus incommodis, supervacaneis fastidium parientibus aliisque vitiis, cum scilicet generale pro particulari detur, et particulare pro generali, cum et praemittenda (definitiones) ad demonstrationes omnino necessaria resecta sint. eum autem quamvis pretiosissimum, quamquam et summam in hac re diligentiam omnes homines adhibuerunt per longum temporum et annorum praeteritorum decursum, non contigit vir in hac arte excellens, qui perfecte enuclearet et erroribus purum exhiberet. etenim doctor primarius (Avicenna) postulata et definitiones multas resecuit, difficilium quoque et obscurorum resolutionem detrectavit. similiter et fecit Naisaburensis (Abulvafa Albuzgiani), qui additamenta non necessaria introduxit et plura magni momenti omnino necessaria reiecit. in variis scilicet locis libri VI et aliorum nimium longus est, et in decimo nimium brevis. In hoc enim demonstrationes apotomarum omnino praetermisit, earum tamen etsi ab ipso non explicatarum evidentiam pro concesso assumsit. propositionem porro decimam quartam libri duodecimi minus feliciter emendare conatus est. quod vero ad Abugiafarum Alkhazen attinet, ille quidem postulata produxit eaque optime concinnavit, sed propositionum numerum atque ordinem turbavit, qui plures propositionum figuras in unam reduxerit, et ad verborum compendia (quaerenda) et propositiones diminuendas omissa dubiorum explicatione et obscuris non sublatis se applicuerit. Deus autem nos adiuvit in eo concinnando, limando, corrigendo, emendando, in supplendis vocalibus, resolvendis contractis, reiiciendis additis, exponendis utilibus, in tollendo, quicquid in eo esset obscurum et dubium, et stabiliendo, quicquid necessario praecognoscendum esset. in propositionum demonstratione iis innixi sumus, quae in antecedentibus stabilita fuissent, et ostendimus, cum varietas*

---

* Die aber nicht von Thabit herrührt, wie ich in den „Studien" unrichtig angegeben habe.

existebat, singularum propositionum locum, singulisque figuris quinque, quae in sphaera inscribuntur, subiunximus methodum sphaeram inscribendi in illis, tum inscriptionem illarum figurarum quinque possibilem in ea figura, in qua inscribi potest, et notavimus, quae in eadem inscribi non possint. opus denique absolvimus duobus libris, quorum alter est de inscribendis corporibus quinque in se invicem, de qua re exactissime tractavimus, alter de proportione inter latera eorum, altitudines, bases, superficies et magnitudines, quibus subiunximus quinque propositiones de inventione quinque linearum consequentium in proportione laterum eorum, altitudinum, superficierum et magnitudinum, quae omnia nos explicavimus demonstrationibus certis et praemissis indubitatis adhibito sermone conciso atque puro. ceterum ordinem librorum et propositionum ipsius operis (Euclidis) servavimus exceptis duodecimo et decimo tertio. in XIII enim de corporibus (solidis) et in XII de superficiebus per se tractavimus.

Wenn der Verfasser dieser Vorrede, dem wir also die im Bodl. 280 enthaltene Redaction verdanken, trotz seinen Bemühungen um die Reinheit des Textes sich so grosse Veränderungen erlaubte, dass er die Ordnung der Sätze in den Büchern XII—XIII ganz nach eigener Willkür gestaltete,* kann die Möglichkeit nicht geleugnet werden, dass der erste arabische Uebersetzer ebenso verfuhr. Und die Uebereinstimmung der verschiedenen arabischen Bearbeitungen, worauf Klamroth grosses Gewicht legt, verliert ihre Beweiskraft, da, wie oben S. 2 flg. gezeigt wurde, der einzige von Klamroth vorgebrachte Beweis dafür, dass Hajjaj und Ishak nach verschiedenen griechischen Handschriften arbeiteten, nicht überzeugend ist. Die Uebereinstimmung im Wesentlichen kann, so lange nicht andere Gründe das Gegentheil beweisen, sehr wohl daraus erklärt werden, dass Ishak die ältere Uebersetzung Hajjaj's zu Grunde legte, und zwar im Einzelnen Vieles, auch mit Benutzung griechischer Handschriften, änderte und verbesserte, aber Zahl und Ordnung der Sätze im Grossen und Ganzen beibehielt, wie solches rücksichtlich der Figuren von Klamroth als möglich zugegeben wird (S. 287, vgl. S. 289); hierfür spricht auch der Umstand, dass Ishak in den Definitionen und προτάσεις meist wörtlich die Uebersetzung Hajjaj's bewahrt (S. 310 flgg.) Nur hat Ishak zehn Sätze mehr als Hajjaj; da wir aber, wie gesagt, nicht unmittelbar aus Tusi auf Hajjaj schliessen dürfen, können wir nicht mit Sicherheit angeben, welche diese zehn Sätze waren; im Leidensis fehlen im 1. und 3. Buche je ein Satz (Klamroth, S. 273), und da diese Hds. die sechs Bücher in Hajjaj's Uebersetzung enthält, haben wir wohl hier die zwei der bei Hajjaj fehlenden Sätze (welche, wird leider nicht gesagt), die Ishak aus einer griechischen Hds. aufgenommen

* Nicoll u. Pusey, l. c. S. 260: *in libro XII et XIII a Graeco contextu discessum est, quorum scilicet hic non complectitur nisi solida, ille nisi superficies.*

haben wird. Auch ist es einigermassen wahrscheinlich, dass die vier Sätze, die bei Ishak, aber weder bei Tusi, noch im griechischen Euklid stehen (Klamroth, S. 278 flgg.), von Ishak selbst hinzugefügt sind und also bei Hajjaj fehlten. Endlich kann Ishak selbst die Sätze XIII, 1 — 3 in je zwei getheilt haben, was bei ihm, nicht aber bei Tusi der Fall ist. Wir würden so wenigstens das Fehlen der neun Sätze erklärt haben.

Die oben ausgeschriebene Vorrede ist aber auch sonst sehr lehrreich. Von den darin genannten Männern, die sich mit Euklid beschäftigt haben, hat zwar keiner eine eigentliche Uebersetzung des Grundtextes gegeben;* sie sind wesentlich Commentatoren. Man hat doch aber offenbar aus ihren Werken den von ihnen befolgten Text erkennen können, und darin hatten sie nach dem Zeugniss der Vorrede allerlei Aenderungen der Ueberlieferung vorgenommen, die sich mit den Abweichungen der arabischen Tradition der griechischen gegenüber vollständig decken. Sie haben Definitionen weggelassen — vergl. Klamroth, S. 282 flgg.; Zusätze gemacht — wie, ausser den vier Sätzen Ishak's, noch arab. XV, 1; manches Nothwendige weggeworfen, besonders im X. Buch — worin bei Ishak 10,** bei Tusi gar 12 Sätze fehlen; es fehlen ausserdem bei den Arabern, von den drei bei Tusi allein fehlenden Sätzen und den auch nach den griechischen Hdss. auszuscheidenden ganz abgesehen, folgende Sätze: VIII, 16, 17; XII, 6, 13, 14; XV, 6, 7, 8, 9, 10. Endlich haben sie die Ordnung der Sätze geändert — vgl. Klamroth, S. 275 flgg.; und der Kürze wegen mehrere Sätze in einen vereinigt — wie in der Uebersetzung III, 11—12 und XIV, 5—6; was Klamroth S. 275 hervorhebt, dass eine Zusammenziehung nur einmal im echten Euklid vorkomme und deshalb nothwendig hier auch in der griechischen Vorlage stattfand, will wenig bedeuten; wer im XIV. Buche zwei Sätze in einen verband, der konnte es auch im dritten so machen. Hinzuzufügen wäre noch, dass auch umgekehrt zu wiederholten Malen ein griechischer Satz in mehrere zerlegt ist, nämlich X, 32, 33; XI, 31, 34; XIV, 2, 3 in je zwei, XIV, 4 in drei. Dass ein solches Zerlegen den Arabern geläufig war, bezeugt der Umstand, dass bei Ishak noch XIII, 1, 2, 3 in je zwei Sätze getheilt werden, was bei Tusi nicht geschieht und ohne Zweifel Ishak selbst zu Schulden kommt.

Müssen wir also die Annahme, als hätten die Araber einen wesentlich ursprünglicheren Euklidtext gehabt, als nicht begründet und nicht

---

* Avicenna (978—1036) verfasste ein Compendium der Elemente (Wenrich: De auct. Graec. verss. Arabb., S. 189), Abulvafa Albuzgiani (940—998) einen Commentar dazu (Wenrich, S. 187) und Abulgiafar Alkhazen einen Commentar zum X. Buch (Wenrich, S. 187).

** X, 7, 8, 13, 14, 17, 25, 113, 114, 115, 117; alle Zahlen sind nach Gregorius gegeben. Hierunter sind doch nicht die *ἀποτομαί* (74 flgg.).

wahrscheinlich zurückweisen, so bleibt der arabischen Tradition dennoch ihr Werth. Es verhält sich ja nämlich so, wie man schon früher aus Campanus schliessen konnte (Studien üb. Eukl., S. 178 flgg.), dass die Araber ein Exemplar der vortheonischen Redaction benutzten. Das ergiebt sich aus dem Fehlen des Zusatzes über den Sector in VI, 33 (Klamroth, S. 323), der Weglassung von VII, 20 und 22 (Klamroth, S. 275), die beide im Vaticanus 190* mit junger Hand auf dem Rande stehen, u. s. w. Da Peyrard wenig genau collationirt hat, ist es ja immerhin möglich, dass die neue Collation, die für die letzten Bücher noch rückständig ist, einige Differenzen** heben wird. Ueberhaupt darf der Euklidtext nicht nach den vorliegenden Ausgaben beurtheilt werden; denn ed. Basil., worauf sie alle mehr oder weniger fussen, ist nach sehr interpolirten Handschriften gemacht; wenn wir auf die alten Handschriften zurückgehen, werden die *στοιχεῖα* eben in die „kürzere, gleichmässigere und einförmigere“ Fassung gebracht, die sich Hn. Klamroth (S. 316) aus den arabischen Bearbeitungen herausstellte. Eben in den von ihm S. 315 hervorgehobenen Punkten, den Wiederholungen der früheren Sätze im Beweise und den Recapitulationen am Schluss bestehen auch unter den griechischen Hdss. grosse Verschiedenheiten.

Da die vortheonische Redaction so sparsam vertreten ist, wäre es grosser Gewinn, wenn zur Controle des von Vatic. 190 gebotenen Textes die reine arabische Tradition (denn Campanus ist ja doch sehr unzuverlässig) vollständig in Uebersetzung vorläge. Wenn das einmal geschieht, wird man erst mit Sicherheit die beiden Traditionen gegen einander abwägen können; wie die Sache jetzt liegt, sind gar manche Lücken unserer Kenntniss fühlbar. So weit wir jetzt urtheilen können, besitzen, von den Eigenthümlichkeiten (Verunstaltungen) der arabischen Tradition, die schon behandelt sind, abgesehen, beide Ueberlieferungen ihre besonderen Vorzüge. Ein Vorzug der Araber ist das Fehlen von VII Def. 10 (nicht 9, Klamroth, S. 283), die schon früher als unecht erkannt war (Studien S. 197 flgg.). Aber die Definition wurde doch an ihrer Stelle von Jamblichus gelesen, vielleicht ist die Definition also von den Arabern selbst herausgeworfen ohne die Auctorität griechischer Handschriften. Das würde als gewiss bezeichnet werden können, wenn Klamroth darin Recht hat, dass bei den Arabern VII, Def. 9 (nicht 10) fehle; denn diese Definition ist wegen IX, 33—34 nothwendig. Man hat mir aber gesagt, dass der arabische Ausdruck eher auf ἀρτιάκις περισσός führe, und dass somit VII, Def. 10 weggelassen wäre, Def. 9 dagegen erhalten. *Fides eius rei penes auctores esto.*

---

* VII, 20 steht auch im Bodl. am Rande, doch manu 1.

** So ist ja z. B. XI, 38, die den Arabern fehlt, auch in griechischen Hdss. verdächtigt (s. oben S. 14, Anm.), was bisher unbekannt war.

Ein Vorzug der arabischen Tradition ist es weiter, dass die Erläuterung über σύνθεσις und ἀνάλυσις, die in den griechischen Hdss. nach XIII, 5 oder XIII, 6 steht (in anderen nach den einzelnen Sätzen vertheilt), gänzlich fehlt; sie kann unmöglich von Euklid herrühren. Es bleibt aber immer zweifelhaft, ob nicht die Araber auf eigene Hand diesen Zusatz wegschnitten; er geht, wie Cantor nicht unwahrscheinlich vermuthet (Vorlesungen üb. Gesch. d. Math., S. 236) auf Eudoxos zurück, und muss sehr früh in die στοιχεῖα aufgenommen sein. Und eben gegen Alles, was als Beiwerk bezeichnet werden kann, wie Definitionen und Corollarien, haben die Araber, wie wir sahen, sehr frei verfahren. Von den Corollarien, die die Araber weglassen, sind einige auch aus unseren Hdss. als unecht (theonisch oder noch jünger) zu erkennen, aber andere sind, wie gezeigt wurde, unzweifelhaft echt; ein Aehnliches gilt von den Lemmata, die alle bei den Arabern fehlen (Klamroth, S. 314), zum Theil aber gewiss echt sind. Wenn ebenso die ἄλλως bei den Arabern vollständig fehlen (nur bei X, 106—107, arab. 102—103, vertreten sie die Stelle der ersten Beweise, Klamroth S. 315, und auch der Beweis für VI, 20 bei Klamroth, S. 322 flgg., der ihm ursprünglicher scheint, ist mit dem ἄλλως bei August I S. 288 eng verwandt), so ist das insofern ein Vorzug, als sie gewiss nicht von Euklid herrühren; ob sie aber in den griechischen Hdss. der Araber alle fehlten, ist mir sehr zweifelhaft; nur wenige, wie II, 4, stehen im Vatic. 190 am Rande, die übrigen scheinen vortheonisch zu sein.

Entschieden besser als die arabische Tradition ist Vatic. 190, wenn er, wie übrigens auch gute theonische Handss., wie Vatic. 1038 und der alte Bodl., V, Def. 19 nur mit junger Hand am Rande hat; τεταγμένη ἀναλογία kommt bei Euklid sonst nicht vor. Ebenso ist Vatic. 190 im Rechte, wenn er V, Def. 8* erst mit späterer Hand hat; diese Definition ist ganz unnütz (Hankel: Zur Gesch. der Mathem., S. 395). Beide Definitionen finden wir aber bei den Arabern (Klamroth, S. 282), V, 8 auch bei Campanus (V, 4), der dagegen V, Def. 19 und die echte Def. 20 weglässt. Auch kann daran erinnert werden, dass die uneuklidische und ohne allen Zweifel unechte VI, Def. 5 im Vatic. 190 nur am Rande steht, obwohl manu 1, während sie arabisch erhalten ist, nur mit dem Zusatz (im Bodl.), dass Thabit sie nur in einigen griechischen Hdss. sah (Klamroth, S. 283); bei Campanus fehlt sie, aber auch VI, Def. 4.

Es scheinen sich also die beiden Ueberlieferungen gegenseitig zu vervollständigen, was die Veröffentlichung der arabischen um so wünschenswerther erscheinen lässt.

---

* Bei August; nach anderen V, Def. 4.

Was Campanus betrifft, werde ich nicht die Frage: Adelhard oder Campanus? aufnehmen, worüber wir hoffentlich Mittheilungen von Curtze zu erwarten haben. Was Klamroth, der freilich die Abhandlung Weissenborn's nicht mehr benutzen konnte (S. 326, Anm.), über das Verhältniss Beider andeutet, S. 271, 273, spricht für die Annahme, dass Adelhard der Uebersetzer, Campanus der Bearbeiter sei. Nach Klamroth S. 273 stimmt Campanus meist mit Tusi überein, doch mit mehreren auffallenden Abweichungen (er hat 27 Sätze mehr, und VI, 20 steht an seiner Stelle, während sie sonst bei den Arabern VI, 14 ist). Genaueres über das Verhältniss des Campanus zu der sonstigen Tradition wird sich erst nach der vollständigen Veröffentlichung derselben ermitteln lassen. Doch kann ich nicht umhin, darauf hinzuweisen, dass Campanus in den Büchern XIV und XV eine gewisse Uebereinstimmung mit der oben S. 16 erwähnten Vorrede aufzeigt. Leider ist dieselbe, was diesen Punkt betrifft, sehr unklar; aber so viel geht doch hervor, dass der Verfasser und Redactor 1. eine Methode angab, um eine Kugel in die Platonischen Körper einzuschreiben, 2. die Lehre von der Einschreibung der platonischen Körper in einander weiter entwickelte und 3. die Beschränkungen der Einschreibbarkeit angab. Das Alles bezeichnet der Verfasser der Vorrede als seine Zusätze, und wir finden sie bei Campanus wieder 1. XV, 13: *fabricato quovis quinque regularium corporum sibi sphaeram inscribere*; 2. XV, 5 und 7—12; 3. in einem Zusatze zu XV, 12. Vollständig scheint Campanus allerdings nicht mit der Redaction im Bodl. 280 zu stimmen; aber so viel scheint doch hieraus hervorzugehen, dass er einer arabischen Tradition gefolgt ist und nicht aus seinem eigenen Wissen allein geschöpft hat (vgl. Klamroth, S. 274). Nun enthält Bodl. 280 die Thabit'sche Bearbeitung der Uebersetzung Ishak's, ist aber nach Nicoll und Pusey S. 260: *emendatus ad versionem Nasireddini Thusensis*. Möglicherweise stammt also jene Vorrede von Nasireddin Tusi; vgl. Haji Khalfa I, S. 383: *(Nasireddin) dicit, se, quae de archetypo in editionibus laudatis inveniantur, ab iis separasse, quae accesserint, vel indicio distincto vel colorum varietate, quibus schemata pinxerit.* Haji Khalfa (I, S. 383) hat aus Tusi auch eine Notiz über die Zahl der Sätze bei Hajjaj und Ishak, die ebensowenig, wie jene Vorrede, im gedruckten Euklid des Tusi zu finden ist (Klamroth, S. 274), freilich aber auch nicht in der bei Nicoll und Pusey gedruckten Vorrede steht.

Ich schliesse diese Zeilen mit dem Wunsche, dass die Orientalisten uns recht bald eine vollständige Uebersetzung der arabischen Bearbeitungen der στοιχεῖα, so weit sie noch vorhanden sind, schenken wollen, und dass dabei möglichst viele Handschriften untersucht werden; denn die oft genannte Vorrede lässt ahnen, dass die Uebereinstimmung der arabischen Redactionen bei Weitem nicht so gross ist, als es nach

Klamroth's Arbeit erscheint. Wenigstens waren mehrere in Umlauf; die in der Vorrede genannten Schriften sind uns noch erhalten, so dass an Material kein Mangel ist. Dann wird es möglich werden, das gegenseitige Verhältniss von Hajjaj, Ishak, Tusi und Campanus festzustellen, und die arabische Tradition bei Herstellung des griechischen Teztes gehörig zu beachten. Dass für jetzt das Material allzu unvollständig ist, habe ich bei der Ausarbeitung dieses Aufsatzes mehr als einmal gefühlt.

Berichtigung.

Im 28. Jahrgang, hist.-lit. Abth. S. 213 sollen in Fig. 4 die ersten beiden Theile statt so heissen:

Recensionen.

Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen.
Von Leo Koenigsberger, Professor an der Universität zu Wien. Leipzig, Teubner. 1882. In 8°. X u. 246 S.

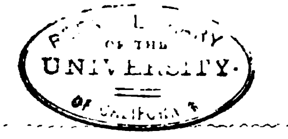
Die Untersuchungen der neueren Zeit auf dem Gebiete der Differentialgleichungen sind dadurch charakterisirt, dass sie, statt wie früher sich auf die Frage ihrer Auflösbarkeit durch Zurückführung auf Quadraturen zu beschränken, vielmehr darauf ausgehen, aus der Natur der Differentialgleichungen selbst die Eigenschaften der durch sie definirten Transcendenten zu ermitteln. Als ein ausgezeichnetes Beispiel der Fruchtbarkeit dieser neuen Betrachtungsweise erwähnen wir die fundamentalen Arbeiten des Herrn Fuchs zur Theorie der linearen Differentialgleichungen, denen wir die Formulirung und Lösung der beiden Grundprobleme dieser Classe der Differentialgleichungen verdanken, betreffend einerseits die Angabe des Verhaltens ihrer Integrale in der Umgebung ihrer singulären Punkte, andererseits die zu ihrer Fortsetzung nöthige Ermittelung der Beziehungen, die zwischen den innerhalb verschiedener Gebiete giltigen Darstellungen zweier Fundamentalsysteme von Integralen stattfinden.

Handelte es sich in diesen, sowie in den zahlreichen durch sie veranlassten Arbeiten anderer Mathematiker, wie der Herren Frobenius und Thomé, um die Integrale einer und derselben und zwar linearen Differentialgleichung mit derselben unabhängigen Veränderlichen, so verfolgen die vorliegenden Untersuchungen, die sich im Princip auf beliebige algebraische Differentialgleichungen erstrecken, den Zweck, hinsichtlich der durch verschiedene algebraische Differentialgleichungen definirten Transcendenten für verschiedene Werthe der unabhängigen Variablen, die miteinander in algebraischer Beziehung stehen, allgemeine Sätze festzustellen, aus denen über einen algebraischen Zusammenhang unter ihnen sowohl der Existenz, als der Art nach entschieden werden könne. — Es lassen sich im Wesentlichen drei Hauptprobleme bezeichnen, deren Beantwortung vermöge der durch die bezeichneten Sätze gewonnenen neuen Principien und Methoden in Angriff genommen wird, und um die sich alle in den vorliegenden Untersuchungen behandelten Fragen gruppiren.

Die Möglichkeit der Discussion der Integrale linearer homogener Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung beruht auf dem Fundamentalsatze, dass das allgemeine Integral derselben eine lineare homogene Function von n particulären Integralen mit willkürlichen Constanten ist. An diesen Umstand anknüpfend wird das allgemeine Problem aufgestellt, die Classen von algebraischen Differentialgleichungen anzugeben, für welche das allgemeine Integral überhaupt eine algebraische Function particulärer Integrale und willkürlicher Constanten ist — eine Frage, die mit derjenigen nach der Anzahl der durch eine algebraische Differentialgleichung definirten selbstständigen Transcendenten identisch ist. Die Behandlung dieses Hauptproblems geschieht nicht in ununterbrochener Folge, sondern zieht sich in einzelnen Absätzen durch mehrere Capitel des Buches hin, indem die betreffende Untersuchung an bestimmten Punkten abgebrochen wird, um später wieder aufgenommen zu werden, da die einzelnen dabei zu betrachtenden Fälle verschiedene Methoden erfordern, die sich an die Analyse der anderen Probleme naturgemäss anknüpfen. Das Problem wird für Differentialgleichungen erster Ordnung vollständig erledigt.

Das zweite Hauptproblem bildet die Erweiterung des Abel'schen Theorems auf die Lösungen der algebraischen Differentialgleichungen. Fasst man das Integral $\int f(x, y)\,dx$, wo y eine algebraische Function von x und f eine rationale Function bezeichnet, als das Integral der Differentialgleichung erster Ordnung $dz = f(x\,y)\,dx$ auf, so liefert das Abel'sche Theorem eine lineare Beziehung eines und desselben Integrals der Differentialgleichung für verschiedene algebraisch miteinander verbundene Argumente. Das „erweiterte Abel'sche Theorem" hat nun zum Gegenstande die Feststellung irgend einer algebraischen Beziehung zwischen den Werthen eines und desselben particulären Integrals einer beliebigen algebraischen Differentialgleichung für algebraisch von einander abhängige Werthe der unabhängigen Variablen.

Eng verbunden mit dem Abel'schen Theorem ist eine andere Reihe von Untersuchungen Abel's, die sich mit den Bedingungen und der Form der Reduction Abel'scher Integrale aufeinander und auf Logarithmen algebraischer Functionen beschäftigen. Die Ausdehnung des Reductionsverfahrens auf die Integrale linearer Differentialgleichungen beliebiger Ordnung mit algebraischen Coefficienten dient zum Mittelpunkte einer dritten Gruppe von Problemen, denen der zweite Theil der vorliegenden Untersuchungen gewidmet ist und bei deren Behandlung eine bewundernswürdige Fülle von hochinteressanten Methoden und Ergebnissen zu Tage tritt. Im Speciellen erfährt hierbei die Theorie der Integrale algebraischer Functionen eine höchst bemerkenswerthe Bereicherung, indem im Falle der Möglichkeit der Reduction eines solchen Integrals auf elliptische Integrale gezeigt wird, dass dieselbe stets durch eine



rationale Transformation bewirkt werden kann. Die Schwierigkeit dieses „rationalen Reductionsproblems" erhellt am besten daraus, dass Abel, der die rationale Reduction für hyperelliptische Integrale auf elliptische geleistet hatte, eben dieselbe für allgemeine Abel'sche Integrale seiner eigenen Erklärung nach nicht zu bewerkstelligen vermochte. Hier erscheint die Lösung des fraglichen Problems als besonderer Fall der rationalen Reduction von Integralen linearer Differentialgleichungen überhaupt auf elliptische Integrale.

Der Verfasser hat in den letzten Jahren einige Sätze und Methoden aus der Theorie der Differentialgleichungen nebst mehreren Anwendungen in einer Reihe von Abhandlungen, die theils im Crelle'schen Journal, theils in den Mathematischen Annalen erschienen sind, veröffentlicht. Im vorliegenden Werke sind nun die hierauf bezüglichen Untersuchungen im Zusammenhange dargestellt, wobei die in den ersteren enthaltenen Sätze eine beträchtliche Erweiterung erfahren. Durch die Darlegung der Theorie, welche jene Untersuchungen in sich befasst, tritt erst klar hervor, welche weitausgedehnten Gebiete durch dieselben der Forschung erschlossen sind, und wie befruchtend andererseits die aus ihnen fliessenden neuen Methoden und Principien zurückwirken auf die Behandlung und Lösung der im Gebiete der Abel'schen Integrale auftretenden Probleme, die in der neuen verallgemeinerten Fassung an Tiefe und Durchsichtigkeit zugleich gewinnen.

Da die fundamentalen Sätze über algebraische Beziehungen zwischen den Integralen verschiedener Differentialgleichungen, die den Ausgangspunkt der vorliegenden Untersuchungen bilden, ähnlich wie in der Theorie der algebraischen Gleichungen, den Begriff der Irreductibilität der Differentialgleichungen voraussetzen, dessen Einführung schon früher Herr Frobenius in seinen Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen als nothwendig erkannt hatte, so galt es vor Allem, die Irreductibilität der algebraischen Differentialgleichungen im allgemeinsten Sinne zu definiren und demnächst Methoden anzugeben, nach denen man entscheiden könne, ob eine Differentialgleichung irreductibel ist. Diese und andere sich daran knüpfende Fragen machen den Inhalt des ersten Capitels aus.

Eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$f\left(x, y_1, \dots y_\varrho, z, \frac{dz}{dx}, \dots \frac{d^m z}{dx^m}\right) = 0,$$

in der f eine ganze Function ihrer Argumente und $y_1, \dots y_\varrho$ algebraisch irreductible Functionen von x bedeuten, wird irreductibel genannt, wenn sie erstens als algebraische Gleichung in $\frac{d^m z}{dx^m}$ aufgefasst, im algebraischen Sinne irreductibel ist, zweitens mit keiner Differentialgleichung niederer Ordnung von demselben Charakter irgend ein Integral gemein hat. Wie man sieht, ist in dieser Definition die der Irreductibilität für algebraische

Gleichungen ($m=0$) mit enthalten. Doch findet in den aus der Definition hergeleiteten Folgerungen eine bemerkenswerthe Abweichung statt. Während nämlich für algebraische Gleichungen der Satz gilt, dass eine solche Gleichung schon irreductibel ist, wenn nur eine ihrer Wurzeln keiner algebraischen Gleichung niedrigeren Grades genügt, kann im Gegentheil eine Differentialgleichung der oben charakterisirten Art particuläre Integrale haben, die keiner Differentialgleichung niederer Ordnung von gleicher Beschaffenheit genügen, ohne darum irreductibel zu sein. Ein solcher Fall liegt ersichtlich in einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung vor, die ein transcendentales und ein algebraisches Integral besitzt, wegen des letzteren also reductibel ist. Dagegen gilt auch in dem Falle der algebraischen Differentialgleichungen der Satz, dass, wenn eine irreductible Differentialgleichung mit einer anderen ein Integral gemeinsam hat, sie alle Integrale mit derselben gemeinsam haben müsse. Die erstere Differentialgleichung heisst dann das algebraische Integral der letzteren.

Die verschiedenen Methoden, deren man sich bedienen kann, um die Irreductibilitätsbedingungen von Differentialgleichungen aufzufinden, werden an einzelnen Classen linearer Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten erläutert. Bei den linearen Differentialgleichungen erster Ordnung hängt die Frage nach ihrer Reductibilität mit derjenigen nach den Bedingungen zusammen, unter denen sich ein Abel'sches Integral durch eine algebraische Function resp. den Logarithmus einer algebraischen Function ausdrücken lässt. Für die einfachste algebraische lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung $\frac{d^2 z}{dx^2} = rat. f(x, y)$, worin y eine algebraische Function von x bedeutet, wird die Frage darauf zurückgeführt, wann das Integral eines Abel'schen Integrals algebraisch durch das letztere ausgedrückt werden könne, wobei das interessante Resultat sich ergiebt, dass die algebraische Relation, falls sie existirt, stets eine lineare sein muss. Hieran knüpft sich die Erörterung der allgemeineren Frage, unter welchen Bedingungen das Integral einer Transcendenten algebraisch durch eben diese Transcendenten darstellbar ist; es erhellt unmittelbar, dass diese Transcendente ξ ein Integral der Differentialgleichung

$$\xi = \frac{\delta F}{\delta x} + \frac{\delta F}{\delta \xi} \frac{d\xi}{dx}$$

sein muss, worin F eine algebraische Function von x und ξ bedeutet. Genügt nun ξ einer anderen algebräischen Differentialgleichung, so kommt die Frage auf eine Irreductibilitätsuntersuchung dieser Differentialgleichung zurück, die vom Verfasser für den Fall, dass dieselbe homogen und von der ersten Ordnung ist, durchgeführt wird. Schwieriger ist die Ermittelung der Bedingungen, unter denen die allgemeine lineare homogene

Differentialgleichung zweiter Ordnung mit algebraischen Coefficienten irreductibel ist. Man findet leicht, dass sie, wenn zwischen zwei Fundamentalintegralen derselben eine algebraische Beziehung besteht, stets reductibel ist. Abgesehen von diesem Falle ergiebt sich, dass eine reductible Differentialgleichung zweiter Ordnung zu ihrem Integral erster Ordnung eine lineare homogene Differentialgleichung mit algebraischen Coefficienten haben muss. Dieses Resultat wird für lineare Differentialgleichungen m^{ter} Ordnung dahin ausgedehnt, dass, wenn dieselbe reductibel ist, und zwar eine algebraische Differentialgleichung ϱ^{ter} Ordnung zum Integrale hat, wenn ferner zwischen den m Fundamentalintegralen der ersteren und ihren $\varrho - 1$ ersten Ableitungen keine algebraische Beziehung besteht, jene Differentialgleichung ϱ^{ter} Ordnung eine lineare Differentialgleichung mit algebraischen Coefficienten sein muss. Diese Ergebnisse stimmen mit den von Herrn Frobenius früher auf einem andern Wege gefundenen überein. (Vgl. Crelle J., Bd. 76, S. 243 flgg.)

Es folgt nunmehr im zweiten Capitel die Aufstellung eines Fundamentalsatzes in der Theorie der algebraischen Differentialgleichungen, der die Basis für die Ausdehnung des Abel'schen Theorems, sowie der Transformationsprobleme Abel'scher Integrale auf die durch algebraische Differentialgleichungen definirten Transcendenten bildet. Er sagt die Unveränderlichkeit von algebraischen Beziehungen zwischen particulären Integralen zweier Systeme von algebraischen Differentialgleichungen aus, deren unabhängige Variablen miteinander durch eine algebraische Relation verbunden sind, wenn man für die Integrale des einen Systems, die gewissen Irreductibilitätsbedingungen zu genügen haben, beliebige andere particuläre Integrale desselben Systems, statt derer des anderen Systems aber bestimmte andere passende particuläre Integrale dieses Systems substituirt. In der unveränderlichen Relation können auch die Ableitungen der Integrale verschiedener Ordnung, sowie die Variablen selbst und die den einzelnen Differentialgleichungen algebraischen Irrationalitäten eintreten. Der Beweis der hierher gehörigen Sätze wird lediglich mit Hilfe des im Vorhergehenden entwickelten Irreductibilitätsbegriffs geführt, und dabei die Aufmerksamkeit auf den wichtigen Umstand gelenkt, dass man den Uebergang der Functionswerthe der Integrale in die neuen nicht etwa in allen Fällen als durch geschlossene Umläufe der unabhängigen Variablen um singuläre Punkte hervorgegangen annehmen darf, da denn die Sätze von der Erhaltung der algebraischen Beziehung zwischen den Integralen unmittelbar evident wären. Vielmehr giebt es viele irreductible Differentialgleichungen, bei denen man nicht durch geschlossene Umläufe von einem particulären Integrale zum andern gelangen kann, wofür ein Beispiel in einer irreductiblen linearen homogenen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten aufgestellt wird, deren Integrale

überall eindeutig sind; die Giltigkeit der erwähnten Sätze bleibt dadurch unberührt. Dieselben werden nun zunächst auf Differentialgleichungen erster Ordnung angewandt. Hierbei ergiebt sich der eigenthümliche Umstand, dass der Satz von der Erhaltung der Relation zwischen den Integralen zugleich das Mittel bietet, die Form dieser Relation festzustellen. Haben die Gleichungen die einfachste Form $\frac{dz}{dx}=y_x$ $(x=1,2\ldots\lambda)$, worin y_x eine beliebige algebraische Function von x bedeutet, so ergiebt sich der bekannte Satz, dass die einzig mögliche Form einer algebraischen Beziehung zwischen Abel'schen Integralen die lineare mit constanten Coefficienten ist, worin der von den Integralen freie Theil eine algebraische Function der Independenten darstellt. Der weitere Verfolg der Untersuchung führt zu dem neuen Ergebniss, dass in eine algebraische Relation zwischen Abel'schen Integralen solche analytische Functionen, die ein Additionstheorem besitzen, nicht eintreten können. Der Beweis hierfür beruht ausschliesslich auf der Eigenschaft der bezeichneten Functionen, einer Differentialgleichung erster Ordnung zu genügen, für welche sich das allgemeine Integral als algebraische Function eines particulären Integrals und einer willkürlichen Constante ausdrücken lässt. Da sonach die durch dieses Merkmal charakterisirten Transcendenten überhaupt in eine algebraische Beziehung mit Abel'schen Integralen nicht eintreten können, so tritt hier zum ersten Male die oben erwähnte bedeutsame Frage auf, für welche Classe von algebraischen Differentialgleichungen das allgemeine Integral eine algebraische Function particulärer Integrale und willkürlicher Constanten ist. Sie wird hier für die Differentialgleichungen erster Ordnung in dem besonderen Falle, dass in der fraglichen algebraischen Function die unabhängige Variable nicht explicite vorkommt, erledigt.

Mit dem dritten Capitel beginnen nunmehr die Anwendungen der im Vorhergehenden entwickelten Principien und Sätze zur Verallgemeinerung wichtiger Sätze der Integralrechnung im engeren Sinne. Der nächste Gegenstand ist die Ausdehnung des Abel'schen Theorems auf Integrale algebraischer Differentialgleichungen, wobei das Problem erweitert wird zur Feststellung irgend einer algebraischen Beziehung zwischen den Werthen eines und desselben Integrals für algebraisch miteinander verbundene Werthe der unabhängigen Variablen. Bei der Entwickelung dieser Beziehung dient als leitendes Princip, dass die durch den Satz von der Erhaltung der algebraischen Relation zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungen gelieferte Form jener Relation für den Fall, dass die Differentialgleichungen in eine zusammenfallen, ein gewisses Theorem ergiebt, welches die gesuchte Erweiterung des Abel'schen Theorems bildet. So war als die allgemeinste Form der unveränderlicher Relation zwischen Integralen des Systems

$$\frac{dz}{dx} = z y_\varkappa \quad (\varkappa = 1, 2 \ldots \lambda) \quad (y_\varkappa \text{ algebr. Function von } x)$$

für algebraisch untereinander zusammenhängende Werthe von x die Gleichung

$$z_1^{c_1} z_2^{c_2} \ldots z_\lambda^{c_\lambda} = A$$

gefunden worden, wo A eine algebraische Function von x und $c_1 \ldots c_\lambda$ rationale Zahlen bedeuten. Hieraus leitet man sofort das zur Differentialgleichung $\frac{dz}{dx} = zy$ gehörige erweiterte Abel'sche Theorem ab, dessen Form vom Geschlecht der algebraischen Function y abhängt. Für das Geschlecht 1 lautet es, wenn $y\,dx$ ein Differential erster Gattung ist: $z'_1 = z_1 z_2$, wo die algebraische Beziehung zwischen den entsprechenden unabhängigen Argumenten x'_1, x_1, x_2 derartig ist, dass x'_1 und $y(x'_1)$ rationale Functionen von x_1, x_2, $y(x_1)$ und $y(x_2)$ sind. Hieran knüpft sich die allgemeine Frage, welche Differentialgleichungen überhaupt das erweiterte Abel'sche Theorem in der Form $z'_1 = F(z_1 z_2)$ besitzen, wo F eine algebraische Function bezeichnet, welche, wie oben, die unabhängigen Variablen nicht explicite enthält. Es wird nachgewiesen, dass irreductible Differentialgleichungen dieser Eigenschaft von einer höheren als der ersten Ordnung nicht sein können und dass sie die Form

$$\lambda(z)\,dz = \mu(x)\,dx$$

haben müssen, wo $\lambda(z)$ und $\mu(x)$ algebraische Functionen von der Art sind, dass beide zum Geschlecht 1 gehörige Differentialien erster Gattung sind. Aus diesem Grunde wird das erweiterte Abel'sche Theorem obiger Form dem Geschlecht 1 zugehörig genannt. Lässt man in dasselbe auch die unabhängigen Variablen explicite eintreten, so wird man wieder auf irreductible Differentialgleichungen erster Ordnung geführt, die dadurch charakterisirt sind, dass ihr allgemeines Integral als algebraische Function eines particulären Integrals und einer willkürlichen Constanten und der unabhängigen Variablen dargestellt werden kann. Im vorigen Fall war das allgemeine Integral eine von der unabhängigen Variablen freie Function eines particulären Integrals und einer Constanten, und die Form der zugehörigen Differentialgleichung im vorhergehenden Capitel (s. S. 28) festgestellt worden. Hier ist nun Veranlassung geboten, die dort begonnene Untersuchung fortzuführen für den Fall, dass in die fragliche Relation die unabhängige Variable explicite eintritt. Es werden die Fälle betrachtet, wo das allgemeine Integral eine rationale ganze oder gebrochene Function eines particulären Integrals ist, deren Coefficienten von der willkürlichen Constanten und der unabhängigen Variablen algebraisch abhängen, die zugehörigen Differentialgleichungen erster Ordnung aufgestellt und für sie die Form des erweiterten Abel'schen Theorems ermittelt. Die folgenden Untersuchungen über das erweiterte Abel'sche Theorem für $p = 2$ führen auf Differentialgleichungen zweiter

oder erster Ordnung von der Beschaffenheit, dass das allgemeine Integral eine algebraische Function zweier particulären Integrale und zweier resp. einer willkürlichen Constante. Nachdem auch hier mit Beschränkung auf die Differentialgleichungen erster Ordnung die Fälle, in denen die genannte Beziehung ganz oder gebrochen rational ist, untersucht worden, wird gezeigt, dass die einzige Classe derjenigen Differentialgleichungen, für welche das allgemeine Integral eine algebraische Function zweier particulärer Integrale und einer willkürlichen Constanten ist, in welche die unabhängige Variable nicht eintritt, die der linearen Differentialgleichungen erster Ordnung und der durch algebraische Substitution aus diesen abgeleiteten ist. Besonders bemerkenswerth ist hier die angewandte Methode, da nämlich die Existenz derartiger algebraischer Beziehungen von der Integrabilitätsbedingung einer totalen Differentialgleichung abhängig erscheint, in der das allgemeine Integral und die beiden particulären Integrale die Veränderlichen sind. Zum Schlusse dieser Untersuchungen wird die Frage nach der Gestalt des Abel'schen Theorems für alle homogenen linearen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung erörtert, und die Form der allgemeinsten algebraischen Beziehung zwischen particulären Integralen derselben für algebraisch von einander abhängige Werthe der unabhängigen Variablen ermittelt. Beim näheren Eingehen auf die linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung gelangt der im ersten Capitel bei der Untersuchung reductibler Gleichungen dieser Art ausgeschlossene Fall des algebraischen Zusammenhanges zweier Fundamentalintegrale zur Erörterung. Nach Feststellung der einzig möglichen algebraischen Beziehung zwischen zwei particulären Integralen, wofern diese nicht etwa selbst algebraische Functionen sind, wird das für diese Differentialgleichungen geltende Abel'sche Theorem abgeleitet.

Im vierten und letzten Capitel, welches nahezu die Hälfte des Buches einnimmt und im Wesentlichen von linearen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung handelt, wendet sich die Untersuchung zur dritten Gruppe von Problemen, betreffend die Erweiterung derjenigen Untersuchungen Abel's, die sich mit den Bedingungen und der Form der Reduction von Integralen algebraischer Functionen beschäftigen. Ein bekannter Abel'scher Satz lautet, dass, wenn das Integral $z=\int y\,dx$, wo y eine algebraische Function bezeichnet, selbst algebraisch ist, z rational durch x und y ausdrückbar ist. Dieser Satz wird auf Integrale von Differentialgleichungen in folgender Weise verallgemeinert: Wenn eine lineare nicht homogene Differentialgleichung in z mit Coefficienten, die algebraische Functionen von x sind, ein algebraisches Integral hat, so hat sie stets auch ein in den Coefficienten rationales Integral, wenn sie nicht eine homogene oder durch die Substitution $z=\zeta+const.$ auf

eine homogene zurückführbare ist. Dieser und ein ähnlicher Satz über Differentialgleichungen, die ein algebraisch-logarithmisches Integral besitzen, bilden den Uebergang zu einem allgemeinen Theorem, wonach aus der Existenz eines einer linearen Differentialgleichung mit algebraischen Coefficienten genügenden Integrals, welches additiv aus Logarithmen algebraischer Functionen und Abel'schen Integralen von den resp. Geschlechtern $p_1, p_2, \ldots p_\lambda$ zusammengesetzt ist, stets die Existenz eines anderen Integrals derselben Differentialgleichung von der Form

$$u + \Sigma b_\mu \log. v_\mu + \frac{1}{\lambda} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p_1} \int^{\eta_1^{(\varrho)}} y_1\, ds + \ldots + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p_\lambda} \int^{\eta_\lambda^{(\varrho)}} y_\lambda\, ds$$

geschlossen werden kann, worin die b Constanten, $u, v_1, \ldots v^\mu$ rationale Functionen der Coefficienten der Differentialgleichung, λ eine positive ganze Zahl und $y_1 \ldots y_\lambda$ algebraische Functionen von s von den Geschlechtern resp. $p_1 \ldots p_\lambda$ bedeuten, während die Integralgrenzen $\eta_\alpha^{(1)} \ldots \eta_\alpha^{p_\alpha}$ die Lösungen einer Gleichung p_α^{ten} Grades sind, deren Coefficienten rational aus den Coefficienten der Differentialgleichung zusammengesetzt sind. Ein weiterer sehr folgenreicher Satz ist, dass für jedes der in obiger Formel vorkommenden Abel'schen Integrale $\int y_\alpha\, ds$ die Summe irgend eines Systems von zugehörigen p_α Integralen erster Gattung gleich einem Integrale ebenfalls erster Gattung $\int Y\, dx$ ist, worin Y eine rationale Function von x und den Coefficienten der Differentialgleichung darstellt. Dieser Satz, der eine Transformation Abel'scher Integrale verschiedener Irrationalitäten aufeinander enthält, erfordert zu seiner Verwerthung die Erforschung der Natur der fraglichen Irrationalitäten, womit sich der letzte Abschnitt der vorliegenden Untersuchungen beschäftigt. Hier wird zunächst der Fall hervorgehoben, in welchem die Coefficienten der die Grenzen η_α definirenden Gleichung p_α^{ten} Grades rationale Functionen von x allein sind. Dieser bemerkenswerthe Umstand tritt nämlich stets ein, wenn die Coefficienten der Differentialgleichung als algebraische Irrationalität nur die n^{te} Wurzel einer rationalen Function von x enthalten und unter den Integralen derselben ein Abel'sches Integral vorkommt, dessen Irrationalität ebenfalls in einer n^{ten} Wurzel einer rationalen Function von x besteht. Kommen insbesondere unter den Integralen elliptische vor und ist $n = \frac{1}{2}$, so erhält man nach dem erwähnten Transformationssatze, da hier $p_\alpha = 1$ ist, die Transformationsrelation

$$\frac{d\eta}{\sqrt{\varphi(\eta)}} = \frac{f(x)\, dx}{\sqrt{R(x)}},$$

worin η eine rationale Function von x allein ist, die linke Seite ein elliptisches und die rechte ein hyperelliptisches Differential erster Gattung darstellt. In diesem Ergebniss ist der Abel'sche Satz enthalten, dass,

wenn ein hyperelliptisches Integral auf ein elliptisches durch eine algebraische Transformation reducirbar ist, diese Reduction stets durch eine rationale Substitution bewirkt werden kann. Die Feststellung der Eigenschaften der in Rede stehenden rationalen Transformation führt dann zu dem interessanten Resultat, dass nur für elliptische Integrale und hyperelliptische erster, zweiter und dritter Ordnung so viel Integrale, als das Geschlecht anzeigt, existiren, die simultan auf je ein elliptisches Integral reducirbar sind.

Die Entscheidung der wesentlich anderen Frage, ob ein speciell vorgelegtes hyperelliptisches Integral auf ein elliptisches reducirbar ist, hängt mit den Eigenschaften der Perioden des hyperelliptischen Systems zusammen, und es wird an einem Beispiele gezeigt, wie die Theorie der Transformation der hyperelliptischen Thetafunctionen zur Behandlung dieser Probleme verwerthet werden kann.

Aber nicht blos die Frage der Reduction hyperelliptischer Integrale auf elliptische, sondern auch die der Reduction hyperelliptischer Integrale auf solche niederer Ordnung überhaupt wird vermöge des oben angegebenen allgemeinen Transformationssatzes beantwortet und das Verfahren an einzelnen Beispielen erläutert.

Nachdem dann noch der allgemeinere Fall, dass die Integrale der linearen Differentialgleichung nicht blos additiv, sondern überhaupt algebraisch aus Abel'schen Integralen und logarithmisch algebraischen Functionen zusammengesetzt sind, betrachtet und die nothwendige Form dieser Verbindungen festgesetzt worden, wird auf die Eigenschaften eingegangen, welche den algebraischen Grenzen solcher Integrale unter gewissen Voraussetzungen für die reducirten Differentialgleichungen zukommen müssen. So wird u. A. bewiesen, dass, wenn die complete Differentialgleichung ein algebraisches Integral hat, während die reducirte kein solches besitzt, jenes sich stets als rationale Function der Coefficienten darstellen lässt. Aehnliche Sätze werden über die rationale Ausdrückbarkeit der Grenzen der Integrale, die durch Abel'sche Integrale darstellbar sind, aufgestellt.

Es handelt sich nunmehr darum, die Beschaffenheit der algebraischen Irrationalitäten der elliptischen und algebraischen Integrale zu untersuchen, aus denen die Integrale einer nicht homogenen linearen Differentialgleichung zusammengesetzt sind. Diesem Gegenstand ist der letzte Abschnitt (§ 15) dieses inhaltreichen Capitels gewidmet, der besonders lehrreich ist, da die Lösung dieser Frage mit der Theorie der complexen Multiplication und andererseits mit der Kreistheilungslehre in einen merkwürdigen Zusammenhang gebracht wird. Ausführlich behandelt wird der Fall, dass der completen Differentialgleichung ein elliptisches Integral genügt. Ist dasselbe erster Gattung — und auf solche kann man die Frage stets zurückführen —, so gilt folgender Satz: Genügt der reducirten

Differentialgleichung überhaupt kein Abel'sches Integral, und geht die rechte Seite y der completen Gleichung bei einem geschlossenen Umlaufe der unabhängigen Variablen, für welchen die Coefficienten der reducirten Gleichung unverändert bleiben, in εy über, wo ε nach einem bekannten Satze eine Einheitswurzel ist, so ist der Modul des elliptischen Integrals ein Modul der complexen Multiplication, wofern nicht $\varepsilon = -1$ ist, und ε ist der Multiplicator derselben. Hieraus ergiebt sich denn unmittelbar, dass ε nur die dritte, vierte oder sechste Einheitswurzel sein kann und die elliptischen Integrale selbst auf eine der Formen

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^3-1}}, \quad \int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4-1}}, \quad \int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^6-1}}$$

reducirbar sein müssen, während die Grenzen, sowie die dazu gehörigen Irrationalitäten nach dem Früheren rationale Functionen der Coefficienten der reducirten Differentialgleichung und von y sind. Da ein Abel'sches Integral der linearen Differentialgleichung $\frac{dz}{dx} = y$ genügt, so liefert der angeführte Satz für den Fall, dass y einer Gleichung von der Gestalt

$$y^{\varkappa\mu} + \varphi_\mu(x)\, y^{(\varkappa-1)\mu} + \ldots \varphi_{\varkappa\mu}(x) = 0$$

genügt, wo μ einen der Werthe 2, 3, 4, 6 und die φ beliebige rationale Functionen von x bedeuten, die einzigen Formen der elliptischen Integrale, auf welche das Abel'sche Integral $\int y\, dx$ reducirbar ist, und zugleich das Mittel, die dieser Bedingung unterliegenden Abel'schen Integrale sämmtlich aufzustellen; die Grenzen der elliptischen Integrale, sowie die dazu gehörigen Irrationalitäten sind rationale Functionen von y. Die vorstehenden Betrachtungen werden dahin verallgemeinert, dass angenommen wird, es bestehe zwischen einer Anzahl von Zweigen der algebraischen Function von y eine lineare Relation. Bei der Prüfung dieser Annahme ergeben sich interessante Sätze über die Entwickelungsform der Function y in der Umgebung eines Verzweigungspunktes, falls schon unter den Elementen eines demselben angehörigen Cyklus eine lineare Relation stattfindet. Hat bei der letzteren Annahme die complete lineare Differentialgleichung, worin y die rechte Seite bildet, ein elliptisches Integral, ohne dass die reducirte Differentialgleichung durch Abel'sche Integrale befriedigt wird, so ist auch hier der Modul des elliptischen Integrals ein Modul der complexen Multiplication. Ist insbesondere die Zahl ϱ der Elemente eines Cyklus in der Umgebung eines Verzweigungspunktes a eine Primzahl von der Form $\varrho \equiv 3 \; mod.\, 4$, und es kommen in der zugehörigen Entwickelung von y nach Zusammenfassung der gleichen gebrochenen Potenzen nicht alle Potenzen von $(x-a)^{\frac{1}{\varrho}}$ vor, so wird gezeigt, dass dieselbe unter den genannten

Voraussetzungen gerade $\frac{\varrho-1}{2}$ gebrochene Potenzen enthält, deren Zähler die $\frac{\varrho-1}{2}$ quadratischen Reste oder Nichtreste von ϱ sind und dass $\sqrt{-\varrho}$ der Multiplicator der complexen Multiplication für das elliptische Integral ist. Wie die Ausdehnung dieser Sätze auf den Fall, dass Abel'sche Integrale der completen linearen Differentialgleichung genügen, zu bewirken ist, wird in ausführlicher Weise an dem Falle der Existenz von hyperelliptischen Integralen, die dann gleichfalls eine complexe Multiplication zulassen, dargelegt.

Wir haben im Vorstehenden versucht, eine Vorstellung von der Fülle des Neuen und Interessanten zu geben, das uns in dem Werke geboten wird. Da wir uns darauf beschränken mussten, den eigentlichen Gegenstand der vorliegenden Untersuchungen in den Hauptzügen vorzuführen, waren wir genöthigt, viele Einzelheiten zu übergehen, die in Nebenuntersuchungen ausgeführt sind, aber darum nicht minder wesentliche Stücke zur Bereicherung der Analysis ausmachen. Die Darstellung, an welcher man vielleicht die zu grosse Vorliebe für langathmige Perioden aussetzen könnte, ist durch Klarheit und Strenge in den Beweisen bei geringstmöglicher Voraussetzung ausgezeichnet. Fast überall, wo Lehrsätze aus anderen Disciplinen entnommen werden mussten, lässt es sich der Verfasser angelegen sein, in besonderen Anmerkungen die nöthigen Erläuterungen zur Orientirung beizufügen. Dem Beweise eines jeden Theorems folgt die Verificirung desselben durch dahin gehörige Beispiele, und die Einsicht in die verschiedenen Methoden für die Behandlung der Probleme wird durch vollständige Ausrechnung zahlreicher specieller Aufgaben in dankenswerther Weise gefördert. Insbesondere belehrend ist der an vielen Stellen befindliche Hinweis auf den Zusammenhang gewisser schwieriger Fragen aus verschiedenen Gebieten der Analysis untereinander, wodurch dieselben sich gegenseitig beleuchten und dem Leser Anleitung geboten wird, von den verschiedensten Seiten her, je nach den ihm geläufigen Vorstellungsweisen, in das Studium der in Rede stehenden Probleme einzudringen.

Die Einsicht in die Natur der durch algebraische Differentialgleichungen definirten Transcendenten ist durch die vorliegenden Untersuchungen um ein mächtiges Stück vorwärts geführt, und in den grundlegenden Sätzen und Methoden von unübersehbarer Tragweite eine fruchtbare Saat ausgestreut, die eine reiche Ernte an weiteren wichtigen Ergebnissen mit Zuversicht erwarten lässt.

Berlin, Juni 1883.

HAMBURGER.

Apolarität und rationale Curven. Eine systematische Voruntersuchung zu einer allgemeinen Theorie der linearen Räume. Von Dr. W. FRANZ MEYER, Privatdocent an der Universität Tübingen. Tübingen, bei Franz Fues. 1883. XIV u. 406 S. gr. 8°.

Dieses Buch hat zum ausgesprochenen Zweck, projective Verhältnisse in höheren linearen Räumen mittels Betrachtungen in weniger ausgedehnten Gebieten zu untersuchen, unterscheidet sich also von den zahlreicheren Arbeiten, in welchen umgekehrt jene an sich einfacheren Verhältnisse nur als Mittel zum Studium von weniger ausgedehnten, aber nicht linearen Gebilden benutzt werden. Man kann für dasselbe zwei Hauptquellen nachweisen, aus deren Vereinigung der Verfasser eine neue algebraisch geometrische Untersuchungsmethode herleitet.

Die eine Quelle ergiebt sich schon aus dem ersten Theil des Titels und aus der Widmung an den „Begründer der Apolaritätstheorie, Theodor Reye. (Reye in Cr. J., Bde. 72—82.) „Apolar“ zu einander (nach Rosanes in Cr. J., Bde. 75—90, „conjugirt“) heissen zwei Formen von gleich vielen Variablen, die eine a_x^n von der Ordnung n, die andere u_α^n von der Classe n, wenn die bilineare Invariante a_α^n verschwindet; oder allgemeiner für zwei Formen a_x^n, u_α^m und etwa $n \geqq m$, wenn die m^{te} Ueberschiebung $a_\alpha^m a_x^{n-m}$ für alle x identisch verschwindet. Fasst man also die Coefficienten der Formen als Punkt-, bez. Ebenencoordinaten in einem höheren linearen Raume, so hat man in jenem Begriff eine Erweiterung der gewöhnlichen Reciprocitätsbetrachtung.

Man kennt die Rolle, welche der Apolaritätsbegriff in den Aufsätzen der Herren Reye und Rosanes in Bezug auf Aufstellung linearer Identitäten, insbesondere Darstellungen von algebraischen Formen als Summen von Potenzen spielt. Die zuerst in dem Werke von Paul Serret (1869) behandelten Darstellungen, wie die lineare Relation zwischen den Quadraten der Ausdrücke für 6 Punkte, die auf einem Kegelschnitt liegen etc., wurden durch Anwendung dieses Begriffs auf Systeme conjugirter Punkte durchsichtig, was dann zu einer Reihe schöner und fruchtbarer Untersuchungen führte. — Ein neues Licht ist in jüngster Zeit (etwa seit Ende 1881) von invariantentheoretischer Seite her auf diese Beziehungen geworfen worden durch das von Brill (Math. Ann. XX) und Stephanos (C. R. 1881, 1882) erschlossene Princip: dass zwei Systeme von conjugirten Formen dieselben Combinanten besitzen; wobei insbesondere der interessanten Untersuchung über das auf eine Gleichung fünften Grades führende Problem: „ein System von zwei (bez. von den conjugirten drei) biquadratischen binären Formen aufzufinden, deren Functionaldeterminante gegeben ist,“ gedacht werde.

Die zweite ganz verschiedenartige Quelle für das Buch ist die Theorie der rationalen Curven in Räumen von verschiedenen Dimensionen; oder vielmehr die geometrische Interpretation der binären Formen auf solchen Curven. Vermuthlich schwebte sogar dem Verfasser ursprüng-

lich das letztere Ziel und die Ableitung von binär-invariantentheoretischen Eigenschaften aus geometrischen Betrachtungen vor; für jene Interpretation hatte er eine gute Vorarbeit an dem Sturm'schen Aufsatze (Cr., Bd. 86), welcher die Darstellung der cubischen und biquadratischen binären Formen und deren Apolaritätstheorie auf der cubischen Raumcurve schon eingehend behandelt. Diesen Curven, die sich bei einem System von binären Formen ja unmittelbar darbieten, insbesondere dem Nachweis des obigen Combinantenprincips, widmet der Verfasser sein erstes Capitel.

Das Verdienst des Buches liegt, wie schon angedeutet, in der aus diesen beiden Quellen hergeleiteten Methode, durch welche der Verfasser Eigenschaften, vorzugsweise Polareigenschaften, die zur ternären, quaternären etc. Apolarität gehören, in directe Beziehung zu der binären Apolarität auf den Raumcurven zu setzen weiss; so vor Allem die Darstellungen durch Potenzsummen.

Es geschieht dies vom Verfasser in möglichst einfacher algebraischer Darstellungsweise. Unter „Normcurve N_d" versteht er eine rationale Curve der Ordnung d im Raume von d Dimensionen; deren Coordinaten werden einfach zu den Potenzen eines Parameters λ proportional gesetzt. Dann wird jeder Punkt der Ebene durch die beiden Werthe (α, β) des Parameters λ für die von dem Punkte an die zu Grunde gelegte N_2 gehenden Tangenten dargestellt, analog jede Gerade der Ebene, und analog in höheren Räumen. — Sei nun in der Ebene ein Kegelschnitt $F = a_x^2$ apolar zu N_2 (als Classenkegelschnitt), so werden zunächst die Coefficienten von a_x^2 zu $a_{ik} = a_{i+k}$; und für irgend ein zu a_x^2 conjugirtes Punktepaar (α, β), (γ, δ) hat man

$$a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + a_4 s_4 = 0,$$

wo die Verhältnisse der s_i die elementaren symmetrischen Functionen der vier Parameter α, β, γ, δ bedeuten — eine Gleichung, die bei ihrer Symmetrie zwischen den vier Parametern sogleich die ∞^3-Schaar der N_2 umschriebenen Polvierseite von a_x^2 darstellt.

Dies, mit der bez. Erweiterung für mehrere Dimensionen, ist die ganze Grundlage für die Entwicklungen des Buches, so weit es Polareigenschaften betrifft. Insbesondere folgert der Verfasser in der bezeichneten Richtung den Hauptsatz: „dass, wenn $F = a_x^2$ apolar ist zu N_2 und f die binäre Form, welche die vier Schnittpunkte von F und N_2 vorstellt; wenn ferner $\Phi = u_\alpha^2$ ein Classenkegelschnitt, welcher ebenfalls zur Ordnungsnormcurve N_2 apolar ist und mit demselben das Tangentenquadrupel φ gemein hat; und es ist f zu φ apolar — so wird auch F zu Φ apolar, und umgekehrt".

Die Theorie der N_2 umschriebenen Polardreiecke von F, insbesondere der H-Kegelschnitte, welchen dieselben einbeschrieben sind —

Sätze, wie sie auch von Em. Weyr u. A. vielfach behandelt sind —, füllt einen beträchtlichen Theil des Buches und bietet an sich beachtenswerthe Einzelheiten, wie in der Tabelle von pag. 171. Dem Verfasser indess dient diese Theorie, über frühere Untersuchungen (von Cremona, Aschieri etc.) hinausgehend, hauptsächlich zur Abbildung des allgemeinen linearen Complexes auf die Ebene, indem die Coefficienten in den H-Gleichungen lineare Combinationen der Coordinaten von Raumgeraden werden. Es mag dies als Beispiel dafür dienen, wie der Verfasser seinen im Anhang zum Titel und in den ersten Worten dieser Recension angedeuteten Hauptzweck mittels der Apolaritätstheorie zu erreichen gedenkt. Freilich für die allgemeine Theorie der höheren Räume erst in einem weiteren in Aussicht gestellten Werke, für welches der Verfasser das gegenwärtige nur als eine Einleitung betrachtet und auf welches besonders im letzten, dritten Capitel häufig Vorausblicke geworfen werden. Diese Hinweise auf ein erst zu bearbeitendes Buch würde Referent gern beschränkt gesehen haben.

Eine weitere Beschränkung wäre in der Entwickelung der für die Ideen des Verfassers an sich sehr wesentlichen Partien des Buches erwünscht gewesen, welche die Involutionstheorie zweier oder dreier biquadratischer binärer Formen, insbesondere das oben genannte, hier unter dem nicht ganz empfehlenswerthen Namen „Brill-Stephanos'scher Satz" auftretende Theorem von dem System, das zu gegebener Functionaldeterminante gehört, behandeln. Hierbei tritt nämlich ein Zug des Buches, eine Reihe von Interpretationen ein und desselben Gedankens oder Satzes auszusprechen, zu sehr hervor. Denn so häufig auch dieses Mittel, und gerade in diesem Buche, den Gedankengang unterstützt — sobald es über Bedürfniss, wie hier, gebraucht wird, stört es die Uebersichtlichkeit und Einheitlichkeit der Schlüsse; noch dazu, wenn, wie in dem Buche geschieht, eine viel zu grosse Zahl gleichwerthiger Sätze alle mit ausgezeichneter Schrift gedruckt sind. Und sieht man genauer zu, so wird, trotz der vielseitigen Inangriffnahme, die genaue Lösung des eben genannten Problems eigentlich in rein algebraischer Reduction, welche von der Methode des Buches ganz unabhängig ist, geführt; eine zweite Lösung aber, welche 5 nur als untere Grenze liefert, knüpft, in interessanter Weise, direct gerade an jene Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten — oder vielmehr, wie der Verfasser vorzieht, an die reciproke Curve — selbst an, welche schon Herrn Brill auf die Frage geführt hat. — Beiläufig sei bemerkt, dass Referent der Meinung ist, es möchte wohl eine genauere Discussion dieser Curve dem Verfasser die Zahl 5 auch als endgiltige geliefert haben.

Bei dieser Beschränkung wären die leitenden Gedanken sicher ebenso hervorgetreten; aber die Beweisführung wäre weiter hinab in die Details geführt worden oder liesse sich doch leichter aus der Masse herausfinden.

Insbesondere die invariantentheoretischen Betrachtungen hätte Referent dabei über das vorliegende Maass gern hinausgeführt gesehen; in dieser Beziehung ist aber wohl von dem in Aussicht gestellten Werke ein tieferes Eingehen zu erwarten.

Wir könnten noch manche besonderen Resultate, die sich auf dem Wege des Verfassers ergeben, hervorheben — wie etwa einzelne geometrische Sätze in unserm Raume; oder den Beweis für die Existenz des Kegelschnitts, welcher die sechs Wendepunkte der oben genannten rationalen Curve vierter Ordnung ausschneidet; oder die Behandlung der wichtigen Frage nach allen linearen Identitäten zwischen n^{ten} Potenzen binärer Formen in nicht speciellem Falle etc. —; wir resumiren aber statt dessen das Urtheil dahin, dass der Verfasser mit dem Buche zwar kein neues Gebiet erschlossen hat, wohl aber eine neue geometrisch-algebraische Untersuchungsmethode, welche zahlreiche Anwendungen zulässt. Vielleicht wäre es deshalb für den forschenden Leser angenehmer und vortheilhafter gewesen, wenn der Verfasser auch, statt Auszüge aus Anwendungen, seine Methode selbst in den einzelnen Zeitschriftaufsätzen für sich klar dargelegt hätte.

Zum Schlusse muss noch das ausführliche Literaturverzeichniss hervorgehoben werden, wenn auch nicht gerade immer richtig und übersichtlich citirt ist.

Erlangen. M. Noether.

Bibliographie

vom 1. October bis 31. December 1883.

Periodische Schriften.

Abhandlungen der mathemat.-physikal. Classe der kgl. bayer. Akademie der Wissenschaften. 14. Bd. 3. Heft. München, Franz. 9 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe II. 88. Bd. 1. Heft. Wien, Gerold. 3 Mk. 60 Pf.

Astronomische Beobachtungen der königl. Universitätssternwarte zu Königsberg. 37. Abth., 1. Th. Herausgeg. von E. Luther. Königsberg, Koch & Reimer. 10 Mk. 50 Pf.

Astronomischer Kalender der k. k. Sternwarte in Wien. Jahr 1884. Wien, Gerold. 1 Mk. 20 Pf.

Beobachtungen, angestellt im astrophysikal. Observatorium in O-Gyalla. 5. Bd. Beobachtungen v. J. 1882. Herausgeg. von N. v. Konkoly. Halle, Schmidt. 10 Mk.

Beobachtungen der meteorologischen Stationen im Königreiche Bayern. Jahrg. 1883, 1. Heft. München, Ackermann. pro compl. 18 Mk.

Astronomische Nachrichten, herausgeg. v. A. Krüger. 106. Bd. (24 Nrn.) Nr. 2545. Hamburg, Mauke Söhne. pro compl. 15 Mk.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgeg. von Ohrtmann. 13. Bd., Jahrg. 1881, 2. Heft. Berlin, G. Reimer. 5 Mk.
Fortschritte der Physik. Jahrg. 1880, 2. Abth. Optik, Wärmelehre und Elektricitätslehre; redigirt v. Neessen. Berlin, G. Reimer. 17 Mk.
——, 3. Abth. Physik der Erde; redig. v. Schwalbe. Ebendas. 10 Mk.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Cohen, H., Das Princip der Infinitesimalmethode und seine Geschichte. Berlin, Dümmler. 3 Mk. 60 Pf.
Thompson, S., Philip Reis, inventor of the telefone. London, Spon. (Leipzig, Brockhaus.) 7 sh. 6 d.

Reine Mathematik.

Escherich, G. v., Ueber die Gemeinsamkeit particulärer Integrale bei zwei linearen Differentialgleichungen. 2. Th. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk. 20 Pf.
Kotanyi, L., Zur Reduction hyperelliptischer Integrale. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.
Mildner, R., Zur Auswerthung unendlicher Producte und Reihen. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.
Winckler, A., Ueber eine neue Methode zur Integration der linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabelen. (Akad.) Ebendas. 1 Mk.
Schubert, H., Sammlung von arithmet. und algebr. Fragen und Aufgaben. 2. Heft, für obere Classen. Potsdam, Stein. 1 Mk. 80 Pf.
Killing, W., Ueber die Nicht-Euklidischen Raumformen von n Dimensionen. Braunsberg, Huye. 1 Mk. 20 Pf.
Graefe, F., Vorlesungen über die Theorie der Quaternionen mit Anwendung auf die allgemeine Theorie der Flächen und Linien doppelter Krümmung. Leipzig, Teubner. 3 Mk. 60 Pf.
Henrici, J., und P. Treutlein, Lehrbuch der Elementargeometrie. 3. Th. Lage und Grösse der stereometrischen Gebilde. Abbildung der Figuren. (Kegelschnitte.) Leipzig, Teubner. 2 Mk. 80 Pf.
Schindler, E., Die Elemente der Planimetrie in organischer Entwickelung. 4 Stufen. Berlin, Springer. 6 Mk. 40 Pf.
Glinzer, E., Lehrbuch der Elementargeometrie. 3. Th. Trigonometrie. Hamburg, Nestler & Melle. 3 Mk.
Milinowski, A., Elementar-synthetische Geometrie der gleichseitigen Hyperbel. Leipzig, Teubner. 3 Mk. 60 Pf.
Eble, M., Graphische Trigonometrie mit Hilfe des astronomischen Netzes. Wiesbaden, Roth. 2 Mk.
Jentzen, Leitfaden der darstellenden Geometrie. 1. Th. Orthogonale Projectionen. Rostock, Hinstorff. 4 Mk. 50 Pf.
Fiedler, W., Die darstellende Geometrie in Verbindung mit der Geometrie der Lage. 3. Aufl., 1. Th. Leipzig, Teubner. 8 Mk. 40 Pf.
Ameseder, A., Ueber Configurationen auf der Raumcurve vierter Ordnung und erster Species. (Akad.) Wien, Gerold. 80 Pf.
Kohn, G., Zur Theorie der harmonischen Mittelpunkte. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.
Waelsch, E., Geometrische Darstellung der Theorie der Polargruppen. (Akad.) Ebendas. 20 Pf.

Angewandte Mathematik.

Perozzo, L., Neue Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Statistik. Deutsch von O. Elb. Dresden, Knecht. 2 Mk. 40 Pf.

Seeberger, G., Principien der Perspective und deren Anwendung nach einer neuen Methode. München, liter.-artist. Anstalt. 2 Mk.

Schram, R., Darstellung der in den „Hilfstafeln für Chronologie“ angewandten Methoden. (Akad.) Wien, Gerold. 80 Pf.

Kirchhoff, G., Vorlesungen über Mechanik. 3. Aufl. Leipzig, Teubner. 13 Mk.

Orff, C. v., Bestimmung der Länge des einfachen Secundenpendels auf der Sternwarte zu Bogenhausen. (Akad.) München, Franz. 4 Mk.

Bauernfeind, C. v., Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraction. 2. Mittheilung. (Akad.) München, Franz. 4 Mk.

Ulrich, F., Krystallographische Figurentafeln. Hannover, Schmorl & v. Seefeld. 2 Mk.

Niessl, G. v., Bahnbestimmung des grossen Meteors vom 13. März 1883. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Oppolzer, Th. v., Tafeln zur Berechnung der Mondfinsternisse. (Akad.) Ebendas. 2 Mk. 60 Pf.

——, Tafeln für den Planeten Concordia (58). (Akad.) Ebendas. 1 Mk.

Anton, F., Bahnbestimmung und Ephemeriden für den Planeten Bertha (154). (Akad.) Ebendas. 1 Mk. 60 Pf.

Lehmann-Filhes, R., Die Bestimmung der Meteorbahnen nebst verwandten Aufgaben. Berlin, G. Reimer. 5 Mk.

Physik und Meteorologie.

Claussen, L., Lehrbuch der Physik, nebst Anl. z. Exper. Potsdam, Stein. 1 Mk. 60 Pf.

Hoffmann, G., Leitfaden für den physikalischen Unterricht. Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Wüllner, A., Lehrbuch der Experimentalphysik. 2. Bd. Optik. 4. Aufl. Ebendas. 10 Mk.

Scheffler, H., Die Theorie des Lichts, physikalisch etc. 3. Supplem. zum 2. Theil der Naturgesetze. Leipzig, Förster. 3 Mk.

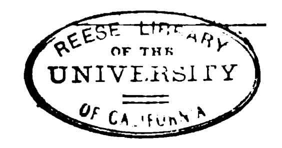
Tumlirz, O., die elektromagnetische Theorie des Lichts. Leipzig, Teubner. 3 Mk. 60 Pf.

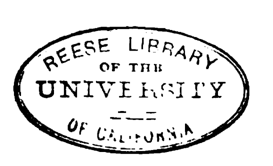
Wiedemann, G., Die Lehre von der Elektricität. 3. Bd. Braunschweig, Vieweg. 24 Mk.

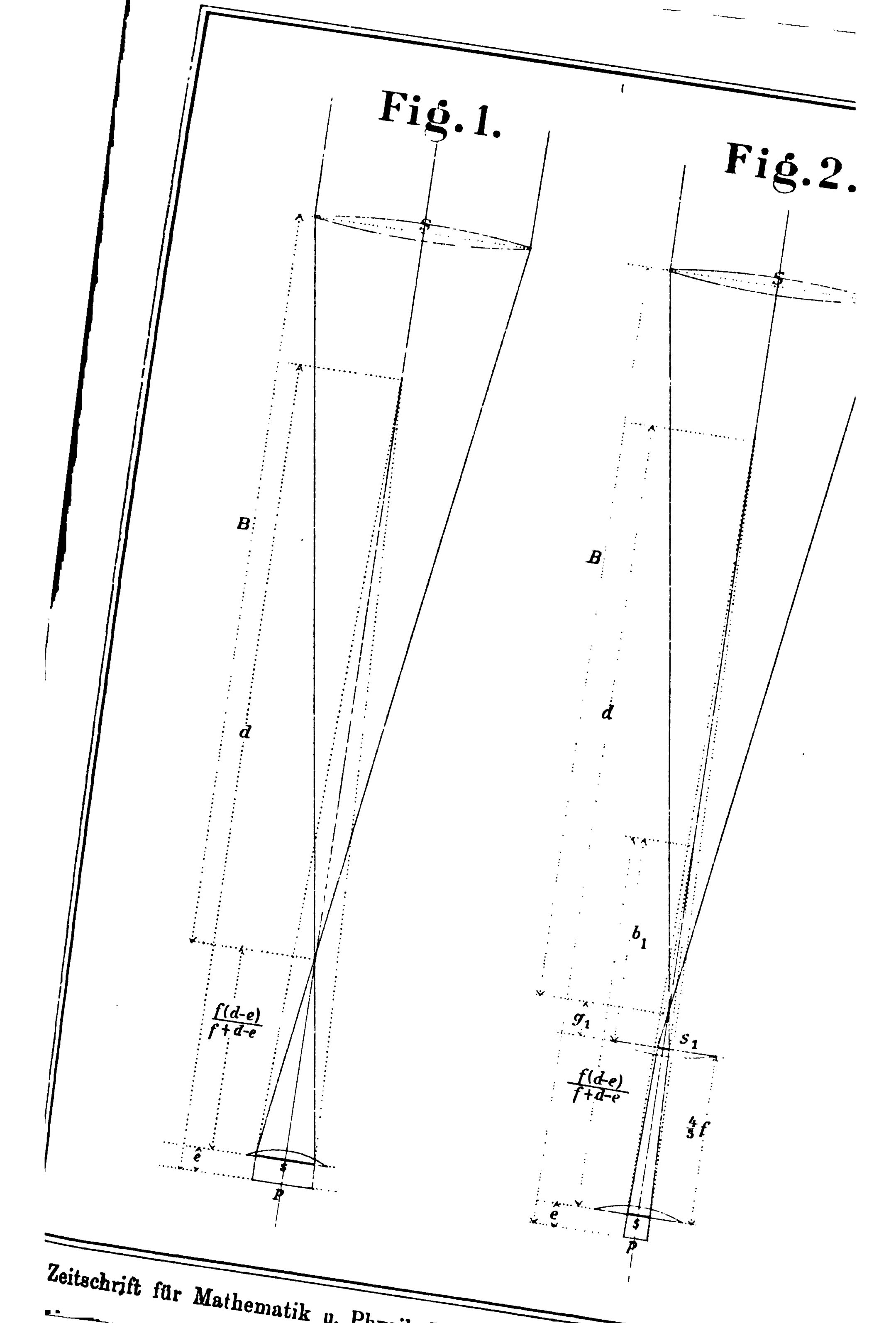
Hammerl, H., Studien über das Kupfervoltameter. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Lenz, R., Etudes électrométeorologiques. Nr. 1. Petersburg, Berlin, Friedländer. 80 Pf.

Nasmyth und Carpenter, Der Mond als Weltkörper etc. Deutsch von H. J. Klein. 3. Ausgabe. 1. und 2. Lieferung. Hamburg, Voss. 4 Mk.




REESE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY


Fig. 1.
S
B
d
f(d-e)
f + d-e
e
s
P
Fig. 2.
S
B
d
b1
g1
S1
f(d-e)
f + d-e
4/5 f
e
s
P

An der Hand dieser Vorrede können wir die zweite Frage im Ganzen bejahen. Kein Werk ist vollkommen, keines vollständig. Was dem Einen fragwürdig erscheint, hat für den Andern Fragwürdigkeit nur in Bezug auf seinen Werth. Wozu dem Einen die Quellen reichlich fliessen, dazu fehlt dem Andern auch der geringste Stoff. Auch die Begabung des Verfassers leitet selbst bei gleichem Endziele den Einen auf diese, den Andern auf jene davon weit verschiedene Bahn. Warum sollte also ein Buch nicht geschrieben werden, wie H. Marie es sich denkt, ein Buch, welches nur mit dem zweifellos Feststehenden sich beschäftigt, welches, wir möchten sagen, die Gedanken losschält von der Persönlichkeit ihrer Träger und sie selbst um ihre Fortpflanzung und Entwickelung befragt? Wir haben das Bewusstsein, in unseren historischen Schriften seit reichlich zwanzig Jahren dem Fortwirken einmal bestehender Gedanken auch an Orten, die von ihrer Heimath weit entfernt liegen, nachgespürt zu haben, wenn wir zu einer Trennung der Mathematik von den Mathematikern uns gleich nicht aufzuschwingen vermochten. Warum sollte ein anderer Schriftsteller nicht diese höhere Stufe der Vergeistigung seines Gegenstandes anstreben können? Eines freilich erscheint uns dabei unumgänglich: dass man nur von gesicherten Thatsachen Gebrauch mache, streitige entweder ganz beseitige, oder aber, wenn sie dazu einmal nicht angethan sind, von dem Plane des Werkes so weit abweiche, dass man sich auf eine gründliche, allen Richtungen gerechte Erörterung des fraglichen Punktes einlasse.

Hat H. Marie dieses gethan? Wir begeben uns damit in das Bereich der dritten Frage, auf welche wir leider keine Antwort von der Art zu geben im Stande sind, wie sie der Verfasser eines der Besprechung unterzogenen Werkes zu wünschen pflegt. Ein wichtiger Gedanke zieht als leitender Faden durch beide Bände sich fort: Die Griechen sind es, denen die reine Geometrie, die Inder, denen die rechnende Geometrie am meisten verdankt. Die Griechen haben von sich aus nie Flächenräume berechnet, deren begrenzende Strecken eine andere Messung als durch ganze Zahlen erforderte; wo sich in griechischer Sprache Solches vorfindet, ist indischer Einfluss mit unabweisslicher Gewissheit anzunehmen. Diese Sätze sind gewiss höchst bedeutsam; aber es sind Lehrsätze, keine Grundsätze. Sie wollen bewiesen sein. Die Gründe, welche seither für die Annahme einer ägyptogriechischen rechnenden Geometrie, die sich durch Vermittelung der Römer bis ins Mittelalter fortsetzte, geltend gemacht wurden, müssen entkräftet werden. H. Marie unterzieht sich auch dieser Aufgabe. Heron, der Schriftsteller des Jahrhunderts vor Christus, stört allein seine Kreise, da er ägyptische wie römische Feldmessung ruhig todtschweigt. Die alte Lehre von den beiden Heron, dem älteren und dem jüngeren, wird darum aus der geschichtlichen Plunderkammer wieder hervorgeholt. Die Dreiecksformel,

die Feldmesskunst, die ganze rechnende Geometrie gehören dem jüngeren Heron an, weil sie dem älteren nicht angehören können, und der jüngere Heron (geboren muthmasslich zu Constantinopel am Ende des VII. Jahrhdts.), kann unmittelbar oder mittelbar aus indischen Quellen geschöpft haben. Die Franzosen Martin und Vincent, welche den jüngeren Heron für die seitherige Schule endgiltig beseitigt haben, existiren für H. Marie so wenig, wie die Gründe der Verfechter der gleichen Lehre in anderen Ländern einer Entgegnung gewürdigt werden. Ein Gegengrund genügt gegen Alle: Heron von Alexandria kann die ihm sonst zugewiesenen] Werke nicht verfasst haben, denn die Dioptra ist ein für die damalige Zeit viel zu vollkommenes Messwerkzeug, und wenn Heron die Dreiecksformel $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ gekannt hätte, wo a, b, c die drei Seiten, s deren halbe Summe bedeuten, so müsste Ptolemäus die daraus leicht zu folgernde Formel chorda $2A = \frac{4\sqrt{s(s-a)(s-b)s-c)}}{bc}$ gekannt haben, welche in seinen Schriften nicht vorkommt. Wir überlassen es unseren Lesern, darüber zu urtheilen, ob H. Marie sich die Sache nicht zu bequem gemacht hat, ob wirklich in der Geschichte der Mathematik Sätze, die, wie sich später zeigte, einfach gefolgert werden konnten, sofort gefolgert worden sind, ob man also mit derartigen negativen Gründen der Hinwegräumung positiver Gründe überhoben ist.' Letztere hier zu wiederholen, geht natürlich nicht an; wir müssten schon geschriebene Bücher in ihrem ganzen Umfange wieder abschreiben.

Wir unterlassen es, auf viele Einzelsünden hinzuweisen, die H. Marie in den vorliegenden beiden Bändchen sich zu Schulden kommen liess. Wir erklären sie uns daraus, dass ihm die alten Schriftsteller meistens nur aus Berichten bekannt zu sein scheinen. Wir hoffen auf Besseres in den späteren Bänden, in welchen H. Marie sich mit Schriftstellern zu beschäftigen haben wird, deren Werke er selbst gelesen hat.

Cantor.

Ueber das Ausziehen der Quadratwurzel bei Griechen und Indern. Von Oberlehrer Karl Hunrath. Beilage zum Oster-Programm 1883. Hadersleben 1883.

Seit Referent in seinen Agrimensoren den Anstoss zur erneuten Untersuchung der Methoden gegeben hat, nach welchen die Griechen Quadratwurzeln auszogen, sind viele Versuche zur Lösung dieser interessanten, aber ausserordentlich schwierigen Frage aufgetaucht, so viele, dass ihre Anzahl selbst als Zeugniss aufgerufen werden kann für die Vermuthung, noch habe Niemand die Wahrheit getroffen. Bei uns persönlich hat sich im Laufe der Zeit nur eine Ueberzeugung immer fester

herausgebildet, dass nämlich die ältesten Methoden nothwendigerweise geometrisch bewiesen worden sind, womit nicht gerade dieselbe Nothwendigkeit für eine geometrische Entstehung der Methode in Anspruch genommen wird. Wir sind demnach von vornherein geneigter, solchen Forschern Glauben zu schenken, welche für ihre Vermuthungen ein geometrisches Gewand wählen, das griechischen Schnitt verräth, als solchen, welche arithmetische Formeln allein vorführen, wo möglich in der Gestalt von Algorithmen, die als solche dem Alterthume unmöglich bekannt sein konnten. H. Hunrath hat offenbar die gleiche Ueberzeugung gewonnen und sein Verfahren an einer Anzahl von Figuren erläutert, welche griechischen Geometern wohl bekannt waren. Er hat wenigstens die Quadratwurzeln aus den niedrigeren Zahlen jede für sich in besonderem Näherungsverfahren entwickelt, und auch Dieses scheint uns griechischer Gewohnheit, namentlich der älteren Zeit, zu entsprechen. Leider hört hier unser Einverständniss mit dem Verfasser auf, denn die Näherungsmethoden selbst erscheinen uns doch etwas modern erdacht.

Es sei, sagt H. Hunrath, m die Zahl, aus welcher die Quadratwurzel auszuziehen ist, und in ganzen Zahlen sei $a^2 > m > (a-1)^2$ und genau $m = a^2 - b$, wo folglich $b < 2a - 1$, mithin $\frac{b}{2a-1} < 1$ und umsomehr $\frac{b}{2a} < 1$. Der Bruch $\frac{b}{2a}$ wird zwischen zwei Stammbrüchen mit um 1 verschiedenen Nennern liegen müssen, indem $z - 1 < \frac{2a}{b} \leqq z$ gedacht jedenfalls $\frac{1}{z} \leqq \frac{b}{2a} < \frac{1}{z-1}$ macht. Demnach ist auch $a - \frac{1}{z} \geqq a - \frac{b}{2a}$, $\left(a - \frac{1}{z}\right)^2 \geqq \left(a - \frac{b}{2a}\right)^2$ und wegen $\left(a - \frac{b}{2a}\right)^2 = a^2 - b + \frac{b^2}{4a^2} = m + \frac{b^2}{4a^2} > m$ jedenfalls $\left(a - \frac{1}{z}\right)^2 > m$.

Andrerseits ist, wegen $\frac{b}{2a} < \frac{1}{z-1}$, auch $bz - b < 2a$, d. h. $b(z-1) \leqq 2a - 1$ und $\frac{b}{2a-1} \leqq \frac{1}{z-1}$. Folglich $\left(a - \frac{1}{z-1}\right)^2 \leqq \left(a - \frac{b}{2a-1}\right)^2$. Der letztere Ausdruck ist selbst $= a^2 - \frac{2ab - b + b}{2a-1} + \left(\frac{b}{2a-1}\right)^2 = a^2 - b - \frac{b}{2a-1} + \left(\frac{b}{2a-1}\right)^2 = m - \frac{b}{2a-1} + \left(\frac{b}{2a-1}\right)^2 < m$, weil $\frac{b}{2a-1} < 1$ und darum $\left(\frac{b}{2a-1}\right)^2 < \frac{b}{2a-1}$, also $\frac{b}{2a-1} - \left(\frac{b}{2a-1}\right)^2 > 0$ von m abgezogen wird. Somit ist $\left(a - \frac{1}{z-1}\right)^2 < m$ und m zwischen zwei Quadratzahlen eingeschlossen, welche weit näher bei einander liegen, als $(a-1)^2$ und a^2.

Wir haben die elegante Erörterung des Verfassers in ihren Grundgedanken angegeben. Ob unsere Leser gleich uns deren Künstlichkeit als antik zu verwerfen geneigt sein werden, müssen wir ihnen überlassen.

H. Hunrath hat in seinem unter allen Umständen, auch wenn man ihm nicht beipflichtet, sehr lesenswerten Programm noch mit manchen anderen Näherungsverfahren, so auch mit der Kreisrechnung der Griechen und der Inder sich beschäftigt. Unter diesen versucht er das berüchtigte $\pi = \sqrt{10}$ der Inder zu erklären. Brahmagupta, meint er, habe gewusst (Colebrooke pag 310, § 42), dass der Pfeil h_n, welcher zwischen der Seite s_n des Sehnen-n-Ecks und dem Kreisumfang sich befindet, durch die Formel $h_n = \frac{1}{2}\left[d - \sqrt{d^2 - s_n^2}\right]$, in welcher d den Kreisdurchmesser bedeutet, gegeben sein. Im Sechseck, wo $s_6 = \frac{1}{2}d$, wird $h_6 = \frac{d}{4}(2 - \sqrt{3}) = \frac{d}{12}$ unter der Voraussetzung $\sqrt{3} = \frac{5}{3}$. Da ferner offenbar $s_{12}^2 = h_6^2 + \frac{1}{4}s_6^2 = \frac{10}{144}d^2$, so ist $12\, s_{12} = d\sqrt{10}$ oder der Umfang des Sehnen-Zwölfecks ist als mit der Kreisperipherie zusammenfallend zu betrachten, um $\pi = \sqrt{10}$ zu erhalten. Die beiden Fragen, welche wir in dieser Beziehung aufwerfen würden, heissen erstlich: wie kommt man zu $\sqrt{3} = \frac{5}{3}$ und zweitens, welches Recht hat das Zwölfeck als mit der Kreisperipherie zusammenfallend betrachtet zu werden? Wir stellen die erste Frage unbeirrt dadurch, dass ein so vorzüglicher Gelehrter wie H. P. Tannery die auf keine bestimmt angegebene Stelle gegründete Behauptung ausgesprochen hat, $\sqrt{3} = \frac{5}{3}$ komme bei Heron vor.

CANTOR.

Die Maasse der Erdtheile nach Plinius von D. DETLEFSEN, Dir. Abhandlung zum Jahresbericht des Glückstädter Gymnasiums. Glückstadt 1883.

Die Hauptabsicht dieses Programmes geht dahin, einige Fehler zu verbessern, welche in der Pliniusausgabe des Verfassers enthalten sind. Ihm war bei deren Fertigstellung nicht bekannt, dass wesentliche Fragmente der griechischen Quellenschriftsteller, Artemidor von Ephesus und Isidor von Charax, deren Plinius in seinen geographischen Angaben sich bediente, in der Ursprache erhalten sind, zwar nicht unmittelbar, aber mittelbar durch Auszüge bei späteren Geographen, Agathemerus und Marcian, welche Müller (Geogr. gr. min. 1, CXXIX flgg., 2, XLI flgg.) im Drucke veröffentlicht und zur Berichtigung verderbter Stellen des Plinius verwerthet hat. H. Detlefsen nimmt die meisten Berichtigungen jenes Gelehrten ohne Weiteres an, bei anderen begründet er seine abweichende Meinung. Er gelangt dabei zu der Ueberzeugung, Plinius habe, wo er die Grössenverhältnisse der drei Erdtheile Europa,

Afrika, Asien schildert, nicht deren volle Ausdehnung im Sinne gehabt; er habe vielmehr nur anzugeben beabsichtigt, wie weit überall die römische Herrschaft vorgedrungen sei (S. 16). Plinius bediente sich bei Schätzung jener Flächen des falschen Grundgedankens, den wir (Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I, 146—147) geschichtlich zu verfolgen gesucht haben; er hält die Flächen für proportional dem Umfange (S. 6). Wohl möglich, dass Quintilian, der Zeitgenosse des Plinius, diese Stelle im Sinne hatte, wo er jenes Verfahren als irrig zu geisseln für nöthig hält. Für den Mathematiker ist der Nachweis von Wichtigkeit, welcher (S. 1) aus den Handschriften des Plinius geführt wird, dass bei diesem Schriftsteller eine Multiplication mit 100000 (vorausgesetzt, dass der andere Factor grösser als 10 ist) durch Einschliessung zwischen zwei Verticalstrichen und einem Horizontalstrich bezeichnet wird, mithin |LII| $\overline{\text{XV}}$ D = 5215500 ist. Wenn H. Detlefsen dabei unsere Angaben in den Mathem. Beiträgen S. 162 flgg. als völlig ungenügend und meist falsch bezeichnet, so hätte es vielleicht der Billigkeit entsprochen, wenn er zugleich auf unsere Vorl. Gesch. Math. I, 444 verwiesen hätte, wo wir selbst erklären, eine Uebereinstimmung in der Auffassung der einzelnen Stellen sei bei den einzelnen Schriftstellern, unter welchen wir insbesondere Th. H. Martin und Friedlein neben unseren Math. Beitr. nannten, nicht vorhanden. Jedenfalls aber wäre es erwünscht gewesen, durch H. Detlefsen selbst eine vollauf genügende und unbedingt richtige Darstellung des römischen Zahlenschreibens grosser Zahlen zu erhalten. Will er eine solche auf einigen Seiten veröffentlichen, so steht ihm unsere Zeitschrift zu diesem Zwecke sehr gern offen. — Ein sehr sinnentstellender Druckfehler ist S. 7 des Programmes stehen geblieben: Stammbrüche haben die 1 als Zähler, nicht als Nenner. Auch formell als Gleichungen geschriebene, wenn auch nicht als solche gedachte Zahlenverbindungen auf der gleichen Seite, wie $\frac{11}{24} = \frac{913}{936}$, wo gemeint ist, $\frac{11}{24} \cdot \frac{83}{39} = \frac{913}{936}$, stören das Auge des mathematischen Lesers in empfindlicher Weise.

CANTOR.

Nicolaus Coppernicus von LEOPOLD PROWE. Erster Band: Das Leben. I. Theil 1473—1512 (XXVIII, 413 S.), II. Theil 1512—1543 (576 S.) Berlin, Weidmann'sche Buchhandlung. 1883.

Endlich! Mit diesem Worte wurde wohl ziemlich allgemein das Erscheinen des Werkes begrüsst, welches Jahre, um nicht zu sagen Jahrzehnte, lang erwartet, eine schier sagenartige geheime Existenz geführt hatte, an die zu glauben man nicht mehr recht wagte. Endlich aber ist es der Oeffentlichkeit übergeben, die mit strengem Maasse zu prüfen pflegt, ob es sich wirklich lohnte, in so gespannter Erwartung dem Werke entgegenzuharren. Wir sind nicht zweifelhaft, dass diese Prüfung ein all-

seitiges Ja als Ergebniss liefern wird. Herr Prowe hat durch die mancherlei Einzeluntersuchungen, die er in Druck gab, selbst dazu beigetragen, dass man Bedeutendes von ihm verlangte. Er hat, nach meiner Ueberzeugung, dieses Verlangen mehr als nur erfüllt. Die Kenntniss des Lebens des Reformators der Sternkunde war im Laufe der Zeiten eine immer weniger gesicherte geworden. Seit Gassendi mit gewissenhafter Prüfung des damals Vorhandenen eine Lebensskizze des Coppernicus gab, deren Treue man erst jetzt zu würdigen gelernt hat, ist von Schriftsteller zu Schriftsteller ein Rückschritt eingetreten. Vergesslichkeit auf der einen Seite, absichtsvolle Legendenbildung auf der andern Seite vereinigten sich zu diesem unerwünschten Ergebnisse. Da waren es einige Forscher aus der nächsten Umgebung von des Coppernicus Geburts- und Wohnstätte, welche mit emsiger Mühe theils wiederherzustellen, theils auszutilgen trachteten, was Sorglosigkeit und Absicht in beiden Richtungen gesündigt hatten. Herr Prowe war der Besten Einer unter diesen Forschern. Kaum eine Zeit aus dem langen Leben seines Helden hat er in seinen Einzeluntersuchungen unberührt gelassen, und manche Fragen, von denen man nicht wusste, dass Herr Prowe sich ihrer Lösung zugewandt hatte, zeugen in ihrer heutigen Behandlung dafür, dass der Verfasser haushälterisch mit seinen Theilveröffentlichungen verfahren ist. Auch wer der seitherigen Literatur des Gegenstandes nichts weniger als fremd gegenübersteht, wird einer Fülle von neuen Ergebnissen insbesondere in dem II. Theile des soeben erschienenen Bandes begegnen, Ergebnisse, welche Herr Prowe sein eigenstes Eigenthum nennen darf. Wo und was Coppernicus in Italien studirte, welche Bekanntschaften er dort anknüpfen konnte und wahrscheinlich anknüpfte, das sind Fragen, an deren Beantwortung auch italienische Gelehrte, und zwar diese in erster Linie, mitgearbeitet haben; aber das Leben des Coppernicus als Domherr in der Heimath, seine wechselvolle Thätigkeit in Heilsberg, in Frauenburg, in Allenstein, seine Beziehungen zu den Verwandten mit Einschluss einer etwas zweifelhaften Anna Schillings, zu den aufeinander folgenden Bischöfen, die Anfeindungen, denen Coppernicus in höherem Alter sich ausgesetzt sah, das Alles gehört in seiner Aufklärung den nordischen Schriftstellern an, zu dem Allen hat Herr Prowe sein redliches Theil und mehr als das beigetragen. Allerdings war dazu eine tiefgehende Kenntniss der örtlichen, staatlichen und kirchlichen Verhältnisse so nothwendig, dass nicht einmal der Leser deren entbehren kann. Herr Prowe musste darum mit dem Leben seines Helden eine genaue Geschichte von dessen Heimath verbinden. Hier ist der einzige Punkt, wo wir nicht rein lobend berichten können. Herr Prowe hat Vieles, für unsern Geschmack viel zu Vieles in die Anmerkungen verwiesen, und das erschwert das Lesen des Buches. Wir hätten gewünscht, nur das eigentliche gelehrte Rüstzeug in die Anmerkungen gesammelt, dagegen die Folgerungen in den Text eingeflochten zu sehen. Wir wissen

wohl, wieviel leichter es ist, einen solchen Wunsch auszusprechen, als zu erfüllen; aber dass wir ihn aussprechen, möge Herrn Prowe beweisen, dass wir seiner Geschicklichkeit das Zutrauen schenken, auch sehr Schwieriges leisten zu können. Es sollte uns ungemein freuen, wenn der geehrte Verfasser in den noch ausstehenden Theilen seines Werkes diesen unsern Wunsch beherzigen möchte, sei es auf Kosten einer gewissen Gleichmässigkeit des Ganzen.

Cantor.

Antonio Favaro, **Galileo Galilei e lo studio di Padova.** Vol. I (XVI, 469 pag.) & II (XI, 520 pag.). Firenze 1883. Successori Le Monnier.

Hat der Verfasser schon häufig in weniger umfangreichen Einzelschriften sich mit früher unbeachteten oder verkannten Theilen der Lebensgeschichte Galilei's beschäftigt, so bietet er uns gegenwärtig allerdings auch nur ein Bruchstück, sofern wir beachten, dass Galilei's Leben ausschliesslich in der Zeit seines Paduaner Aufenthaltes den Vorwurf der beiden starken Bände bildet; aber innerhalb dieser Zeit haben wir ein Ganzes vor uns, die Vereinigung alles Dessen, was der auf diesem Gebiete so hervorragende Gelehrte selbst, was andere Forscher in den letzten Jahrzehnten ans Licht gebracht haben, und in Verbindung damit viel mehr Neues, als man bei der regen Theilnahme an den Galilei-Studien erwarten durfte. Insbesondere die den II. Band zur grösseren Hälfte füllende Sammlung von Documenten wimmelt von solchen, die zum ersten Male der Oeffentlichkeit übergeben werden, und die neben der Ausbeute, welche H. Favaro aus ihnen zu ziehen — sagen wir lieber besonders hervorzuheben — wusste, noch genug des interessanten Stoffes bieten, um auch solchen Schriftstellern zu dienen, welche einen andern Gegenstand als Galilei's Leben und Wirken, als die Schilderung seiner Zeitgenossen, soweit sie zu ihm in persönliche Beziehung traten, zu bearbeiten wünschen. Die ganze Gelehrtengeschichte Italiens um die Wende des XVI. zum XVII. Jahrhundert hat Herr Favaro in sein Werk hineinziehen müssen, hineinzuziehen gewusst, und er hat bei Herbeischaffung, bei Anordnung, bei Darstellung des überreichen Stoffes die verschiedensten Tugenden bewährt, welche der Geschichtsschreiber sich aneignen muss: Fleiss, Klarheit, Geschmack. Fügen wir hinzu, dass ein drei Druckbogen starkes vorzügliches Namens- und Inhaltsverzeichniss auch das Nachschlagen in dem Werke so sehr erleichtert, als wir es überhaupt für möglich halten, so glauben wir unseren Lesern den allgemeinen Eindruck wiedergespiegelt zu haben, welches das Werk auf uns gemacht hat.

Unsere Leser sind berechtigt, mehr von uns zu fordern, eine wenn auch noch so gedrängte Inhaltsangabe. Freilich dürfte diesem Verlangen

in der vorangehenden allgemeinen Würdigung bereits nahezu genügt sein. Haben wir doch schon gesagt, um welche Zeit, um welchen Ort es sich handelt. Die Universität Padua wird uns eingehend geschildert. Wir lernen ihre Lehrer, ihre Schüler kennen; Lehrer, die sich nahestehen, die sich befeinden; Schüler, die studiren, die nicht studiren; man ist oft zur Frage geneigt, ob es wirklich um italienische Zustände sich handelt und um eine fast 300 Jahre zurückliegende Zeit! Auch die 28 ersten Lebensjahre Galilei's sind uns vorher in flüchtiger Weise vorübergeführt worden, und nun erscheint der noch junge Gelehrte auf der Bühne, mit welcher wir so genau bekannt geworden sind. Er ist im ersten gährenden Eifer des Schaffens und Lehrens, bedeutend genug, Grosses zu leisten, noch nicht bedeutend genug, sich von seinen Leistungen welche verkümmern oder gar rauben zu sehen. Kein Wunder, wenn fast um jede der Arbeiten, welche Galilei rasch nach einander fördert, Streitigkeiten der heftigsten, unerquicklichsten Art entstehen, in welchen Schriftstücke der Gegner selbst und ihrer Freunde unter wirklichen und angenommenen Namen an die Oeffentlichkeit gelangen, welche oftmals in ihrem Tone an die berüchtigten Streitschriften erinnern, die einige Jahrzehnte früher zwischen Tartaglia und Ferrari gewechselt wurden. Es war so damalige Unart der Gelehrten! Ueberdies darf nicht übersehen werden, dass Galilei ein leidenschaftlicher Sohn des Südens war, leichtlebig im privaten Verkehre, auch leicht zu aufbrausendem Zorne hinneigend. Der Aufenthalt in Padua hat dem Proportionalzirkel, dem Fernrohr und den wichtigsten Entdeckungen durch dasselbe, hat wärmemessenden Versuchen das Dasein gegeben; dort bereiteten sich die berühmten Gespräche über die Mechanik vor, dort Arbeiten über die Lehre von den Indivisibilien, welche leider nie veröffentlicht worden sind; aber dort wirkte auch noch Galilei als Astrolog, als Vertreter astronomischer Lehren antikopernikanischer Richtung; dort entzweite sich der frühere Freund hervorragender Jesuiten mit anderen Mitgliedern des mächtigen Ordens, Feindseligkeiten heraufbeschwörend, die verhängnissvoll in sein späteres Leben eingriffen. So grosse forschende und schriftstellerische Thätigkeit liess sich mit den Pflichten eines gewissenhaften Lehrers nicht vereinigt durchführen. Galilei suchte eine Stellung, welche ihn von den letzteren befreite. Er fand sie bei dem Fürsten seiner engeren Heimath; er verliess Padua. Das ist in aller Kürze der Ideengang der uns vorliegenden Bände. Auf Einzelheiten einzugehen, verzichten wir umsomehr, als wir hoffen, durch unsere Anzeige Leser für das Originalwerk selbst gewonnen zu haben.

Cantor.

Intorno alla vita et ai lavori di Antonio Carlo Marcellino Poullet-Delisle. Notizie raccolte da B. Boncompagni. Roma 1883. 11 pag. 4°.

Dass Poullet-Delisle schon 1807, also zu einer Zeit, zu welcher die zahlentheoretischen Arbeiten von Gauss in Deutschland selbst kaum gewürdigt, geschweige denn verstanden wurden, dessen Disquisitiones arithmethicae in das Französische übersetzte, ist wohl ziemlich allgemein bekannt. Die persönlichen Verhältnisse des Uebersetzers dagegen waren bisher so im Dunkeln, dass selbst sein Name in keinem der biographischen Hilfswerke unserer Zeit vorkommt. Fürst Boncompagni hat die für sein Leben wichtigen Daten zu ermitteln gewusst und die betreffende Abhandlung ausser in seinem Bullettino auch in einem uns vorliegenden Sonderabzug veröffentlicht. Es geht daraus hervor, dass Poullet-Delisle am 17. Januar 1778 geboren ist und am 23. August 1849 starb. Er war zuletzt mit der Aufsicht über das Schulwesen betraut.

Cantor.

Atti di nascita e di morte di Pietro Simone Marchese di Laplace pubblicati da B. Boncompagni. Roma, Tipografia delle scienze matematiche e fisiche. 1883. 22 S.

Fürst Boncompagni hat es schon mehrmals unternommen, über die Personalien hervorragender Mathematiker, wenn erstere noch nicht hinlänglich aufgeklärt waren, durch seine Forschungen Licht zu verbreiten; wir erinnern nur an seine aus mühevollster Arbeit erwachsenen Abhandlungen über die Familie Fagnano und über das Testament des Tartaglia. Der Schöpfer der „Mécanique céleste“ gehört einer noch nicht so gar lange hinter uns liegenden Zeit an, und man dürfte erwarten, dass die Daten seiner Geburt und seines Todes mit vollster Genauigkeit ermittelt wären. Auffälligerweise ist dem jedoch nicht so. Mit jener Bücherkenntniss, die nur ihm allein eigen ist, hat nun der Verf. in der vorliegenden Abhandlung, einem Separatabdruck aus dem von ihm herausgegebenen „Bullettino“, nicht weniger als fünfundsechzig Artikel und Schriften zusammengestellt, in denen biographische Angaben über Laplace enthalten sind, und diese Angaben unter einander verglichen. Diese Statistik lieferte folgende Resultate. 15 Mal wird der Geburtstag, 8 Mal der Todestag verschwiegen; 24 Mal der erstere, 19 Mal der letztere unrichtig angegeben, 26 Mal der erstere und 38 Mal der letztere richtig. Man sieht, dass die Literaten den anderen Schriftstellern, welche für gelegentliche Zwecke biographisches Material wünschen, dieses durchaus nicht mit der Akribie an die Hand geben, welche man zu fordern berechtigt wäre, und man muss Herrn Boncompagni zu Dank verpflichtet sein für die von ihm bewirkte Mittheilung der jede Ungewissheit beseitigenden authentischen Schriftstücke. Das Taufzeugniss befindet sich zur Zeit im Archiv der Bürgermeisterei von Beaumont und besagt, dass am 25. März 1749 der — zwei Tage vorher geborne —

Sohn des Pierre Laplace und der Marie Anne geb. Sochon getauft worden sei. Ausführlicher ist aus naheliegenden Gründen das von der Präfectur des Seine-Departements aufbewahrte Sterbeprotokoll: Am 5. März 1827 verschied in seinem Pariser Hause (Rue du Bac, Nr. 100) der Marquis, Akademiker und Pair des Königreiches Pierre Simon De La Place. Mögen künftige Geschichtsschreiber Herrn Boncompagni's Arbeit dadurch lohnen, dass sie von deren Resultaten gebührend Notiz nehmen!

Ansbach. Dr. S. Günther.

Ueber die Principien der neueren Hydrodynamik von Dr. Rich. Reiff, Repetent am math. Sem. der Univ. Tübingen. Freiburg und Tübingen, akad. Verlagsbuchhdlg. von Mohr, 1882.

Auch wer im Besitze der Kirchhoff'schen Vorlesungen über Menik ist, aber die in vielen Zeitschriften zerstreute ältere und neueste Literatur nicht zusammensuchen kann oder will, wird in obigem Schriftchen eine Anregung finden. Dazu ist aber wünschenswerth, dass eine allenfallsige zweite Auflage von einigen Schlacken befreit werde; die ich namhaft machen will.

Im § 1 (die allg. Gleichungen der relativen Bewegung) handelt der erste Theil von der linearen Dilatation, der zweite von der Rotation. Es wird ein Linienelement l mit der Winkelgeschwindigkeit ε rotiren gelassen und der doppelte Flächeninhalt der mit dem Radius 1 in der Zeit dt beschriebene Sector εdt auf die 3 Tafeln projicirt. Der Verfasser nennt $\vartheta\, dt$, ιdt, $\varkappa dt$ diese Projectionen des Sectors. Dann sind aber ϑ, ι, $\varkappa$ nicht auch die Projectionen von ε, wie Verfasser aus Versehen annimmt. Da sich die Folgen hiervon auf den Schluss von § 1 und auf § 3 erstrecken, so muss ich dies näher auseinandersetzen.

Die erste Projection von εdt bezeichne ich, abweichend vom Verfasser, mit $\vartheta' dt$, um die erste Projection von ε, mit ihm übereinstimmend, ϑ nennen zu können. Dann ist

$$\vartheta' dt = \vartheta\, dt\, \sqrt{1-\alpha^2}\,.\,\sqrt{1-\alpha_1^2}$$

und analog

$$\iota' dt = \iota\, dt\, \sqrt{1-\beta^2}\,.\,\sqrt{1-\beta_1^2},$$

$$\varkappa' dt = \varkappa\, dt\, \sqrt{1-\gamma^2}\,.\,\sqrt{1-\gamma_1^2},$$

wenn α, β, γ und α_1, β_1, γ_1, die Richtungscosinusse von l vor und nach der Rotation darstellen. Sind α_1, β_1, γ_1 wenig von α, β, γ verschieden, so kommt

$$\vartheta' = \vartheta\,(1-\alpha^2) \quad \iota' = \iota\,(1-\beta^2) \quad \varkappa' = \varkappa\,(1-\gamma^2).^{*})$$

---

* Dies fand Dr. W. Braun dahier, von dem ich hernach das Schriftchen entlehnte.

Also wo **Reiff** fürderhin $\vartheta, \iota, \varkappa$ schreibt, möge der Leser die Indices (′) setzen. Dadurch wird das erste der beiden Schlussresultate des § 1 illusorisch und bleibt nur das zweite, die Umkehrung des ersten, bestehen, lautend: Die Gleichungen V können zur Berechnung von ϑ', ι', $\varkappa'$ dienen, wenn α, β, γ gegeben sind. Alsdann kann man nach den vorhin angegebenen Gleichungen auch ϑ, ι, $\varkappa$ berechnen.

§ 2 handelt von der Dilatation, § 3 wieder von der Rotation. Der letztere beginnt gleich mit folgendem Fehler:

„Angenommen, das Flüssigkeitstheilchen rotire mit einer Geschwindigkeit, deren Componenten χ, ψ, ω seinen etc." Verfasser findet die Gleichungen (15), in welchen ebenfalls die obigen Factoren $(1-\alpha^2)$, $(1-\beta^2)$, $(1-\gamma^2)$ beizusetzen und überdies noch je ein Minus-Zeichen fehlt. Alsdann heisst es: „Sollte dem Flüssigkeitstheilchen eine bestimmte Rotation zugeschrieben werden können, so müssten die Gleichungen IV die Stelle der Gleichungen (15) haben etc." Nun, diese haben sie auch wirklich; man findet nämlich aus der Identificirung der beiden genannten Gleichungssysteme

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

und

$$\chi=\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right),\quad \psi=\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right),\quad \omega=\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

wie vorhergesehen werden konnte.

Im späteren Verlaufe des § 3 sind dann wieder statt $\vartheta\iota\varkappa$ die oben gezeigten $\vartheta', \iota', \varkappa'$ einzusetzen und es wird deshalb die vom Verfasser vorgenommene Identificirung der Gleichungen (12) und (13) mit V und VI unmöglich. Man erkennt dies auch an dem Resultate, den Gleichungen (18), welche für $\vartheta, \iota, \varkappa$ die Differenzen, wie ich sie gerade für χ, ψ, ω gegeben habe, aber mit verkehrten Zeichen, liefern würden.

In den Gleichungen (19), (20), (21) muss man wieder beziehungsweise die Factoren $(1-\alpha^2)$, $(1-\beta^2)$, $1-\gamma^2)$ beisetzen. Desgleichen in (22), wo auch in Consequenz von (15) das Minus-Zeichen fehlt. Da denkt sich Verfasser „dem Flüssigkeitstheilchen eine gleichmässige Rotation ertheilt, deren Componenten Θ, I, K seien", und findet dann, wie natürlich, für letztere wieder obige Differenzen, aber mit dem entgegengesetzten Zeichen.

Solche müssen auch im letzten Paragraphen, § 4, der die Combination der rein rotatorischen Bewegung mit der Potentialbewegung zur Ueberschrift hat, öftere Male eingesetzt werden.

Wir glaubten zu diesen Bemerkungen uns berechtigt, auch nachdem H. **Reiff**'s Dissertation im vorigen Bande S. 228 bereits angezeigt ist,

und fügen nur noch bei, dass selbstverständlich im festen Körper alle Theilchen sich um dieselbe Momentanaxe drehen, was beim flüssigen Körper im Allgemeinen nicht der Fall ist.

KURZ.

Ein neues Gesetz von GROSHANS, deutsch von ROTH. Leipzig, 1882. 80 S.

Der Verfasser (Jurist) stellt Resultate langjähriger Studien über allgemeine physikalische Gesetze, die von der chemischen Zusammensetzung abhängen, dar. In bestimmten Gruppen flüssiger organischer Verbindungen verhalten sich die Dichten (gemessen beim Siedepunkt) wie die Atomsumme der Verbindungen. Die Gruppen sind solche, bei denen die Formeln nur wenig verschieden sind. Im ersten Capitel werden einzelne Beispiele gegeben; in den folgenden wird die Anwendung nach verschiedenen Richtungen hin untersucht, so auf wässerige Lösungen, auf andere als organische Verbindungen u. s. w. Zum Schluss werden einzelne anscheinende Widersprüche gegen das neue Gesetz betrachtet.

P. ZECH.

Die Bewegungen im Sonnenraume, von FÖHRE. Dresden 1882. 128 S.

Eine der Schriften, welche mit den heutigen Anschauungen über die Bewegung der Himmelskörper nicht einverstanden sind. Wie gewöhnlich geht der Verfasser von einer „allgemein verbreiteten Theorie“ aus, die nicht richtig sein könne und die in der That auch von keinem Astronomen angenommen ist: es soll nämlich die Bewegung der Planeten hervorgebracht sein durch zwei Kräfte, die Anziehung und die Fliehkraft oder Tangentialkraft, welche letztere die Planeten in der Richtung der Tangente fortstosse! An die Stelle dieser falschen Theorie wird die spiralige Bewegung des Aetherstroms gesetzt, der die Planeten mitnimmt, jedem Planeten eine Raumspirale zugewiesen, die aus der Sonnenspirale entsteht, und mit diesen Spiralen gerechnet. Was für Formeln dabei entstehen, möge in dem Werke selbst nachgesehen werden, eine mathematische Kritik derselben ist unmöglich.

P. ZECH.

Sta, Sol, ne moveare, von TISCHNER. Leipzig. 5 kleine Hefte, zusammen 240 S.

Der Verfasser behauptet, dass die bei ruhend angenommener Sonne geltenden Gesetze der Planetenbewegungen ihre Geltung verlieren, wenn sich die Sonne bewege. Es ist ihm also nur der Rath zu geben, zuerst die Sätze über relative und absolute Bewegung sich klar zu machen, ehe er die Gesetze von Kopernik, Kepler und Newton umstossen will.

P. ZECH.

Handbuch der nautischen Instrumente. Vom hydrographischen Amte der Admiralität. Berlin, 1882. Mittler & Sohn. 432 Seiten.

Eine Beschreibung der Instrumente und Apparate, welche zur Zeit bei der deutschen Marine in Gebrauch sind, dem praktischen Bedürfniss angepasst. Der erste Abschnitt behandelt das Fernrohr und seine Hilfsinstrumente, beginnt mit den Grundgesetzen der Dioptrik, wie sie gewöhnlich in unseren Lehrbüchern dargestellt werden, betrachtet dann das astronomische Fernrohr nach seinen einzelnen Theilen, sowie seine Prüfung, ferner kurz das Galilei'sche Fernrohr, die Ablesevorrichtungen, das Niveau, den künstlichen Horizont und das Heliotrop. Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit den meteorologischen Instrumenten, zunächst mit den verschiedenen Constructionen und Correctionen des Barometers. Unter den Aneroiden werden die von Naudet, Bourdon und Goldschmid aufgeführt, die Feststellung der Constanten und die Höhenmessung an Beispielen erläutert. Dann folgt Thermometer, Hydrometer und Anemometer, Regen- und Verdunstungsmesser nebst einer Anzahl meteorologischer Tabellen. Der dritte Abschnitt ist oceanischen Beobachtungen gewidmet, besonders dem Lothen, der vierte den Compassen und magnetischen Instrumenten, mit besonderer Berücksichtigung der Einwirkung des Schiffskörpers auf die Magnetnadel. Der fünfte Abschnitt giebt die Beschreibung der Winkelinstrumente ohne Statif, Sextanten und Mikrometerfernrohre. Am ausführlichsten wird der Natur der Sache nach der Sextant behandelt, insbesondere die Fehler desselben, welche von der Stellung des Fernrohrs und der Spiegel herrühren. Ihr Einfluss auf den gemessenen Winkel wird in Zahlen gegeben und die Art der Correctur bestimmt. Auch die prismatische Gestalt der Spiegelgläser findet Berücksichtigung; der Fehler der Excentricität wird an einem Beispiel ausdrücklich erläutert. Weniger eingehend ist der Reflexionskreis behandelt; er scheint in der Praxis selten gebraucht zu werden. Bei Theodolit und Universalinstrument dienen kleinere Instrumente als Beispiele, es wird hauptsächlich die Meridianbestimmung und die Anstellung von Durchgangsbeobachtungen behandelt.

Eine Reihe von Tafeln, verschiedene Apparate und Instrumente darstellend, und eine grössere Zahl von Holzschnitten, mit grosser Sorgfalt ausgeführt, zieren das Werk.

P. Zech.

Tafeln zur Berechnung der Mondsphasen von Paul Lehmann, vom preussischen statistischen Bureau herausgegeben. Berlin 1882. 78 Seiten.

Es liegen den Tafeln die Arbeiten von Hansen über den Mond zu Grunde; sie sollen selbst solchen, welchen grössere Uebung im Rechnen

abgeht, möglich machen, die Conjunctionen und Oppositionen des Mondes und die damit zusammenhängenden Finsternisse zu berechnen. (Der Verfasser ist Mitglied des Rechenbureaus der Berliner Sternwarte.) Die Genauigkeit, die mit den Tafeln erreicht wird, beträgt im Durchschnitt eine Minute Zeit, die Tafeln sind für vier Decimalstellen eingerichtet, die Berechnung geschieht durchweg mit vierstelligen Logarithmen. (Vor Kurzem ist eine ähnliche Arbeit von Th. v. Oppolzer durch die astronomische Gesellschaft publicirt worden, welche in der Berechnung eine Stelle weiter geht und geübte Rechner voraussetzt.) Die vollständige Berechnung einer Sonnenfinsterniss nach ihrem Verlauf auf der Erde lässt sich mit den Tafeln von Lehmann in wenigen Stunden durchführen.

P. Zech.

Strahlende Elektrodenmaterie von Dr. Puluj. Wien 1883. 86 Seiten.

Eine Zusammenstellung verschiedener Aufsätze, welche der Verfasser über den Durchgang der Elektricität durch einen sehr verdünnten Raum geschrieben hat (Crookes' Versuche). Einen vierten Aggregatzustand nach Crookes anzunehmen, hält der Verfasser für nicht nöthig, er sucht als wahrscheinlich nachzuweisen, dass die Materie, welche bei jenen Versuchen den dunkeln Raum füllt, aus mechanisch losgerissenen Elektrodentheilchen bestehe, welche mit statischer negativer Elektricität gefüllt sind und mit grosser Geschwindigkeit in gerader Richtung progressiv sich bewegen. Es werden verschiedene Versuche über Bewegungen, welche diese Elektrodenmaterie hervorbringt, beschrieben (besonders in Radiometern), und an der Hand jener Theorie zu erklären versucht.

P. Zech.

Elektricität und Magnetismus von James Clerk Maxwell, übersetzt von Dr. Weinstein. 2 Bände. 528 und 624 Seiten. Berlin 1883.

Das englische Original ist vor zehn Jahren erschienen, eine zweite Auflage im vorigen Jahre. Doch konnte Maxwell nur noch einen kleinen Theil derselben durchsehen, durch einen allzufrühen Tod wurde er der Wissenschaft entrissen. Im Gegensatz zu dem Werke von Wiedemann, das jetzt in dritter Auflage erscheint und wesentlich die Resultate des Experiments auf dem Gebiete der Elektricität kritisch sichtet, die mathematische Theorie nur, soweit es für diesen Zweck nöthig ist, behandelt, ist für das Werk von Maxwell die mathematische Behandlung Selbstzweck. Maxwell gilt als Autorität auf diesem Gebiete, seine elektromagnetische Theorie des Lichts, seine Darstellung der elektrischen Maasseinheiten und Anderes wird überall citirt. Aber die Art der Darstellung bringt vielfach Schwierigkeiten für das Verständniss. Es mag dies zu-

sammenhängen mit dem Bestreben Maxwell's, die Anschauungen Faraday's in mathematischen Ausdruck zu bringen. „Faraday", sagt Maxwell, „betrachtet einen Körper niemals für sich allein, er sieht nicht zwischen den Körpern weiter nichts als Distanzen und geht nicht von der Conception aus, als ob sie auf einander nach irgend einer Funtion ihrer Entfernungen von einander wirken. Der gesammte Raum ist ihm ein Kraftbereich, er spricht von den Kraftlinien wie von in gewissem Sinne Pertinenzstücken des Körpers. Ich glaube, er hat sagen wollen, dass der ganze Raum von vornherein voll von Kraftlinien ist und dass die magnetischen und elektrischen Wirkungen eines Körpers von den Kraftlinien abhängen, die an ihn anstossen." Diese Anschauung im Gegensatz zu der uns geläufigen Fernwirkung erschwert das Verständniss. Durch die Art der Uebersetzung, durch Erläuterungen und durch Quellenangaben erleichtert der Uebersetzer für den deutschen Studirenden die Ueberwindung jener Schwierigkeiten, und das ist zum mindesten ein grosses Verdienst zu nennen. Es wird den deutschen Studirenden näher gebracht, was in England in Mathematik und Elektricität durch Forscher, wie Green und Hamilton, Faraday und Thomson geschaffen und von Maxwell zusammengestellt und vielfach erweitert worden ist.

P. Zech.

Glaube und Aberglaube in der neuern Naturwissenschaft von Dr. Bolze. Danzig 1882. 43 S.

Was der Verfasser mit seinem Büchlein will, wird dem Leser nicht klar. Zuweilen scheint es, man habe es mit einer orthodoxen Opposition gegen die jetzige Naturwissenschaft zu thun. Dann wird aber wieder freie Forschung verlangt und Darwinismus als selbstverständlich behandelt, freilich auch wieder geklagt, dass man den Aether wie eine Gottheit feiere! Sonderbar erscheint uns, dass die jetzige Ruhe in der naturwissenschaftlichen Forschung beklagt und vom Verfasser gehofft wird, er werde diese Ruhe stören. Vielleicht liegt dem Ganzen ein tieferer Sinn unter, den wir nicht finden konnten? P. Zech.

Physikalische Aufgaben von H. Emsmann. 4. Auflage. Leipzig 1882. 287 S.

Schon die früheren Auflagen sind von verschiedener Seite als treffliche Hilfsmittel für das Verständniss der Physik anerkannt worden. In der vorliegenden neuen Auflage ist das Metersystem noch weiter als bisher durchgeführt worden (in den ersten Auflagen war das preussische Maasssystem angenommen). Die ersten 156 Seiten enthalten die Auf-

gaben, die Auflösungen nehmen 131 Seiten ein. Die Ausstattung lässt Manches zu wünschen übrig. Wenn ein Werk die vierte Auflage erreicht, wäre es wünschenswerth, Buchstaben und Zahlen übersichtlicher geordnet zu sehen und klarere Holzschnitte zu finden. (2. B. S. 104, 105 und 109; dann Fig. 32 und 34 u. s. w.)

P. Zech.

Beiträge zur mechanischen Wärmetheorie von Haeussler. Leipzig 1882. 76 S.

Der Verfasser ist mit dem heutigen Stand der kinetischen Gastheorie nicht zufrieden, er construirt sich eine besondere Anschauung, wonach die rotirende Bewegung der Massentheilchen bei starren Körpern das Gefühl der Wärme giebt, das Hinzutreten der oscillirenden Bewegung die Flüssigkeiten und das der fortschreitenden Bewegung die Gase charakterisirt. Darnach wird eine Gleichung aufgestellt, welche die Gesammtwärme eines Körpers darstellt. Vermittelst dieser Gleichung und einiger Gleichungen von Clausius für Vorgänge bei der Verdampfung findet sich dann, dass der absolute Nullpunkt der Temperatur nicht bei 273, sondern bei 162 Grad unter Null liege. Es sei dies einleuchtend, da für $t = -273$ das Gay-Lussac-Mariotte'sche Gesetz ein Volumen Null verlange, was keinen Sinn habe. Es scheint überhaupt der Verfasser Gleichungen aus den verschiedensten Gebieten zu combiniren, um neue Resultate zu erhalten. So wird Clausius vorgeworfen, dass seine Curve zur Darstellung der äussern Arbeit der Gase (die adiabatische Curve) mit den Zahlenangaben von Regnault über die Druckverhältnisse der atmosphärischen Luft nicht stimme. Es sollen freilich dadurch, erklärt der Verfasser freundlichst, die Clausius'schen Arbeiten nicht verurtheilt werden, sie behalten trotzdem ihren Werth als Bahnbrecher auf dem Gebiet der mechanischen Behandlung der Wärme.

P. Zech.

On the motion of a projectile in a resisting medium, by Greenhill. Woolwich 1882. 32 S.

Bei Lösung der Aufgabe wird angenommen, dass der Widerstand auf den Mittelpunkt des Projectils längs der Bahn wirke und der n^{ten} Potenz der Geschwindigkeit proportional sei. Es wird der Fall ($n = 3$) auf elliptische Functionen zurückgeführt, die zur Berechnung nöthigen Tafeln werden angefügt, unter beständiger Hinweisung auf „Bashforth, motion of projectiles“.

P. Zech.

Der Rotationsinductor von Dr. H. Weber. Leipzig 1882. 76 S.

Zur Bestimmung des Widerstandes in absolutem Maasse wird in neuerer Zeit vorzugsweise die Einwirkung einer rotirenden Drahtspule auf eine Magnetnadel benützt. Eine allgemeine Theorie der hierbei auftretenden Erscheinungen wird hier in möglichst elementarer Weise gegeben. Zuerst wird die Induction eines magnetischen Punkts auf einen Ring, der sich um eine seiner Ebene parallele Axe dreht, bestimmt und daraus die Induction durch den Erdmagnetismus abgeleitet. Dann wird nachgewiesen, dass ein Magnet keine Induction ausübt, wenn seine magnetische Axe mit der Drehaxe des Inductors zusammenfällt. Ueberhaupt ist die Induction Null, wenn die Ringebenen der Spule zu der durch die magnetische Axe und durch die Drehungsaxe des Inductors gelegten Ebene senkrecht stehen. In den darauf senkrechten Stellungen erreicht die Induction ein Maximum. Weber lässt daher seine Spule um eine horizontale Axe sich drehen, während das Comité der British Association die Drehung um eine verticale Axe anwendet, also ein Maximum der Induction der Magnetnadel auf die Spule erhält, welchem Uebelstand durch Kleinheit der Magnetnadel abgeholfen werden soll.

In Folge der Selbstinduction wird die Lage des Inductors, bei welcher die Induction durch den Erdmagnetismus ein Minimum oder Maximum wird, in der Richtung der Rotation verschoben, bei dem zur Messung benützten Inductor bis über sieben Grade. Es werden die Drehmomente bestimmt, welche bei gleichförmiger Rotation auftreten, die Gleichgewichtslage der Nadel bei rotirendem Inductor und, da die Ruhe nie streng eintritt, die Schwingungsgleichung. Die Windungen des Inductors werden durch ein äquivalentes System von Ringen in parallelen Ebenen ersetzt und das Potential der Spule berechnet. Zum Schlusse folgt die Beschreibung des Inductors und die gemachten Versuche. Als Mittelwerth ergiebt sich·

$$\text{Ohm} = 0{,}9877 \,.\, 10^{10} \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}$$

während die neuesten Versuche des englischen Comités (Lord Raleigh und Dr. Schuster) 0,9893 für den obigen Coefficienten geben.

P. Zech.

Uniplanar Kinematics of solids and fluids, by Minchin. Oxford 1882. 264 S.

Ein Lehrbuch der Mechanik der Ebene, welches neben der Theorie eine Reihe von Aufgaben behandelt. Hauptzweck des Buches ist, die Studirenden auf die neuen Theorien von Thomson, Maxwell u. s. w. vorzubereiten. Während Anfangs bei den starren Körpern der Inhalt von dem unserer deutschen Bücher nicht viel abweicht, wird bei der Elasticität und Flüssigkeit wesentlich anders verfahren. Im Capitel Ge-

schwindigkeit wird gleich anfangs die harmonische Bewegung (einfachste schwingende Bewegung), Fourier's Satz und die Zusammensetzung der Schwingungen behandelt. Dann folgt die relative Bewegung und die allgemeine Bewegung eines Körpers, wenn die Bewegungen aller seiner Punkte parallel mit einer Ebene vor sich gehen. Bei der Beschleunigung wird der Hodograph, die Centralbewegung, der Mittelpunkt der Beschleunigung und die Beschleunigungen verschiedener Ordnung dargestellt und der allgemeine Satz durchgeführt, dass jede einer Ebene parallele Bewegung durch das Rollen einer Curve auf einer andern ohne Gleiten hervorgebracht werden kann. Die erste Curve ist der Ort der Punkte im Körper, welche von Moment zu Moment keine Geschwindigkeit haben, die zweite ihr Ort im Raum. Es wird davon z. B. auf Amsler's Planimeter eine Anwendung gemacht. Dann kommt die Trägheitskraft (*vis inertiae* nach Newton, Masse mal Beschleunigung), das Princip von d'Alembert und die Energie. Im folgenden Capitel werden die kleinen Verschiebungen der Massentheilchen und die dadurch bedingte Formänderung der Körper behandelt, im sechsten Capitel die Flüssigkeiten. Sie werden definirt als Körper, bei deren Umformung der Druck auf ein ebenes Element stets normal zu diesem ist. Davon ausgehend werden die Stromlinien und die Niveaulinien besprochen. Es folgen die Sätze von den mehrfach verbundenen Räumen, von der Unveränderlichkeit der Wirbel und ihrem elektrischen Aequivalent, dann die linearen galvanischen Ströme, Ohm's und Kirchhoff's Gesetze. Endlich wird in einem Abschnitt über conjugirte Functionen speciell auf Maxwell's Buch vorzubereiten gesucht. Für Anfänger ist das Werk nicht berechnet, es bezeichnet die Zwischenstufe vor dem Studium der neuesten Methoden.

P. Zech.

Die Spectralanalyse von Dr. Schellen. Dritte Auflage. Zwei Bände und Atlas. 518 und 456 S. Braunschweig, Westermann.

Der Verfasser ist durch sein Bestreben, die Errungenschaften der Wissenschaft auf dem Gebiete der Physik den Gebildeten zugänglich zu machen, bekannt. Die vorliegende dritte Auflage der Spectralanalyse enthält in dem Atlas die Originalzeichnungen von Kirchhoff (mit Hofmann), Vogel und Angstrom über das Sonnenspectrum, in sehr correcter Weise copirt, dann die Photographien des Sonnenspectrums von Draper und Rutherford und den ultravioletten Theil nach Mascart und Cornu. Es ist damit ein Material durch diesen Atlas geboten, das, in den Originalwerken gesammelt, zum Mindesten das Zehnfache des ganzen Werkes kostet. Mit grosser Correctheit sind ferner im Anhang des ersten Bandes die Zahlen der Wellenlängen der Linien von Kirchhoff und Hofmann, ferner die von Angstrom und der Metalllinien von Thalen zusammengestellt. Die Zeichnungen der Spectralapparate

sind nach den besten vorhandenen Darstellungen gegeben, die Ausstattung des Ganzen nach Papier und Druck ist ausgezeichnet.

Was den Inhalt der zwei Bände betrifft, so beschäftigt sich der erste mit der Anwendung der Spectralanalyse auf irdische Stoffe, der zweite mit der Astrophysik. Nach einer Einleitung über die Quellen von Licht und Wärme wird die Brechung des Lichts und die Dispersion behandelt. Die Darstellung leidet hier an principiellen Fehlern, die man in einem derartigen Werke nicht gerne sieht. Wenn S. 59 gesagt ist, dass der Aether, wie die Luft, in regelmässige Erschütterungen versetzt werde derart, dass sich die Phasen der Verdichtung und der nachfolgenden Verdünnung in gleichen Zeitabschnitten regelmässig wiederholen, so ist damit die fundamentale Eigenschaft des Aethers, welche in der Unzusammendrückbarkeit besteht, ignorirt. Leider zieht sich diese falsche Anschauung der Aetherschwingungen durch das ganze Buch: Schall und Licht sollen nur quantitativ verschieden sein. Damit hängt zusammen, dass ein scharfer Unterschied zwischen Geschwindigkeit der Aethertheilchen in ihren Schwingungen und Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwingungen nicht gemacht wird. In Folge dessen wird es dem Verfasser schwer, eine scharfe Definition der Farben und des Grundes ihrer verschiedenen Brechbarkeit zu geben. So wird der Satz (S. 87), dass die Ursache der verschiedenen Farben eine nothwendige Folge der ungleichen Geschwindigkeit der Aetherschwingungen sei, vom Leser, der Belehrung suchen will, falsch verstanden, und gleich nachher wird eine Wellenlänge wieder als Abstand zweier auf einander folgender Aetherverdichtungen dargestellt. Bei dem Versuch, die leuchtenden, wärmenden und chemischen Wirkungen der Aetherschwingungen zu trennen (S. 406), wird sogar direct gesagt, dass die Verschiedenheit von der Geschwindigkeit der oscillirenden Theile abhänge! Jener Versuch misslingt in Folge dieser Unklarheit vollständig. Erst S. 173 wird bestimmt von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwingungen gesprochen; aber auch hier muss statt eines logischen Schlusses das Wort „offenbar" zu dem Zusammenhang zwischen Schwingungszahl, Wellenlänge und Fortpflanzungsgeschwindigkeit helfen. Auch bei der Beugung treten eigenthümliche Behauptungen auf. Der § 36 bezieht sich, wie am Schluss ausdrücklich gesagt ist, nur auf einfarbiges Licht; da die Fraunhoferschen Linien kein Licht geben, so können sie nicht zur Beleuchtung des Spalts dienen, also könne auch bei einem Spalt ihre Wellenlänge nicht bestimmt werden, dazu brauche man Gitter (S. 208). Soll hier wirklich ein principieller Unterschied zwischen Spalt und Gitter gemeint sein? Und wenn dann (S. 209) die Sinus der Beugungswinkel der verschiedenen Bilder eines homogenen Lichtbüschels den Vielfachen der Wellenlängen dieses Lichts porportional gefunden werden, darf man nachher fortfahren: für jede Farbe wächst also die Wellenlänge proportional mit dem Sinus des Beugungswinkels?

Wir könnten noch verschiedene Beispiele anführen, welche nachweisen, dass neben dem wirklich guten beschreibenden Theil des Werkes das rein Theoretische verfehlt ist.

Im zweiten Band wird zunächst die Anwendung der Spectralanalyse auf die Sonne behandelt. Der Verfasser ist mit diesem Gebiete durch seine Bearbeitung des Werkes von Secchi wohl vertraut. Es werden vornehmlich die Beobachtungen bei Sonnenfinsternissen, die Spectra der Protuberanzen, der Corona und der Chromosphäre dargestellt und die Verschiebung der Spectrallinien in Folge der Bewegung der Lichtquelle betrachtet. Auch hier würde Alles klarer, wenn von früher her feststände, dass die Farbe von der Schwingungsdauer abhängt: die Bewegung der Lichtquelle gegen den Beobachter oder von demselben weg kann diese Dauer nicht ändern, weil eine Bewegung eine senkrecht dazu vorgehende nicht ändert; wohl aber ändert sie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Also bleibt die Farbe, aber die Brechbarkeit ändert sich.

Es folgt dann eine Beschreibung der Sternspectroskope, eine Zusammenstellung der Beobachtungen der Spectra des Monds und der Planeten und in einer besonderen Abtheilung der Fixsterne mit den Typen Secchi's. Die Bewegungen der Fixsterne, wie sie aus dem Spectrum folgen, insbesondere eine Tabelle der Resultate der Greenwicher Sternwarte schliessen diesen Abschnitt. Es folgen dann noch die Spectra der Nebel, meist nach Huggins, der Kometen und Sternschnuppen, wobei der grosse Komet von Wells 1882 noch berücksichtigt ist, endlich des Zodiakallichts, des Nordlichts und der Blitze.

Man sieht aus dieser kurzen Angabe, wie reichhaltig die Sammlung der astrospectralanalytischen Beobachtungen ist. Ein Sachregister von mehr als 9 Seiten schliesst das Werk, erleichtert sehr die Orientirung und erhöht seinen Werth als Nachschlagebuch.

P. Zech.

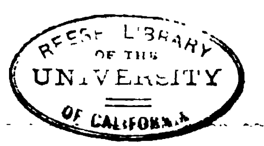
Das Mikroskop und seine Anwendung von Dr. Leopold Dippel. Braunschweig, Vieweg. 1882. Erster Theil. Handbuch der allgemeinen Mikroskopie. 736 S. Zweite Auflage.

Im letzten literarischen Bericht wurde die erste Abtheilung des ersten Theils kurz angezeigt. Seitdem ist auch die zweite Abtheilung erschienen und damit die allgemeine Mikroskopie abgeschlossen, insbesondere die optische Theorie des Mikroskops. Neu ist an dieser Auflage, dass die verschiedenen Abhandlungen von Abbe über das Mikroskop eingehend benützt sind. Abbe hat zur Darstellung der optischen Vorgänge im Mikroskop die Gauss'schen Sätze über Brennpunkte und Hauptebenen für seine Zwecke modificirt. An die Stelle der Hauptebenen tritt das Verhältniss der Tangenten der Winkel, unter welchen von den Brenn-

punkten aus Gegenstand und Bild gesehen werden. Damit wird vermieden, von blos „ideellen Punkten und Ebenen" sprechen zu müssen, es schliessen sich die Entwickelungen unmittelbar an die beobachtbaren Elemente des optischen Systems an, und da die Oeffnung der Strahlenkegel eine grosse Rolle beim Mikroskop spielen, so ist die Einführung von Winkeln von Vortheil. Der Brechungsquotient wird in anderer Bedeutung als gewöhnlich eingeführt, für jede Substanz im Verhältniss zum leeren Raum, es fehlt eine genaue Angabe hierüber. Nach Aufstellung der einfachsten Grundgesetze werden die Formeln für Linsen und Linsensysteme entwickelt und die Theorie der Achromasie gegeben.

Die Achromasie beim Mikroskop ist nur eine theilweise; beim Objectiv ist nur verlangt, dass die vorderen Brennpunkte der verschiedenen Farben zusammenfallen. Sind dabei die Brennweiten verschieden, so greifen allerdings die blauen Bilder über die rothen über; aber in der Mitte stört dies nicht. Beim Ocular dagegen sucht man gleiche Brennweiten für die verschiedenen Farben zu erreichen, dann erscheinen die Bilder unter gleichem Gesichtswinkel, fallen aber nicht in dieselbe Ebene. Auch der Aplanatismus kann nur theilweise erreicht werden. Bei zugeordneten Punkten auf der Axe müssen die Sinus der Neigungswinkel der einfallenden und der zugeordneten austretenden Strahlen constantes Verhältniss haben. Die Begrenzung der Strahlenkegel, welche durch das Mikroskop gehen, geschieht nach Abbe durch zwei zur Axe senkrechte Kreise, deren Mittelpunkte auf der Axe liegen und denen er den Namen Eintrittspupille und Austrittspupille gegeben hat. Der eine ist dem andern conjugirt. Daraus ergiebt sich für die Oeffnung des Instruments, welche für Theorie und Praxis des Mikroskops von hoher Bedeutung ist, ein Zahlenausdruck, welcher von Abbe „numerische Apertur" genannt wird.

Bei weitem der interessanteste Theil des ganzen Werkes für den Theoretiker ist der zweite Abschnitt der Theorie der Bilderzeugung, der sich mit den Beugungserscheinungen beschäftigt, welche durch feine Structuren entstehen. Es wird gezeigt, dass hier die Aufgabe zu lösen ist, die Lichtwirkung zu bestimmen, welche ein beliebig gelegener, durch ein beugendes Object vor einem optischen System hindurchstrahlender leuchtender Punkt in der dem Objecte zugeordneten Ebene hervorbringt und zwar unter Berücksichtigung der Begrenzung, welche dabei das Beugungsspectrum innerhalb der Oeffnung des Systems erfährt. Je feiner die Structur ist, desto weniger einzelne Beugungsspectra können von dem System aufgenommen werden. Wird nur das Hauptmaximum aufgenommen, so giebt das Mikroskop kein Bild der Structur mehr. Schiefe Beleuchtung kann bewirken, dass noch ein Beugungsspectrum in das Instrument eintritt, und dann sieht man die Structur. Es kann aber auch



Objecte geben mit so feiner Structur, dass für Instrumente auch der grössten Apertur nur das Hauptmaximum aufgenommen wird, und dann ist es unmöglich, die Art der Structur anzugeben. An dem Beispiel von *Pleurosigma angulatum* werden diese Verhältnisse im Einzelnen dargelegt und gezeigt, woher die verschiedenen Ansichten über die Structur dieser Diatomee rühren.

Im zweiten Buch wird das Mikroskop mit Benützung der bisher dargelegten Theorie der Bilderzeugung im Einzelnen behandelt in einer Vollständigkeit, die nichts zu wünschen übrig lässt. Das dritte Buch bespricht die Hilfsmittel zur mikroskopischen Beobachtung, wie sie der Praktiker bedarf.

P. Zech.

Die Grundgesetze der Elektrodynamik von Munker. Nürnberg 1883. 27 S.

Wenn die gegenseitige Einwirkung zweier Stromelemente nur von ihrer Länge, der Stromstärke, dem Winkel der Elemente unter sich und mit der Verbindungslinie ihrer Mitten, endlich von der Entfernung dieser Mitten abhängt, so bleibt die Einwirkung natürlich dieselbe, so oft alle diese Grössen dieselben sind. Durch Anwendung dieses einleuchtenden Satzes kommt Verfasser zu dem Schluss, dass ein Strom, welcher durch eine Ebene E in zwei entgegengesetzt symmetrische Hälften getheilt wird, auf ein Stromelement, welches durch die Symmetrieebene E senkrecht halbirt wird, nur in einer zum Elemente senkrechten Richtung wirken könne. Dieser Satz wird wohl keine Anfechtung erleiden. Ob aber dann der Schluss, dass bei Nichterfüllung dieser Bedingungen die Gesammtwirkung schief zum Element sein müsse, richtig ist, liesse sich doch noch bezweifeln. Auch in anderen Theorien wird diese Rechtwinkligkeit bestritten, die Gesammtwirkung geschlossener Ströme auf geschlossene ergiebt sich bei allen gleich; sobald aber ungeschlossene Stromtheile auftreten, werden die Componenten sehr verschieden. In dem Kampfe zwischen den ersten Autoritäten auf diesem Gebiete, C. Neumann, Helmholtz, dem verstorbenen Zöllner, W. Weber und Anderen, ist eine Entscheidung noch nicht erfolgt. Als Beitrag dazu mag auch vorstehender Versuch dienen.

P. Zech.

Untersuchungen über Contactelektricität von Dr. v. Zahn. Leipzig 1882. 59 S.

In der schwierigen Frage, ob Elektricität blos durch Berührung entstehen könne, stellt sich der Verfasser auf die Seite der Bejahenden und sucht namentlich die Ansichten Exner's, der ganz auf Seite der chemi-

schen Theorie steht, zu widerlegen. **Kohlrausch** und **Hankel** haben messende Versuche auf diesem Gebiete ausgeführt nach verschiedenen Methoden. Der Verfasser verwendet eine aus beiden combinirte Methode und glaubt, dass seine Versuche jedenfalls der Contacttheorie günstiger sind. Er kommt zum Schlusse, dass die Theorie immer noch auf dem Standpunkt stehe, dass neben der durch Wärme hervorgebrachten electrischen Differenz noch eine Contactwirkung durch die verschiedenen Molecularanziehungen möglich sei.

P. Zech.

Die elektrische Beleuchtung in systematischer Behandlung von A. Merling (Elektrotechnische Bibliothek von Fr. Vieweg & Sohn. 1. Band, 1882).

Aus der gegenwärtig herrschenden Fluth in der Production elektrotechnischer Werke tritt die obige Arbeit vortheilhaft hervor durch ihre vorzügliche Ausstattung, durch den Reichthum an sehr guten Illustrationen. Man bekommt einen Ueberblick über alle erwähnenswerthen Constructionen von Maschinen und Lampen, und es ist deshalb das Buch zur Orientirung über das Bestehende auch für Fachmänner zu empfehlen. Leider können wir uns mit manchem Andern nicht ebenso einverstanden erklären, insbesondere fehlt es häufig an Einfachheit und Klarheit der Darstellung. Auch Ungenauigkeiten und Unrichtigkeiten machen sich mehrfach in störender Weise bemerkbar; wir wollen nur auf die Formel am Ende der Seite 70 (räumliche Vertheilung des Lichts einer Bogenlampe) hinweisen oder an den Ausdruck: „man hat ermittelt, dass das Licht ... pro Minute eine Hitze gleich 3 Pferdekräften ausstrahlt“ in der Anmerkung auf Seite 71 erinnern. Man sollte ferner Nachlässigkeiten des Ausdrucks, wie „9,81 m ist die Geschwindigkeit eines im leeren Raum fallenden Körpers“ (S. 58 Anmerkung) in einem wissenschaftlich sein wollenden Werke vermeiden. Wenn endlich der Vorschlag, bei den elektrischen Kerzen zur Ermöglichung der Verwendung von Gleichströmen einen spiralförmig gewundenen Kohlenstab als positive Elektrode um einen geraden herumzuführen, als beachtenswerth bezeichnet wird (S. 74 Anmerkung) und wenn der Brushmaschine gegenüberliegende Pole entgegengesetzten Vorzeichens gegeben werden (S. 166 und 167), obwohl sie als Flachringmaschine zu betrachten ist, so scheint daraus hervorzugehen, dass der Verfasser der elektrotechnischen Praxis nicht sehr nahe steht.

P. Zech.

Hintz, L., **Die Baustatik** 20 Bogen 8° mit einer Tafel und 242 Abbildungen im Text. Weimar, Bf. Voigt. 1882.

Das Buch ist zunächst für Hochbautechniker bestimmt, welche keine weitergehenden Studien in Mathematik gemacht haben. Dementsprechend hat es der Verfasser versucht, die ganze Baustatik mit elementarer Mathematik durchzuführen; wo diese nicht mehr ausreicht, beschränkt er sich darauf, die durch „höheres Calcul" gefundenen Formeln und Resultate ohne weitere Begründung anzugeben.

Ausgehend von den allgemeinen statischen Bedingungen, bestimmt er die bei Hochbauconstructionen, Brücken und Stützmauern wirkenden Kräfte, um sodann in einem folgenden Capitel die Dimensionen der sie aufnehmenden und übertragenden Constructionstheile zu ermitteln; in einem Anhang sind endlich eine Anzahl von Beispielen aus der Baupraxis bis ins Detail durchgerechnet. — Liefert das vorliegende Werk zwar nichts Neues, so enthält es doch, bei Vermeidung alles Nebensächlichen und rein Theoretischen, die für die Baupraxis nothwendigen Formeln und Thatsachen in recht übersichtlicher und klarer Form, so dass es sowohl zum Unterricht in mittleren technischen Lehranstalten, als zum Nachschlagen für den Praktiker und die Mehrzahl der Architekten, die sich doch lieber mit dem künstlerischen als mit dem mathematischen Theil ihrer Aufgabe eingehend beschäftigen, ganz wohl zu empfehlen ist.

SCHLEBACH.

Beitrag zur Theorie der bestimmten Integrale und zur Attractionstheorie von Dr. VINCENZ NACHREINER, kgl. Studienlehrer. Programm der kgl. Studienanstalt zu Neustadt a. d. H. für das Schuljahr 1882/83. IV, 36 S.

Diese Abhandlung besteht in Uebereinstimmung mit ihrer Ueberschrift aus zwei Abtheilungen. In der ersten Abtheilung werden vornehmlich die Integrale $\int\limits_0^\infty \frac{\cos\omega}{\omega^\alpha}\,d\omega$, $\int\limits_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega^\alpha}\,d\omega$, $\int\limits_0^\infty \frac{(\sin r\,\omega)^n\,.\,\cos s\,\omega}{\omega^{m+\alpha}}\,d\omega$, $\int\limits_0^\infty \frac{(\sin r\,\omega)^n\,.\,\sin s\,\omega}{\omega^{m+\alpha}}\,d\omega$ unter der für ihre Convergenz unerlässlichen Bedingung $0 < \alpha < 1$ discutirt und Zusammenhänge zwischen den beiden letzteren und den beiden ersten entwickelt, von welchen einige neu sein dürften. In der zweiten Abtheilung, räumlich genau die Hälfte des Programms bildend, sucht der Verf. das Potential einer elliptisch begrenzten ebenen Oberfläche unter der Voraussetzung, dass deren Belegung sich nach concentrischen elliptischen Ringen stetig ändert, sowie das Potential eines geraden elliptischen Cylinders, für dessen Dichtigkeit das gleiche Gesetz, wie für die Belegung jener Ellipse obwaltet, d. h. dass sie nach coaxialen Schichten sich stetig ändert, wobei als Probe gewissermassen zuletzt der Sonderfall gleicher Dichtigkeit für den ganzen

Cylinder ins Auge gefasst wird, welcher schon von Anderen, insbesondere von Röthig, untersucht worden war.

CANTOR.

Analytische Geometrie von Dr. RICHARD BALTZER, Professor an der Universität Giessen, Mitglied etc. Leipzig, Verlag von S. Hirzel.

Die analytische Geometrie ist derjenige Theil der Mathematik, welcher zu verschiedenen anderen Zweigen dieser Wissenschaft in nächster Beziehung und Wechselwirkung sich befindet. Aus diesem Grunde wird der Vortrag eines Lehrsystems der analytischen Geometrie entweder die geometrischen Betrachtungen besonders hervorheben oder mehr den rechnerischen Erörterungen Aufmerksamkeit schenken; aber auch im letzteren Falle können noch die geometrischen Wahrheiten oder die formale Seite des Calculs mehr den leitenden Gesichtspunkt abgeben.

Wie die Vorrede unseres Buches bemerkt, soll dasselbe die algebraischen Grundlagen der analytischen Geometrie enthalten; nur gelegentlich sollen Infinitesimalbetrachtungen berührt werden. In der That scheint dem Referenten das Buch eine Darstellung der analytischen Geometrie mit besonderer Berücksichtigung der formalen Seite der vorkommenden algebraischen Rechnungen zu enthalten. Hiermit soll weder ein Lob, noch ein Tadel ausgedrückt werden; auch können wir das Urtheil dem Leser mit um so grösserer Ruhe selbst anheimstellen, als wir eine ziemlich eingehende Inhaltsangabe des mit grossem Fleisse und mit entschiedener Sachkenntniss bearbeiteten Werkes zu geben gedenken.

Das ganze Werk ist 535 Seiten stark und zerfällt in drei Theile: die Geometrie des Raumes von einer, zwei, drei Dimensionen. Dem ersten Theil ist ein, dem zweiten sind sechs, dem dritten vier Capitel gewidmet.

Im ersten Capitel wird der Punkt einer Geraden auf zwei Punkte bezogen; wir finden homogene, insbesondere die barycentrischen Coordinaten eines Punktes. Es wird das Doppelverhältniss von vier Punkten besprochen, wobei mit Recht die Leistungen des verdienten Moebius hervorgehoben werden. Dann folgen die collinearen Figuren einer Geraden. „Wenn den Punkten A, B, C, D, ... der Geraden die Punkte A', B', C', D', ... so entsprechen, dass mit A, B, C und A', B', C' die Punkte D und D', E u. E' je gleiche Doppelverhältnisse haben, so sind die Figuren A, B, C, D ... und A', B', C', D' ... collinear.“ Es folgt die Lehre von der Involution, von den harmonischen Centren und Polaren. Man sieht, dass in diesem Capitel eine Fülle von Stoff auf den relativ engen Raum von 30 Seiten zusammengedrängt ist. Die Darstellung ist im Ganzen recht klar; aber ein gewisses Uebermaass im Determinantenmechanismus und peinliche Einhaltung der Gepflogenheit, bei jedem Sätz-

chen den ersten Autor und den zweiten, dritten Bearbeiter im Texte selbst zu citiren, hat auf den Referenten einigermassen ermüdend gewirkt. Beide Umstände haben uns durch das ganze Buch hindurch begleitet, und wir wollen derselben daher und des letzteren nur hier gedenken; auch beizufügen nicht ermangeln, dass diese Bemerkung eine Geschmackssache trifft und der Geschmack verschieden ist.

Im folgenden Capitel wird der Winkel zunächst eindeutig definirt, alsdann die „im Euklidischen Raume giltige“ Relation $ab + bc + ca = 0$ besprochen. Daran schliesst sich die „Fläche der Planfigur“, wobei die Gleichung, durch welche die „Distanzen“ eines Punktes von 3 Geraden verbunden sind, besprochen wird. Es folgt die Besprechung der „Normalprojection“ und eine „Polygonometrie“, wobei uns die hübsche physikalische Auseinandersetzung Seite 42 ebenso sehr gefallen hat, wie uns die trigonometrischen Formeln Seite 38 überflüssig scheinen. Der folgende Paragraph, „Centralprojectionen“ überschrieben, behandelt die einschlägigen Dinge in recht schöner Darstellung.

Historisch interessant ist Capitel 3, in welchem der Begriff „Coordinaten“ entwickelt wird. Ob Herr B. im Rechte ist, wenn er „unseren Historikern“ in der Vorrede bemerkt, dass sie den Zusammenhang zwischen den Arbeiten der Griechen und denen des 17. Jahrhunderts nicht genug hervortreten lassen, mag billig dahingestellt bleiben. Doch wollen wir nicht unerwähnt lassen, dass die folgende Bemerkung, wonach die Coordinanten eine „Erfindung“ der Griechen, die übersichtliche Schreibart derselben durch Buchstabenrechnung eine Leistung der neueren Zeit ist, sich ihrem Sinne nach bei Cantor, „Geschichte der Mathematik“, S. 291 findet. Sowohl an dieser, wie anderer Stelle kommt Herr Cantor ausdrücklich darauf zurück, dass den Alten die Proportionen unsere Gleichungen ersetzen mussten. Mag hier auch ein Accentfehler Seite 52 in dem Worte ἀποτεμνόμεναι erwähnt werden. Uebrigens ist dieses Capitel reich an interessanten Bemerkungen über Affinität, isogonale Abbildung, Axiome der Geometrie u. s. w. Seite 51 steht die Bemerkung: „Allen realen Coordinaten x, y entspricht eine ‚Doppelserie‘ (zweifach unendliche Mannichfaltigkeit) von Punkten der Ebene. Jedem realen Punkte ist eine Doppelserie von nicht realen (imaginären) Punkten beigeordnet.“ Ob hier der Rede Sinn oder blos die Rede dunkel ist, erlaubt sich Referent bescheidentlich zu fragen.

Dieselbe Bemerkung drängt sich bei dem Satze auf, mit welchem Herr B. das 4. Capitel einleitet: „Wenn f eine Function n^{ten} Grades der mit 2 gegebenen Geraden parallelen Coordinaten x, y eines Punktes der Ebene ist, eine Function des Punktes $x|y$, so heisst die Linie $f=0$ eine Linie n^{ter} Ordnung. Wenn der positive ganze Exponent n jede gegebene Zahl übersteigt, und die Function nicht algebraisch ist, so heisst die Linie $f=0$ transcendent wie die Function.“ Dann aber wird die

Darstellung entschieden interessant; Kreis und Gerade erscheinen in hübschen, nicht gerade an jedem Wege liegenden Beispielen als geometrische Oerter; wir finden die Untersuchungen griechischer Geometer über die Kegelschnitte, die dann nach modernen Methoden und zwar sehr zweckmässig zunächst an geometrisch interessanten Beispielen als geometrische Oerter behandelt werden. Wir gelangen zu den ähnlichen, affinen, confocalen Kegelschnitten, und dieser reiche Inhalt ist in so klarer und schöner Weise dargestellt, dass wir es Herrn B. nicht zu hoch anrechnen wollen, wenn er Seite 82 ohne Beweis behauptet: „Eine (?) transcendente Linie hat eine (?) Gruppe von unendlich viel Punkten einer (?) Geraden.“ Auch mag Seite 84 „durch die ‚Serie‘ von Punkten einer Fläche, welche einer gegebenen Bedingung genügen, eine Linie ‚erfüllt‘ werden,“ welche der Ort des Punktes heisst; mag auch Seite 97 Dandelin die Bestimmung der Brennpunkte durch die eingeschriebenen Kugeln „erfinden“ und Seite 110 bei τομῇς ein überflüssiges *iota subscr.* stehen. Im folgenden § 25 wird die Lösung cubischer und biquadratischer Probleme in ansprechender Weise behandelt. Es befindet sich darunter Seite 133 das bereits von Archimedes behandelte Problem der Theilung der Kugel durch eine Ebene in gegebenem Volumverhältniss. Ich erlaube mir zu bemerken, dass ich in einer kleinen Abhandlung „Mathematische Miscellen“ auf eine interessante Beziehung dieser Aufgabe zum regulären Neuneck aufmerksam gemacht habe, wenn es sich um Halbirung der Halbkugel handelt. Es folgen im § 26 die Linien höherer Ordnung (S. 140 κίσσος mit falschem Accent), wobei u. A. die Cissoide, die Lemniskate, die Cardioide behandelt werden. Der § 27 enthält einige transcendente Linien.

Wir wollen das Referat über dieses Capitel mit der wiederholten Bemerkung schliessen, dass sein Inhalt ebenso wie die Darstellung reich an geometrischem Interesse ist.

Capitel 5 führt die Ueberschrift: die Gerade, und enthält Betrachtungen über Liniencoordinaten und trilineare Punktcoordinaten. Die Liniencoordinaten erscheinen als aus den Punktcoordinaten abgeleitet, wie das leider gewöhnlich zu geschehen pflegt, obschon es nicht nur didaktisch, sondern auch wissenschaftlich von hohem Interesse ist, für dieselben eine selbständige geometrische Ableitung zu besitzen. Vielleicht ist Herrn B. der vom Referenten (diese Zeitschr. Bd. 21, S. 278) in dieser Richtung gethane Schritt nicht bekannt geworden.

Capitel 6 enthält die Theorie der Kegelschnitte. Der erste Paragraph ist Formation der Gleichung überschrieben. Man discutirt die algebraischen Eigenschaften einer quadratischen Form von 3 Variabeln und geht erst dann zur geometrischen Anwendung über; ebenso zählt man in dem „Pol und Polare“ überschriebenen Paragraph bequem ein Dutzend ausgeschriebener Determinanten, ehe man zur Definition gelangt. Das ist wissenschaftlich vollkommen einwurfsfrei. Dagegen ist § 36,

„Punkte und Tangenten eines Kegelschnittes", im wohlthuenden Gegensatze; man begreift sofort Ziel und Absicht der Rechnung, und dieselbe ist zudem unter Berücksichtigung des durch die allgemeinste Gleichung definirten Kegelschnittes, welcher durch 5 Punkte geht, sehr elegant. Ebenso schön ist die Behandlung des Pascal'schen Satzes und seiner Zusätze.

Seite 276 Zeile 13 findet sich eine ziemlich confuse Stelle, welche durch die im Druckfehlerverzeichniss angegebene Correctur uns nicht ganz gesund geworden zu sein bedünkt.

Capitel 7 enthält die Lehre von den Linien n^{ter} Ordnung und ihren Singularitäten. Der Inhalt ist ein sehr reicher; man wird kaum eine bedeutendere Erscheinung auf diesem Gebiete vermissen. Der Vortrag ist wohlgeordnet und durch ansprechende Beispiele deutlich gemacht. Vielleicht hätten einige Linien ersten und zweiten Geschlechts, die seither eine ausführlichere Behandlung erfahren haben, namhaft gemacht werden können.

Durch die bisherige Besprechung glaubt Referent dem Leser ein Urtheil über die beiden ersten Theile ermöglicht zu haben. Es würden für den dritten Theil, welcher die Geometrie des Raumes enthält, kaum neue Gesichtspunkte hervortreten. Mag es daher gestattet sein, dass wir uns hier kürzer fassen.

Capitel 8 und 9 liefern die Vorbegriffe, dann werden die Flächen n^{ter} Ordnung behandelt, denen eine sehr eingehende Behandlung der Cylinder, Kegel- und Rotationsflächen vorausgeht. Man findet mehrfache Flächenpunkte, die Doppellinie, elliptische, hyperbolische, parabolische Punkte, bestimmt die Polaren der Fläche für einen Punkt P, den umschriebenen Kegel und untersucht die „unebenen" Linien. Dann folgen die Flächen zweiter Ordnung. Durch die Betrachtung der quadratischen Form von 4 Variablen ergeben sich nach Ausscheidung singulärer Bildungen 3 Hauptformen, welche sich durch die Darstellung durch die 4 Quadrate x_1^2, y_1^2, z_1^2, t_1^2, welche lineare Functionen der x, y, z, t sind, finden lassen. Hiernach ergeben sich 3 Species „ordinärer" Flächen zweiter Ordnung, von denen die erste imaginär ist, die zweite nur elliptische, die dritte nur hyperbolische Punkte enthält. Nachdem sich nun für $t = 1$ sechs Hauptgleichungen der Flächen zweiter Ordnung ergeben haben, gründet sich die weitere Classification auf die Betrachtung der unendlich fernen Linie der Fläche. Dieses Verfahren, dem man Kürze und Eleganz nicht absprechen kann, rührt von Herrn B. selbst her.

Es folgen Betrachtungen über Pol, Polare, Centrum, Diameter, Axen, und den Schluss des Werkes bilden Betrachtungen über die confocalen Flächen.

Druck und Papier sind gefällig, die Correctur eine so sorgfältige, dass wir die wenigen von uns angemerkten Druckfehler alle im angehängten Verzeichnisse als bereits vom Verfasser berichtigt auffanden.

Zu einem Lernbuch für den Studirenden eignet sich das Buch nach der Ueberzeugung des Referenten nicht in allen Theilen, wenigstens nicht beim ersten Studium; dagegen ist es für den mit den Materien bereits im Allgemeinen vertrauten Mathematiker, namentlich durch seine genauen Literaturnachweise, ein so treffliches und ausgiebiges Nachschlagewerk, dass man das Fehlen eines *index rerum* doppelt beklagen muss.

Mit diesen Bemerkungen könnten wir unser Referat schliessen, wenn wir es nicht für unsere Pflicht hielten, gegen eine gewisse Eigenart des Verf., der ja ein Schriftsteller von anerkanntem Rufe ist, laut zu protestiren.

Eine Sehne wird „Chorde“ genannt, sich selbst entsprechende Punkte heissen „tautolog“, Entfernungen sind „Distanzen“, eine Schar heisst „Serie“, senkrechte Linien sind „normal“, Punktepaare sind in „Harmonie“, ein Differentialquotient ist eine „Fluxion“, ein Kugelsegment hat eine „Sagitte“, Gleichungen sind „congruent“, werden „componirt“, ein Vielseit ist ein „Polygramm“, welches auch „centrisch“ (Büschel) sein kann. Daher u. A. ein bekannter Satz lautet: „Wenn demnach zwei gerade Polygone oder zwei plane centrische Polygramme perspectivisch sind, so sind sie collinear.“

Der Verfasser nennt dies Verfahren „in der Terminologie internationalen Ausdrücken den Vorzug geben“, wir Anderen nennen es anders.

Coesfeld, im April 1883. K. Schwering.

Heger, **Leitfaden für den geometrischen Unterricht.** Zweiter Theil: Trigonometrie. Breslau, E. Trewendt.

Das vorliegende Buch behandelt auf 77 Seiten die ebene und sphärische Trigonometrie. Dasselbe weicht in manchen Punkten von der üblichen Darstellungsweise ab. Der Verfasser verfolgt augenscheinlich den Zweck, sich der wissenschaftlichen Strenge thunlichst zu nähern. Ob dieser Zweck überall erreicht ist und ob die Abweichungen von der üblichen Darstellung überall als glückliche bezeichnet werden müssen, mag das folgende Referat zeigen.

§ 1 definirt die trigonometrischen Functionen als Quotienten am rechtwinkligen Dreieck, drückt alsdann alle durch eine, den *sin* aus, liefert mit Hilfe der ein- und umschriebenen regulären n-Ecke die numerischen Werthe für $\sin 60^0$, 30^0, 15^0 bis $\sin\ 0^0 0{,}1' = 0{,}00003$. Hiermit ist natürlich die Bisection anticipirt, aber natürlich in geometrischer Verhüllung. Es folgt die Ableitung der Additionstheoreme; und damit ist der Leser in den Stand gesetzt, die Berechnung von $\sin 53^0 40'$ praktisch zu leisten. Im weiteren Verlaufe will Verfasser die Interpolation begründen und bemerkt, dass, wenn die Winkel α und β hinreichend klein

sind, $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha + \sin\beta$ gesetzt werden darf. Ganz richtig! Wenn nur nicht der Schüler geneigt wäre, auch dieser Meinung zu sein, aber ohne die Beschränkung auf die kleinen Winkel!

§ 2 behandelt das rechtswinklige und gleichschenklige Dreieck mit Zahlenbeispielen, welche in ausgeschriebener Rechnung behandelt werden. Das ist ganz zweckentsprechend. Nur mit Formeln wie der folgenden:

$$\text{Sin. d. halb. Wink. a. d. Spitze} = \frac{\text{Halbe Basis}}{\text{Schenkel}}$$

kann sich Referent nun einmal nicht befreunden. Aber das ist ja Geschmackssache; in Geschmackssachen dominirt die launische Göttin Mode, und wer weiss, ob nicht solche Formelungeheuer einmal in die Lehrbücher ihren siegreichen Einzug halten werden. Mögen „um der Gerechten willen“ die Tage ihrer Herrschaft gekürzt werden; und mit diesem Stossseufzer widerstehen wir der Versuchung, dem Leser noch weitere Proben dieser Sprachenmathematik vorzuführen.

Im § 3 und 4 erscheinen Sinussatz und Cosinussatz, ferner der sog. erste Tangentensatz, welche die vier den Kriterien der Deckung analogen Grundaufgaben lösen. Die Formeln werden zunächst durch Einführung der Bezeichnungen a, b, c, α, β, γ u. s. w. „durchsichtig“ (?) gemacht, dann aber werden die Sinus stumpfer Winkel definirt durch die Gleichung $\sin(180^0-\varphi) = \sin\varphi$, da die Formeln, welche für ein spitzwinkliges Dreieck abgeleitet worden sind, für ein stumpfwinkliges giltig bleiben sollen. Analog wird der Cosinus erklärt. Mag noch bemerkt werden, dass Referent nicht der Ansicht ist, dass die Gleichungen $\sin\varphi = \cos(\varphi - 90^0)$ und $\cos\varphi = -\sin(\varphi - 90^0)$ bei der Rechnung „etwas vortheilhafter“ sind als die gewöhnlichen. Ferner ist $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, worauf Seite 19 hingewiesen wird, an der betreffenden Stelle explicite nicht vorgekommen; endlich klingt es schlecht, wenn Verf. sagt: „Die Aufgabe hat 1 Lösung.“

Der Verfasser gelangt nunmehr zur Goniometrie und behandelt die Summe von Strecken und Winkeln. Dabei wird nachgewiesen, dass die aufgestellten Definitionen wirklich den Gesetzen der Addition entsprechen. Aus dem Begriffe der Projection folgt nun die Definition der Functionen des Winkels in den verschiedenen Quadranten. Man sieht, dass diesmal der Zugang ein ganz anderer ist, als der Weg, welcher dem Verfasser im ersten Theile seines Buches zur Erkenntniss $\sin\varphi = \sin(180-\varphi)$ dienen musste; und ein solcher Wechsel der Auffassung unterliegt wissenschaftlich nicht leichtem, pädagogisch aber dem schwersten Bedenken.

Beziehungen wie $f(\varphi) = \pm cof(\varphi - 90)$, wo cof „Cofunction“ bedeutet und $\pm$ keine Zweideutigkeit bezeichnen soll, kann füglich entbehrt werden. Ein Druckfehler findet sich wohl S. 45 Zeile 4 v. o. und

46, Z. 11 v. u. Bedenklicher Weise wird in dem Täflein S. 49 keine Festsetzung über die Vorzeichen der Quadratwurzeln getroffen und es ist dem Referenten geradezu unerfindlich, warum S. 51 nicht der Moivre-sche Lehrsatz selbst, sondern die nächste Folgerung aus demselben bewiesen wird.

Der Verfasser geht nun zur sphärischen Trigonometrie über, die im Ganzen recht ansprechend behandelt ist.

Zum Schlusse erlaubt sich Referent noch die Bemerkung, dass ein neues Gleichheitszeichen für „richtungsgleiche" Winkel eine „Erfindung" des Verfassers genannt werden kann, während Gauss die nach ihm benannten Gleichungen nicht, wie Herr Heger S. 75 meint, „erfunden", sondern entdeckt hat.

Coesfeld, im April 1883. K. Schwering.

Vom Körper höherer Dimension. Beiträge zu den Elementen einer n-dimensionalen Geometrie von K. Rudel. Kaiserslautern 1882. In Comm. b. H. Kayser.

Die Verallgemeinerung geometrischer Resultate auf das n-dimensionale Gebiet hat in den letzten Jahren in sichtlich zunehmendem Grade die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf sich gezogen, namentlich, seit Berechtigung und Nutzen derartiger Untersuchungen Gegenstand einer mitunter ziemlich lebhaften Discussion geworden sind. Zwar haben uns die analytischen Methoden schon lange gelehrt, die Geometrien der Geraden, der Ebene und des Raumes als Anfangsglieder einer unendlichen Reihe zu betrachten, deren Fortsetzung auch Resultate liefern muss, die nur durch unsere Anschauung nicht controlirt werden können. Und die synthetischen Grundlagen der n-dimensionalen Geometrie nebst der aus der Natur dieses Gegenstandes erwachsenden Formelsprache hat die Grassmann'sche Ausdehnungslehre geliefert. Aber die Scheu, das durch Sinneswahrnehmung uns zugängliche Gebiet des dreidimensionalen Raumes zu verlassen, um in abstracten Gebieten ohne die sichere Führung der Anschauung auf Entdeckungen von zunächst fragwürdigem Werthe auszugehen, hat sich den Specialuntersuchungen dieser Art lange entgegengestellt. Neuerdings scheint man indessen mehr und mehr zu der Erkenntniss zu kommen, dass aus solchen mehrdimensionalen Untersuchungen auch auf manche Thatsachen der gewöhnlichen Geometrie neues Licht fallen kann, und dass auch die Analysis, indem sie sich mehrdimensionalen Problemen anzubequemen genöthigt ist, Nutzen aus denselben ziehen wird. Insbesondere haben sich fast gleichzeitig verschiedene Mathematiker mit einem Gegenstande beschäftigt, der einen besonders auffälligen Mangel an Analogie zwischen der Geometrie der

Ebene und der des Raumes hervortreten lässt, nämlich den regulären Polygonen und Polyedern. Dass die Zahl der ersteren unendlich, die der letzteren nur gleich fünf ist, erscheint um so unbegreiflicher, da, wenn wir im Raum analoge Gebilde zu denen der Ebene aufsuchen, uns sonst überall ein grösserer Reichthum an Formen entgegentritt. Eine Erklärung des hier vorliegenden Ausnahmefalles lässt sich aber nur von der Beantwortung der Frage erwarten: Wieviel und welche regulären (den Polygonen und Polyedern analogen) Gebilde giebt es in den mehrdimensionalen Räumen, und zunächst im vierdimensionalen? Diese Frage ist mehr oder weniger erschöpfend beantwortet worden von den Herren: R. Hoppe in zwei Aufsätzen in Grunert's Archiv (Bd. 64 S. 189—213, Bd. 67 S. 29—44), H. Scheffler in dem Buche: „Die polydimensionalen Grössen und die vollkommenen Primzahlen", Braunschweig b. Vieweg (§ 14), W. J. Stringham in dem Aufsatz „Regular Figures in n-dimensional Space" (Americ. Journ. of Math. Vol. 3 p. 1—14), ferner vom Ref. in der Schrift „Theorie der homogen zusammengesetzten Raumgebilde" (Nova Acta d. Leop. Carol. Akademie Bd. 44 Nr. 4), ergänzt durch einen Aufsatz „Quelques théorèmes de Géométrie à n dimensions" (Bull. de la Soc. math. de France T. 10).

Auch die Schrift von Herrn Rudel, über welche hier berichtet werden soll, beschäftigt sich mit dieser Frage. Der Gedankengang dieser Schrift ist im Wesentlichen folgender: Im ersten Abschnitte (I A) werden zunächst allgemeine Benennungen und Bezeichnungen für krümmungslose n-dimensionale Gebilde und Gebiete festgestellt. Namentlich handelt es sich dabei um Erweiterungen der Begriffe „Körper" und „Winkel". Es folgt dann eine vom ein- bis zum dreidimensionalen Gebiet aufsteigende Untersuchung über die Anzahlen der Grenzgebilde eines gegebenen Gebildes, wobei natürlich auch der Euler'sche Polyedersatz gewonnen wird. Diese Zahlen werden (in Uebereinstimmung mit Stringham) durch Binomialcoefficienten ausgedrückt. Der Fortschritt von einer Dimension zur andern wird dadurch gemacht, dass ein ausserhalb des Gebietes, in welchem ein Gebilde liegt, angenommener Punkt mit allen Eckpunkten des Gebildes verbunden wird. So entsteht der Reihe nach aus dem Punkt die Strecke, aus dieser das Dreieck, dann das Tetraeder. Und da man diesen Bildungsprocess sogleich als einen solchen erkennt, der sich ins Unendliche fortsetzen lässt, so ist hiermit bereits eine erste Reihe n-dimensionaler „Körper" gewonnen („Elementarkörper erster Gattung"). Interessant und gewiss vielen Lesern neu sind nebenbei die Untersuchungen über die Möglichkeit, aus dem Innern eines rings begrenzten Gebildes nach aussen zu kommen, ohne die Begrenzung zu passiren. — Es folgt nun eine specielle Betrachtung des dem Tetraeder entsprechenden vierdimensionalen Gebildes. (Dieses Gebilde nennt Rudel: Vierdimensionales Fünfeck, Stringham: Pentaedroid, Hoppe:

Polytop I, Ref.: Fünfzell. Doch haben die anderen Autoren ausser Rudel und dem Ref. nur das reguläre Gebilde im Auge.) Neu ist die Bemerkung des Verf., dass an diesem Gebilde (wie überhaupt im vierdimensionalen Gebiet) vier neue Massgrössen auftreten. Da nun im eindimensionalen Gebiete (Gerade) nur die Strecke als Massgrösse existirt, zu welcher in der Ebene zwei neue, nämlich Winkel und Flächeneinheit, im dreidimensionalen drei neue, nämlich Keil, körperliche Ecke und Volumeneinheit hinzutreten, so sieht man sogleich, dass beim Fortschritt in das nächst höhere Gebiet zu den schon vorhandenen Masseinheiten jedesmal soviel neue hinzukommen, als die Dimensionenzahl des neuen Gebietes beträgt. Die oben erwähnte Bestimmung der Anzahlen der Grenzgebilde wird nun auch für den vierdimensionalen und n-dimensionalen Elementarkörper erster Gattung ausgeführt, wobei auch eine vorläufig nur für diese Körper giltige Erweiterung des Euler'schen Polyedersatzes zum Vorschein kommt. Einige ähnliche allgemeine Sätze bilden den Schluss der ersten Hälfte dieses Abschnitts. — Dieselbe Untersuchung wird in der zweiten Hälfte (IB) für die zweite, mit Strecke, Quadrat und Würfel beginnende Reihe von Gebilden (Elementarkörper zweiter Gattung) durchgeführt, wobei der Uebergang von einer Dimension zur andern durch Errichten von Senkrechten gemacht wird. Es fehlt aber die dritte, zu der zweiten im Verhältniss der Reciprocität stehende Reihe, deren erste Glieder Strecke, Quadrat, Oktaeder sind. (Ausser den Gliedern dieser drei Reihen kommen, wie Stringham gezeigt hat, im n-dimensionalen Raume keine regelmässigen Gebilde mehr vor, wenn $n > 4$ angenommen wird.)

Der zweite Abschnitt beschäftigt sich ausschliesslich mit dem Euler'schen Polyedersatze. Derselbe wird Anfangs (IIA) für den gewöhnlichen Raum, nachher (IIB) ganz analog für das vierdimensionale Gebiet bewiesen, natürlich unter den entsprechenden Beschränkungen auf die Elementarkörper. (Auch Herr Durège hat neuerdings diesen Gegenstand behandelt; vgl. Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. II. Abth. Bd. 83). Vorher wird jedesmal ein Hilfsproblem erledigt, welches im ersten Falle so lautet: Wieviel Dreiecke sind zwischen n Punkten einer Ebene möglich, wenn jedes Dreieck endlich und jeder Punkt ein Eckpunkt sein soll? — Wird zunächst durch Verbindung von n-m äusseren Punkten ein Polygon construirt, welches die übrigen m Punkte umschliesst, so beträgt die Zahl der Dreiecke $n+2(m-1)$. Man bemerkt, dass es sich beim Beweise des Euler'schen Satzes auf dieser Grundlage um die Ausbreitung der Oberfläche des Polyeders auf einer Ebene handelt. Die allgemeine hierbei befolgte Methode, geometrische Untersuchungen in das Gebiet von nächst niederer Dimensionenzahl zu verlegen, ist, wie der Verf. im Eingange zu diesem Abschnitt mit Recht bemerkt, ein Mittel von vorzüglicher Wirksamkeit bei Lösung von Aufgaben aus der Geometrie

höherer Dimensionen. Wenn der Verf. aber weiterhin sagt: „Für solches Aufbauen oder Abbrechen von dreidimensionalen Grenzkörpern am Allkörper versagt leider die directe Vorstellung ihre so nöthigen Dienste“, so wird diese Ansicht durch die vom Ref. construirten Modelle der dreidimensionalen „Zellgewebe“ der sechs hier in Betracht kommenden vierdimensionalen Körper wenigstens insofern widerlegt, als die Uebertragung dieser Gebilde in den vierdimensionalen Raum der einzige unlösbare Rest der Aufgabe bleibt.

Im dritten Abschnitt werden die elf Möglichkeiten, reguläre vierdimensionale Körper zu bilden, aufgestellt, und fünf davon ausgeschieden, Alles ganz ähnlich wie bei Stringham u. A. Von den sechs übrig bleibenden Gebilden sind zwei die vierdimensionalen Glieder der oben erwähnten beiden Reihen von Elementarkörpern; die übrigen vier, die sich allerdings der vom Verf. befolgten construirenden Methode nicht einfügen, fehlen hier. Es kommt nämlich vor Allem darauf an, die Zahl der Grenzkörper eines jeden dieser Gebilde zu bestimmen, eine der directen Anschauung wie der Formelrechnung gleich unzugängliche Aufgabe, die sich nur durch ein äusserst mühsames, die Construction des Zellgewebes begleitendes Zählungsverfahren mit befriedigender Schärfe lösen lässt. Zur Orientirung des Lesers über die Resultate dieser Zählungen mag hinzugefügt werden, dass die beiden vom Verf. genauer untersuchten Körper vierter Dimension von fünf Tetraedern, resp. acht Hexaedern begrenzt werden. Die Begrenzungen der übrigen sind: 16 Tetraeder, 24 Oktaeder, 120 Dodekaeder, 600 Tetraeder.

Ein Anhang der Schrift enthält in der ersten Nummer einen sehr klaren und anschaulichen Nachweis, dass symmetrische Körper zur Deckung gebracht werden könnten, wenn es möglich wäre, sie einem Durchgang durch den vierdimensionalen Raum zu unterwerfen. Die Exemplificirung auf zweidimensionale Wesen ist, wenn auch nicht neu, doch treffend und ein wesentlicher Bestandtheil jedes derartigen Beweises. — Nr. 2 beweist den Satz: Zwei sich kreuzende Ebenen (d. h. Ebenen ohne Schnittlinie in zwei verschiedenen dreidimensionalen, aber in demselben vierdimensionalen Raume) haben jederzeit einen Punkt gemeinsam.*

Denselben Gegenstand behandelt Nr. 3, worin der im 4. Hefte des 23. Jahrganges dieser Ztschr. versuchte Nachweis, dass die Annahme sich kreuzender Ebenen einen logischen Widerspruch in sich schliesse, ent-

* Die (ideale) Existenz dieses Punktes lässt sich übrigens auch durch folgende Betrachtung leicht nachweisen: Es seien zwei in C sich schneidende Geraden a und b gegeben; a bewege sich in einen dreidimensionalen Raum hinaus und beschreibe dabei eine Ebene α. Diese wird von b in C geschnitten. Jetzt bewege sich b in einen andern dreidimensionalen Raum hinaus und beschreibe eine Ebene β. Diese hat mit dem ersten Raume nur die Gerade b gemeinsam, daher mit der Ebene α nur den Punkt C.

kräftet wird, wobei wieder die Verlegung der Untersuchung eine Stufe rückwärts treffliche Dienste leistet. Im Anschluss hieran wird der Gedankengang jenes Nachweises richtig gestellt und das Ergebniss, nämlich die Richtigkeit des in Nr. 2 aufgestellten Satzes, noch durch ein algebraisches Verfahren bestätigt. Den Schluss dieser Note bildet ein Satz über die sechs Schnittebenen von vier dreidimensionalen Räumen im vierdimensionalen Raume.

Ueberblicken wir nun das Ganze, so findet sich, dass die Arbeit des Herrn Rudel zwar in den Hauptresultaten durch andere über denselben Gegenstand veröffentlichte Schriften überholt ist, dass sie aber trotzdem wegen der consequenten Durchführung eigenartiger Methoden und wegen verschiedener neuer Beiträge zur n-dimensionalen Geometrie alle Aufmerksamkeit verdient.

Waren. V. Schlegel.

Bibliographie

vom 1. Januar bis 15. Februar 1884.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der königl. preuss. Akademie d. Wissensch. Jahrg. 1884, Nr. 1 und 2. Berlin, Dümmler. compl. 12 Mk.

Abhandlungen der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen. 30. Bd. 1883. Göttingen, Dieterich. 40 Mk.

Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturwissenschaftl. Classe. 47. Bd. Wien, Gerold. 32 Mk.

Journal für reine und angewandte Mathematik (begr. v. Crelle), herausgeg. v. L. Kronecker und K. Weyerstrass. 96. Bd. 1. Heft. Berlin, G. Reimer. compl. 12 Mk.

Mathematische Annalen, herausgeg. von F. Klein und A. Mayer. 23. Bd. 1. Heft. Leipzig, Teubner. compl. 20 Mk.

Zeitschrift für mathem. und naturwissensch. Unterricht, herausgeg. von V. Hoffmann. 15. Jahrg. 1. Heft. Leipzig, Teubner. compl. 12 Mk.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgeg. von C. Ohrtmann. 13. Bd., 3. Heft. Berlin, G. Reimer. 6 Mk.

Zeitschrift für Vermessungswesen, herausgeg. von W. Jordan. 13. Jahrg. 1. Heft. Stuttgart, Wittwer. compl. 9 Mk.

Annalen der Physik und Chemie. Herausgeg. von G. Wiedemann. Jahrg. 1883. Nr. 8b und 12b. Leipzig, Barth. 7 Mk.

——, Jahrg. 1884. 1. Heft. Ebendas. compl. 31 Mk.

Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie, herausgeg. von G. und E. Wiedemann. 8. Bd. 1. Heft. Ebendas. compl. 16 Mk.

Repertorium der Physik, herausgeg. von F. Exner. 20. Bd. 1. Heft. München, Oldenbourg. compl. 24 Mk.

Zeitschrift der österr. Gesellschaft für Meteorologie, red. von J. Hann. 19. Bd. Nr. 1. Wien, Braumüller. compl. 12 Mk.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica, ed. R. von Hanstein. 33. Jahrg. Januar bis Juni 1883. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 60 Pf.

Zeitschrift für Instrumentenkunde, red. von A. Lemann und A. Westphal. 4. Jahrg. 1884. Berlin, Springer. compl. 18 Mk.

Connaissance des temps ou des mouvements célestes pour l'an 1885. Paris, Gauthier-Villars. 4 Fr.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Weissenborn, H., Die irrationalen Quadratwurzeln bei Archimedes und Heron. Berlin, Calvary & Comp. 3 Mk. 60 Pf.

Marie, H., Histoire des sciences mathématiques et physiques. Vol. III. Paris, Gauthier-Villars. 6 Frcs.

Reine Mathematik.

Kleyer, A., Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln mit 3296 Beispielen. Stuttgart, Maier. 4 Mk.

——, Lehrbuch der Logarithmen mit 1996 Beispielen. Ebendas. 6 Mk.

——, Fünfstellige logarithm. Tafeln. Ebendas. 2 Mk. 50 Pf.

Rüefli, J., Anhang zu den kleinen Lehrbüchern der Geometrie. Bern, Dalp. 40 Pf.

Weyr, E., Beitrag zur Gruppentheorie auf Curven vom Geschl. 1. (Akad.) Wien, Gerold. 80 Pf.

Simony, O., Ueber eine Reihe mathematischer Erfahrungssätze. III. (Schluss.) (Akad.) Ebendas. 2 Mk.

Winckler, A., Reduction der Bedingungen des Euler'schen Criteriums der Integrabilität auf eine einzige Gleichung. (Akad.) Ebendas. 40 Pf.

Fuhrmann, W., Analytische Geometrie der Kegelschnitte. Berlin, Winckelmann & Sohn. 2 Mk. 40 Pf.

Angewandte Mathematik.

Bennerder, F., Der logarithmische Rechenstab. Stuttgart, Wittwer. 80 Pf.

Hohmann, F., Das freischwebende Polarplanimeter (Patent Hohmann & Coradi.) Erlangen, Deichert. 1 Mk. 20 Pf.

Steindorff, H., Schattirungskunde; eine neue Methode zur Uebertragung von Curven gleicher Helligkeit etc. Stuttgart, Wittwer. 3 Mk.

Finger, J., Elemente der reinen Mechanik. 1. Lief. Wien, Hölder. 3 Mk. 20 Pf.

Jarolimek, A., Ueber die Gravitation. (Akad.) Wien, Gerold. 80 Pf.

Siebert, A., Das hydrodynamische Problem der pulsirenden Kugeln von Bjerkens, verallgemeinert. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 2 Mk.

Fehrmann, P., Ueber die Wellenbewegung in einer Flüssigkeit. Ebendaselbst. 1 Mk.

Wolyncewicz, S., Bahnbestimmung des Planeten Isabella (210). (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk.

Ginzel, K., Astronomische Untersuchungen über Finsternisse. 2. Abhandlg. (Akad.) Ebendas. 4 M.

Graham, H., Graphic and analytical statics. London, Lockwood & Comp. 16 sh.

Mathieu, E., Théorie de la capillarité. Paris, Gauthier-Villars. 10 frcs.

Resal, H., Physique mathématique. Ebendas. 15 frcs.

Physik und Meteorologie.

Abendroth, W., Leitfaden der Physik nebst den einfachsten Lehren der Chemie und mathematischen Geographie. 2. Curs. (Obersecunda). Leipzig, Hirzel. 2 Mk. 40 Pf.

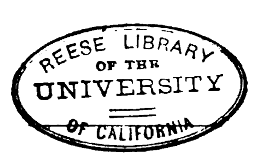
Koch, P., Ueber die magnet-elektrischen Rotationserscheinungen. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 60 Pf.

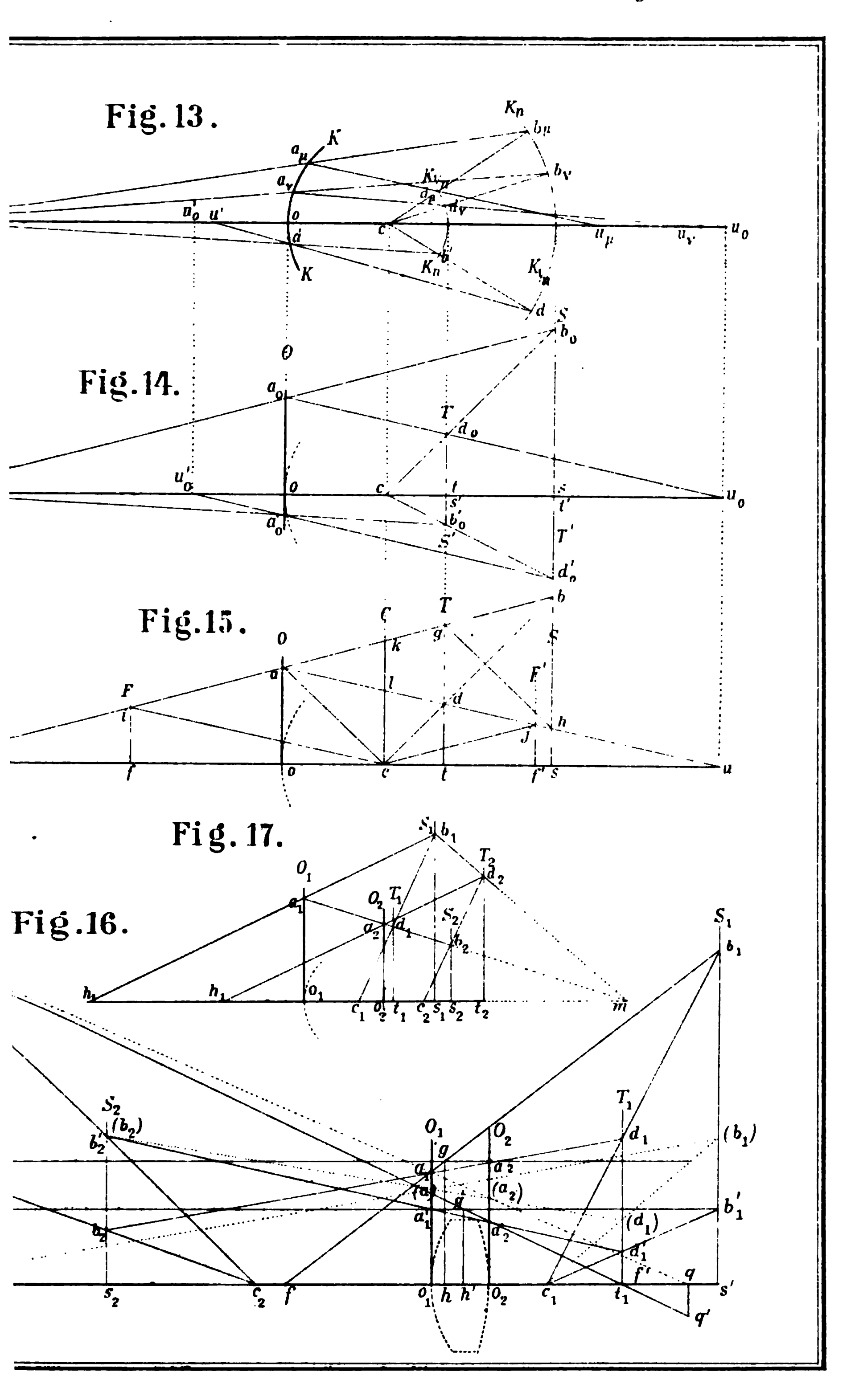
Grimm, Atlas der Astrophysik mit Text von W. Valentiner. 2. Lief. (Schluss.) Lahr, Schauenburg. 12 Mk.

Palisa, J., Bericht über die während der totalen Sonnenfinsterniss vom 6. Mai 1883 erhaltenen Beobachtungen. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Thomson, A., Treatise on the motion of vortex rings. London, Macmillan & Comp. 6 sh.

Radau, R., La météorologie et la prévision du temps. Paris, Gauthier-Villars. 1 frcs. 75 c.




Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 17.
Fig. 16.


REESE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF CALIFORNIA

Historisch-literarische Abtheilung.

Der Tractatus „De quadratura circuli" des Albertus de Saxonia.

Von

Dr. HEINRICH SUTER

in Aarau.

Hierzu Taf. VI Fig. 8—14.

Mit Albertus de Saxonia, dem ersten Rector der Wiener Universität, beginnt an dieser Hochschule und damit auch in Deutschland das Studium der mathematischen Wissenschaften in eine neue Epoche einzutreten; denn in kurzen Zwischenräumen folgen sich als Vertreter dieser Disciplinen an jener Hochschule Albertus de Saxonia, Heinrich von Langenstein, Joh. v. Gmunden, Georg von Peuerbach, Joh. Regiomontanus. Während aber die letzten beiden berühmten Mathematiker und Astronomen schon auf dem Boden des Humanismus standen, bewegten sich die ersten beiden noch ganz auf dem Felde der Scholastik und mussten deshalb jenem mittelalterlichen Lehrsystem gemäss ihre Kräfte auf verschiedene Gebiete vertheilen*: Albertus glänzte hauptsächlich als Logiker, Heinrich von Langenstein als Theologe; beide aber huldigten als Nominalisten einer freieren Richtung in Kirche und Wissenschaft. Was Joh. von Gmunden anbetrifft, so steht er so ziemlich auf der Grenzscheide von Scholastik und Humanismus.

Albertus de Saxonia (eigentlich Albert von Riggensdorf aus Sachsen) stammte aus einer bäuerlichen Familie in Niedersachsen. Er studirte zuerst in Prag, dann in Paris, wurde hier Magister der freien Künste und nachher Doctor der Theologie, las etwa von 1350 an daselbst

* Indessen beschränkten sich auch Peuerbach und Regiomontan in ihren Studien keineswegs auf Mathematik und Astronomie; als erste Vertreter des Humanismus an der Wiener Universität widmeten sie sich eifrig dem Studium der klassischen Sprachen: Georg Peuerbach las 1454 und 1460 über Vergil's Aeneide, 1456 über Juvenal's Satyren, 1458 über Horaz. Regiomontanus trug ebenfalls 1461 über den Vergil und zwar über dessen Bucolica vor. Vergl. J. Aschbach, Geschichte der Wiener Universität, I. Bd. S. 353.

über Aristotelische Philosophie und Mathematik mit grossem Beifall und wurde 1365 von Herzog Rudolph IV. als Rector an die neu gestiftete Hochschule nach Wien berufen, aber schon im folgenden Jahre von Papst Urban V. zum Bischof von Halberstadt ernannt. In diesem Amte blieb er bis zu seinem Tode (1390). Es werden ihm eine bedeutende Zahl von philosophischen, mathematischen und astronomischen Werken zugeschrieben, die er wahrscheinlich grösstentheils in Paris verfasst hat; mehrere derselben wurden den Vorlesungen in Wien zu Grunde gelegt.*

Von mathematischen Werken nennt Aschbach (a. a O. S. 365): 1. Tractatus de latitudinibus formarum (gedruckt Venetiis 1505), 2. De maximo et minimo (handschriftl. in Venedig), 3. Liber proportionum (in Wien und anderen Bibliotheken handschriftlich, in ersterer nur als Fragment; gedruckt Paduae 1482 und 1486 zugleich mit Blasius' De Pelicanis und Nic. Oresme's De latitud. form., und Venetiis 1496). Von dem Liber proportionum kennt Boncompagni zehn verschiedene Ausgaben; ausser den obengenannten noch eine aus Padua 1484 (die dritte ist nach ihm aus dem Jahre 1487, nicht 1486, wie Aschbach angiebt), zwei aus Venedig 1487 und 1494, zwei aus Bologna 1502 und 1506, eine aus Paris ohne Jahreszahl und eine ohne Angabe des Druckortes und der Jahreszahl.** Neben diesen vollständigen Ausgaben des betreffenden Werkes erwähnt Boncompagni noch einen gedruckten Auszug aus demselben und einige Manuscripte; von allen diesen Werken legt einzig der Auszug (verfasst von dem Dominikanermönch Isidorus de Isolanis von Mailand im Jahre 1522) dem Albertus de Saxonia die Bezeichnung bei: Frater sacri Ord. Praedicatorum. Schon dieser Umstand, dass die vielen anderen, älteren Ausgaben Albertus de Saxonia nicht als Mönch kennen, dann die Thatsache, dass Lucas Pacioli in seinem berühmten Werke „Summa de arithmetica, geometria etc." ihn als Franziskaner citirt und Dominico Antonio Gandolfo in seiner Dissertatio historica de ducentis celeberrimis Augustinianis scriptoribus sogar noch als Augustiner,*** machen es

* Diese biographischen Notizen sind aus Aschbach genommen. Es wurden aber auch consultirt: Bulaeus, Historia univers. Paris. Tom. IV, und Ch. G. Jöcher's Allgem. Gelehrtenlexikon, fortgesetzt und ergänzt von J. Ch Adelung, 1. Bd., Leipzig 1784; es ist aber nirgends von einem Aufenthalt in Pavia die Rede und wir begreifen daher die ohne Quellenangabe gebrachte Notiz von Ferd. Jacoli im Bulletino di bibl. etc. von Boncompagni, Tom. IV pag. 495 nicht; auch ist daselbst die Angabe falsch, Albertus habe um's Jahr 1330 geblüht.

** Vergl. Boncompagni's Bulletino di bibliog. etc. Tom. IV pag. 498 – 511. Nach Boncompagni enthält die erste und nicht die dritte Paduaner Ausgabe (wie Aschbach angiebt) noch die Abhandlungen von Blasius de Pelicanis: Quaestiones super tractatu de latitudinibus formarum, und von Nic. Oresme: De latitudinibus formarum.

*** Vergl. Bulletino di Boncompagni, Tom. IV pag. 511.

höchst wahrscheinlich, dass Albertus keinem Orden angehört hat. In der That hat auch Apfaltrer dieses in den Scriptor. univers. Vienn. I. pag. 29 nachgewiesen, wie Aschbach in der erwähnten Geschichte der Wiener Universität angiebt (S. 363). Nach demselben Apfaltrer soll auch das gewöhnlich dem Albertus beigelegte astronomische Werk: Commentaria ad tabulas Alphonsi regis nicht von ihm verfasst sein (S. 365).

Es herrscht nun sowohl bezüglich dieses Proportionenwerkes, als auch der Abhandlung „De latitudinibus formarum“ kein Zweifel darüber, dass diese Arbeiten von Albertus de Saxonia stammen; auch die Abhandlung „De maximo et minimo“, deren Veröffentlichung sehr zu wünschen wäre, wird ihm ohne Widerspruch zugeschrieben. Ob nun aber die Abhandlung „De quadratura circuli“, die sich im Codex A. 50 der Berner Stadtbibliothek befindet und als deren Verfasser Albertus de Saxonia genannt ist, sowie einige andere Abhandlungen desselben Manuscriptes, deren Verfasser nicht angegeben sind, auch von unserem Albertus herrühren, ist nicht mit Entschiedenheit zu behaupten; eine Vergleichung derselben mit den als echt erkannten Schriften, die mir leider gegenwärtig nicht zu Gebote stehen, könnte vielleicht zu einem sichern Resultate führen. Es ist etwas auffallend, dass eine solche Abhandlung nirgend anderswo als Manuscript vorkommt oder erwähnt wird*; allein eine solche Schrift über eine Streitfrage, wie es dieses Problem damals war, wurde nicht den Vorlesungen als Lehrbuch zu Grunde gelegt, wie dies mit den Werken über Proportionen und den Latitudines formarum der Fall war, und brauchte deshalb weniger vervielfältigt zu werden. Es gilt dies auch von der Schrift „De maximo et minimo“, die nach Aschbach auch nur in Venedig handschriftlich vorkommen soll. Uebrigens darf die Schrift ihrem Inhalte nach, abgesehen von der weitschweifigen scholastischen Darstellungsweise, ganz wohl dem Albertus zugeschrieben werden, ohne dem Klange seines Namens irgendwie Abbruch zu thun.

Bevor wir uns speciell zu dieser Abhandlung wenden, wird es wohl angezeigt sein, den reichhaltigen Codex A. 50 der Berner Stadt-

* In Wien befindet sich dieselbe nach meinen Erkundigungen nicht. Es existiren aber auch dort die Schriften: De latitudinibus formarum und De maximo et minimo nicht. Das Vorhandensein der Abhandlung „De quadratura circuli“ auf der Stadtbibliothek in Bern erwähnt Adelung in seiner Fortsetzung des Ch. G. Jöcher'schen Gelehrtenlexikons, I. Bd. S 455—457, unter dem Artikel „Albertus de Saxonia“: „Schrieb Tractatus proportionum (Venedig 1496) und Questio de quadratura circuli et alia problemata, handschriftl in der Stadtbibliothek Bern.“ Wie er dazu kommt, auch die übrigen Abhandlungen so ohne Weiteres dem Albertus zuzuschreiben, ist mir nicht bekannt; der neue Handschriftenkatalog der Berner Stadtbibliothek von Hagen berührt die Frage des Ursprungs dieser Abhandlungen gar nicht. Adelung nennt den Geburtsort des Albertus Riekmersdorf und bezeichnet die übrigen Lesarten als irrig; ich bin Aschbach gefolgt.

bibliothek etwas näher zu betrachten. Derselbe ist ein Pergamentmanuscript aus dem Anfang des XV. Jahrhunderts, in Quart, von derselben Hand geschrieben, gleichmässig und schön bis zu Ende. Er enthält: 1. Blatt 1^a—168^a die 15 Bücher Euklid's mit dem Commentar des Campanus, sehr correct und schön geschrieben mit feinen, sauberen Figuren. Dieselben beginnen: „*Incipit geometria euclidis cum commento campani. Punctus est illud cui pars non est. etc.*“ und schliessen: „*Et sic sit finis huius* 15. *libri et per consequens totius libri geometriae euclidis cum commento campani anno domini* 1412, *feria quinta ante valentini martiris.*“ — 2. 168^a—169^a eine kurze Abhandlung ohne Angabe des Verfassers, betitelt: Incipiunt demonstrationes de quadratura circuli. Wir werden dieselbe unten ebenfalls vollständig wiedergeben. — 3. 169^a—172^a: Questio Alberti de Saxonia de quadratura circuli. — 4. 172^a—176^a folgende Abhandlung ohne Angabe des Verfassers: Item alia questio de proportione dyametri quadrati ad costam ejusdem. Sie beginnt: „*Utrum dyameter alicujus quadrati sit commensurabilis costae ejusdem* ...“ und schliesst: „*ad* 3^{am} *potest dici, quod iste modus arguendi a commutata proportionalitate non tenet in illis quae sunt diversarum specierum, modo cum quadratum et linea non sint ejusdem speciei ratio tertia modicum probavit. Explicit haec questio.*“ — Dann folgt ein kurzer Absatz, wahrscheinlich zum Obigen gehörig, beginnend: „*Dyameter quadrati ad ejus costam est proportio medietatis duplae* ...“ und schliessend: „*ergo proportio primi ad secundam est et dicitur medietas duplae quae est* .a.b. *ad* .b.c. *scil. dyametri ad costam.*“ — 5. 176^b—177^a die Abhandlung, betitelt: Datis duabus lineis inaequalibus, inter eas duas medias proportionales invenire. Sie beginnt: „*Istud theorema fuit antiquitus sic introductum* ...“ und schliesst: „*Inventae sunt igitur duae lineae etc.*“ Der Verfasser ist auch nicht angegeben. — 6. die Abhandlung 177^b—178^b ohne Angabe des Verfassers. Sie ist betitelt: Angulo rectilineo dato equum angulum curvilineum describere et econverso. Sie beginnt: „*Sit angulus rectilineus datus* .b.a.c ...“ und schliesst: „*et per consequens arcus non esset equalium circulorum. Explicit.*“ — 7. Auf den Blättern 180^a—190^a (Blatt 179 ist leer) die zwei Bücher der Arithmetik des Thomas Bradwardinus. Titel: Incipit Arismetica magistri Thomae Brawardini liber primus. Anfang: „*Quantitatum alia magnitudo dicitur, alia discreta, quae multitudo sive numerus appellatur. Magnitudinum alia immobilis de qua geometer considerat, alia mobilis de qua astrologus tractat.*“ Schluss: „*Ista igitur sufficiant pro sententia hujus libri arismeticae. Explicit arismetica doctoris profundi magistri Thomae Brawardini, anno domini* 1411, *quarta die mensis Junii.* — 8. Wieder ohne Angabe des Verfassers 190^a bis 198^b einen Algorismus proportionum, und zwar ist es derjenige des Nic. Oresme. Er beginnt: „*Incipit algorismus proportionum. (U)na medietas in algorismo proportionum scribitur sic* $\frac{1}{2}$, *et una tertia sic* $\frac{1}{3}$ *et duae tertiae sic* $\frac{2}{3}$ *et sic de aliis.*“ Er schliesst: „*Sic igitur se habent aspectus*

signorum celi secundum istum considerationem ut patet in figura. Explicit tertius tractatus de proportionibus irrationalibus.“ Dieser Tractat weicht in einigen Stellen von dem von Herrn Curtze veröffentlichten ab. — 9. Auf den Blättern 199^a—204^b ohne Angabe des Verfassers einen Algorismus de minutiis. Titel: „*Incipit algorismus de minutiis. In nomine domini amen.*“ Anfang: „*(M)odum representandi seu representationis minuciarum vulgarium ostendere. Quia in fractionibus sunt duo numeri, scil. numerus numerans et numerus denominans, ideo in fractionibus primo opportet scire, quid sit numerus numerans et numerus denominans*“ Schluss: „*Multiplica tunc* 2^{am} *per* 3^{am} *et divide tunc per quartam et exibit qui fuit ignotus: quod si sint aliae proportiones tamen non posui plures, quia istae ad propositum numerum minuciarum vulgarium et physicarum sufficiant. Explicit Algorismus de minuciis.*“ — 10. Als Schluss des Manuscriptes Blatt 205^a—213^b die Musik des Boetius abgekürzt durch C. de Muri. Titel: Incipit musica Boetii abbreviata per C. de Muri. Anfang: „*Quoniam musica est de sono relato ad numeros aut econtra, necessarium est musicam utrumque numerum scil. et sonum considerare.*“ Schluss: „*et statim in ea videbitur clarissime monocordum in dyatonico genere, ut hic patet.*“

Wir geben nun nachfolgend die kurze Abhandlung 2., Demonstrationes de quadratura circuli, und die dem Albertus de Saxonia zugeschriebene 3. wortgetreu wieder; nur in der Interpunction durften wir uns nicht mit der mittelalterlichen Kürze begnügen. Was die Abhandlungen 4., 5. und 6. anbetrifft, so scheint es mir, der Form und dem Inhalt nach zu urtheilen, ziemlich wahrscheinlich, dass sie von demselben Verfasser herrühren wie 3.; auch bieten dieselben, wenigstens 4. und 5., kein geringes Interesse dar, so dass eine Veröffentlichung derselben in einem spätern Hefte dieser Zeitschrift wohl gerechtfertigt sein mag.

„*Incipiunt demonstrationes de quadratura circuli.*

Circulum quadrare est possibile. Ponatur circulus quadrandus cujus semicirculus sit .a.d.c., *et describantur in eo duo latera quadrati inscriptibilis, quae sunt* .a.d. *et* .d.c., *et super lineam* .a.d. *describatur semicirculus*.a.d.; *lunula** *ergo* .a.d. *sic potest quadrari: quadratum enim* .a.c. *est per penultimam primi Euclidis duplum ad quadratum* .a.d., *sed* .a.c. *est dyameter semicirculi* .a.d.c., *et* .a.d. *est dyameter semicirculi* .a.d., *ergo per* 2^{am} 12. *Euclidis semicirculus* .a.d.c. *est duplus ad semicirculum* .a.d., *ergo semicirculus* .a.d. *est equalis portioni* .a.d.b. *quae est medietas semicirculi* .a.d.c. *ergo cum semicirculus* .a.d. *et portio* .a.d.b. (Fig. 8) *habeant quoddam commune scil. portionem contentam ab arcu* .a.d. *et a corda* .a.d., *dempta ista portione ab utroque, erit lunula* .a.d. *equalis triangulo* .a.d.b. *Sed trianguli quadratura scitur per ultimam* 2^i *Euclidis, quare et lunulae.*

---

* Geschrieben steht überall *limula.*

Supponatur ergo quod sit possibile quadrare lunulam super latus quadrati descriptam, et sicut hoc contingit, ita contingit quadrare quamlibet lunulam super cujuscunque figurae circulo inscriptibilis latus descriptam, ut super latus exagoni. Quae suppositio confirmari potest per illud principium, quod praemittit Campanus primo elementorum Euclidis, et quo utitur in demonstrando 2^{am} 12^{i} *Euclidis, quia sicut se habet lunula super latus quadrati descripta ad lunulam super latus exagoni, ita se habet quadratum quodcunque ad aliquod aliud per illud principium: Quanta est quaelibet magnitudo ad aliquam* 2^{am}, *tantam necesse est esse quamlibet tertiam ad quartam. Et tunc ex* 7^{a} *et* 12^{a} *et* 21^{a} 5^{i} *Euclidis facile concludes hoc quadratum esse equale lunulae descriptae super latus exagoni, facilius tamen concludes illud ex permutata proportionalitate.*

Hoc autem praesupposito demonstrabitur quemcunque circulum posse quadrari. Sit enim circulus quadrandus ut prius cujus semicirculus sit .a.d.c., *et sumatur linea dupla ad ejus dyametrum, quae sit* .e.h., *et super eam describatur semicirculus* .e.f.g.h., *et in ipso ducantur tria latera exagoni quae sunt* .e.f., .f.g., .g.h. *et super illa tria latera describantur tres semicirculi, scil* .e.n.f., .f.l.g., .g.k.h. (Fig. 9 u. 10.) *Cum igitur linea* .e.h. *sit dupla ad lineam* .a.c., *erit quadratum lineae* .e.h. *quadruplum ad quadratum lineae* .a.c. *per* 4^{am} 2^{i} *Euclidis et* 18^{am} 6^{i} *ejusdem: igitur cum sit eadem proportio circulorum ad invicem, quae est quadrati dyametri unius ad quadratum dyametri alterius per* 2^{am} 12^{i} *Euclidis, circulus cujus dyameter est* .e.h. *est quadruplus ad circulum cujus dyameter est* .a.c., *et semicirculus* .e.f.g.h. *quadruplus est ad semicirculum* .a.d.c. *per* 15^{am} 5^{i} *Eucl.; sed unusquisque semicirculorum* .e.n.f., .f.l.g., .g.k.h. *est equalis semicirculo* .a.d.c., *quia omnium istorum semicirculorum dyametri sunt equales, ergo semicirculi* .a.d.c., .e.n.f., .f.l.g., .g.k.h. *sunt equales semicirculo* .e.f.g.h. *Demptis igitur tribus portionibus* .e.m.f., .f.t.g., .g.p.h., *quae sunt communes tribus semicirculis* .e.n.f., .f.l.g., .g.k.h. *et semicirculo* .e.f.g.h., *relinquitur, quod semicirculus* .a.d.c. *et tres lunulae* .e.n.f., .f.l.g., .g.k.h. *sunt equales illi quod est residuum de semicirculo* .e.f.g.h. *post demptionem trium communium. Est autem residuum illud figura quadrilatera quae continetur a quatuor lineis* .e.f., .f.g., .g.h., .e.h. *sed quadratum illius figurae scitur per ultimam* 2^{i} *Euclidis, quare et quadratum ei equale; sed ei equales sunt semicirculus* .a.d.c. *et tres lunulae praedictae, igitur ipsis simul junctis scimus equale quadratum posse signare. Sed tres lunulae ut praehabitum est possunt quadrari, quare et totus circulus cujus dyameter est .a.c.: consequentia ultima patet: Si enim tribus lunulis per se est dare tria quadrata equalia, quibus divisis in 6 triangulos datur unum quadratum equale per demonstrationem ultimae* 2^{i} *Eucl.: dempto ergo isto quadrato equali tribus lunulis de quadrato totali equali lunulis ipsis et semicirculo* .a.d.c, *residuum, quod est equale semicirculo remanet figura rectilinea* .a.c. *et per consequens talia quadrata ut docetur super ultimam secundi Euclidis.*“ —

Wir erkennen in dieser Abhandlung den Versuch des Hippokrates von Chios (denn als selbstständige Arbeit dürfen wir sie wohl nicht betrachten), den Kreis vermittelst der sogenannten Monde zu quadriren, der von Eudemos in seiner verloren gegangenen Geschichte der Geometrie beschrieben und uns von Simplikios in seinem Commentar zu der Physik des Aristoteles überliefert worden ist.* Der Fehlschluss, von der Quadrirbarkeit des Mondes über der Viereckseite ohne Weiteres auf diejenige des Mondes über der Sechseckseite zu schliessen, ist hier, wie man sieht, nicht umgangen, sondern im Gegentheil gestützt worden durch ein höchst allgemein gehaltenes Axiom des Campanus, das er seiner Euclid-Ausgabe hinzugefügt hat: „*Quanta est aliqua quantitas ad quamlibet aliam ejusdem generis, tantam esse quamlibet tertiam ad aliquam quartam ejusdem generis in quantitatibus continuis (necesse est).*“** — Wenn auch die hier dargestellte Kreisquadratur verfehlt ist, so bietet die Abhandlung immerhin ein historisches Interesse dar, indem sie zeigt, dass diese nach Bretschneider so wenig beachtete Stelle des Simplikios schon Ende des XIV. oder Anfang des XV. Jahrhunderts bekannt war und benutzt worden ist. Ob diese Quadratur ebenfalls dem Albertus zuzuschreiben sei, bezweifeln wir; denn sonst würde wohl in der einen Abhandlung ein Hinweis auf die andere zu finden sein, zumal die folgende Schrift die verschiedenen Quadraturenversuche erwähnt.

Questio Alberti de Saxonia de quadratura circuli.

Queritur utrum quadrare circulum sit possibile.

Arguitur primo quod sit, auctore antifontis et brissonis, qui ut dicit philosophus primo elenchorum et primo physicarum circulum quadrare sunt conati. probatur etiam ratione, quia cuicumque est dare quadratum majus et quadratum minus, sibi (?) est dare quadratum equale; sed circulo est dare quadratum majus, scil. quadratum circulo circumscriptum, et quadratum minus, scil. quadratum inscriptum, igitur etiam est dare quadratum circulo equale. 2°. *sic: si non esset dare quadratum circulo equale, sequeretur, quod fieret transitus de majore ad minus, sive de extremo ad extremum transeundo per omnia media, et tamen nunquam perveniretur ad equale vel ad medium; sed hoc est falsum, igitur probo consequentiam, quia sit unum quadratum circulo inscriptum et incipiat hoc continue augeri uniformiter donec fiat majus circulo; si igitur fuit aliquando circulo equale, habetur propositum, si non, transitus factus est de*

---

* Vergl. Bretschneider, Die Geometrie und die Geometer vor Euclides, 1870, S. 100 etc.

** Aelteste Euclid-Ausgabe nach Campanus, Venedig 1482, S. 2.

minore ad majus respectu istius circuli et nunquam perventum est ad equale. 3°. sic: sicut se habet sphera ad cubicari, ita circulus ad quadrari: sed sphera potest cubicari, ut patet, si aquam replentem vas sphericum infundamus ad vas quadraticum sive cubicum.

*Oppositum arguitur sic: si circulus potest quadrari, quadratum posset circulari; tenet consequentia, cum non videatur esse major ratio de uno quam de alio: falsitas consequentis videtur tenere, ex eo quod non videtur esse tradita aliqua ars quadratum circulandi. 2°. sic: circulum quadrare est quadratum equale circulo invenire, sed hoc invenire est impossibile, quia si latera quadrati extendantur equaliter a centro, superficies circularis erit multo capacior quam erat ante ipsum quadratum, quod patet ex libello de corporibus isoperimetris, ubi dicitur, sphera omnium corporum isoperimetrorum esse maximum. Item confertur ex alio, quia non potest inveniri quadratum cujus medietas sit equalis medietati circuli, igitur nec potest reperiri quadratum quod sit equale circulo; tenet consequentia, quia, quorum dimidia sunt inequalia, et ipsa; antecedens probatur, quia omnis figura rectilinea sub angulis continetur, quibus impossibile est, angulos semicirculi esse equales, igitur nullius circuli medietas medietati quadrati potest esse equalis; tenet consequentia, quia per equalitatem angulorum Euclides et Campanus probant equalitatem figurarum, sicut patet in 4ª propositione et in commento ejusdem primi Euclidis quae incipit: omnem duorum etc. Antecedens quoad primam ejus partem patet, scil. quod omnis figura rectilinea sub angulis continetur, quia si non sub angulis sed sub angulo posset contineri, sequeretur quod duae lineae rectae possent claudere superficiem, quod est contra ultimam petitionem primi Euclidis: sed quoad secundam partem patet, scil. quod anguli rectilinei et anguli semicirculi non possunt esse equales: nam hoc demonstratum est supra (?) in 3. hujus scil. Euclidis. In ista questione primo distinguendum est de quadratura circuli; 2°. ponendae sunt conclusiones et redeundum (?) est quesito (?).**

Quantum ad primum, sciendum (est) quod quadraturam circuli possumus intelligere quinque modis. Uno modo quadrare circulum est ipsum duabus dyametris orthogonaliter se secantibus in centro in quatuor partes equaliter dividere, et isto modo loquitur Campanus in theorica sua et multi alii doctorum de quadratura circuli, quando circulum jubent quadrari. Secundo modo per quadraturam circuli possumus intelligere, ipsum in quadratum vel in figuram aliqualiter similem quadrato reducere (reduci) posse per circumdecisionem et earum situs transpositionem, et isto modo rudes loquuntur et intelligunt de quadratura circuli. Tertio modo per quadraturam circuli possumus intelligere inventionem alicujus quadrati, non tamen quod sit equale circulo, sed latera ejus simul juncta sunt equalia circumferentiae circuli in rectum extensae,

---

* Die beiden letzten Worte sind sehr undeutlich geschrieben; sehr wahrscheinlich ist gemeint, es sei am Schlusse eine Recapitulation über das Ganze vorzunehmen.

et isto modo Campanus quadravit circulum. Quarto modo possumus intelligere per quadrare circulum invenire quadratum equale circulo, cujus latera simul juncta cum hoc (?) sint equalia circumferentiae circuli in rectum extensae. Quinto modo possumus intelligere per quadraturam circuli invenire unum quadratum equale circulo. — Secunda distinctio est ista, quod quadratura circuli 3°. *et* 5°. *modo dicta, quaedam est ad sensum, quaedam ad intellectum, et quaedam ad utrumque. Quadrare circulum tertio modo ad intellectum est probare aliquod quadratum cujus latera simul juncta sunt equalia circumferentiae circuli in rectum extensae, et isto modo non est dubium quin circulus sic quadrari possit, quia non est dubium quin aliqua linea recta sit equalis circumferentiae in rectum extensae, quae si in* 4 *partes equales dividatur, et partes ad invicem ad angulos rectos jungantur, constituunt unum quadratum. Quadrare autem circulum tertio modo ad sensum est invenire unum quadratum, cujus latera simul juncta constituunt unam lineam, quae si objiceretur visui una cum circumferentia circuli in rectam extensa, visus nequaquam posset ponere differentiam inter illas, sed judicaret unam esse tantam quantam aliam. Sic similiter quadratura circuli* 5°. *modo dicta, quaedam est ad intellectum, ut invenire unum quadratum et hoc demonstrative probare esse equale circulo: et quaedam est ad sensum, ut facere et invenire unum quadratum, inter quod et aliquem circulum sensus nequit ponere differentiam, nec considerare quae istarum superficierum sit majoris capacitatis, ymo judicat, unam alteri esse equalem. Quadrare autem circulum* 3°. *modo ad utrumque, scilicet tam ad sensum quam ad intellectum, est aliquod quadratum invenire et demonstrative probare, quod illius latera simul juncta sint equalia circumferentiae alicujus circuli in rectam extensae, et cum (?) hoc quod inter latera illius quadrati simul juncta et circumferentiam circuli in rectam extensam sensus non posset ponere differentiam: sic conformiter dicamus de quadratura circuli* 5°. *modo dicta ad utrumque scil. tam ad sensum quam ad intellectum.*

Quantum ad secundum principale sit prima conclusio ista: quadratura circuli primo modo dicta est possibilis: hoc patet cuilibet intuenti, quare non oportet ipsam modo demonstrare. 2ª. *conclusio est, quod loquendo de quadratura circuli secundo modo dicta, scil. quod istae partes circumferentiae circumjactae constituant quadratum equale circulo, dico quod est impossibilis nec scibilis nec demonstrabilis; probatur, quia, postquam partes circumferentiae sic sunt circumjactae, non resultat figura quadrata, cum non omnes ejus anguli sunt recti, ymo nullus ejus angulus est rectus: et ex alia, quia ista figura non est equalis circulo ex eo quod est circulo inscripta. Si tamen intelligitur, quod circumferentia potest sic dividi in quatuor partes equales quae per earum transpositionem constituunt talem figuram aliqualiter similem quadrato, non est dubium quin hoc sit possibile, sicut possibile est quadrare circulum primo modo. Tertia conclusio: quadratura circuli tertio modo dicta est possibilis et ad sensum et ad intellectum. Probatur primo quoad sensum per Campanum qui sic quadravit circulum, asserans secundum assertionem multo-*

rum philosophorum, circumferentiam circuli continere diametrum ter et septimam ejus partem, et cum diameter sit linea recta, patet quod, si tres diametros cum septima parte ejusdem diametri ad invicem jungamus, constituent unam lineam rectam equalem circumferentiae circuli in rectam extensae, quae si visui objiceretur una cum circumferentia illius circuli in rectam extensa, visus nequit ponere differentiam inter eas, sed penitus judicaret eas esse equales, etiam adhuc si una alteri supponeretur, et ista linea tunc divideretur in quatuor partes equales, et si fieret unum quadratum ex illis, esset quadrare circulum 3°. *modo et hoc est possibile, igitur etc. Quod autem quadratura circuli* 3°. *modo dicta sit possibilis ad intellectum, patet auctore Aristotelis in praedicamentis, ubi dicit, quadratura circuli, si est scibilis, nondum scita; hoc autem non intellexit de quadratura circuli primo modo dicta, quia illa est scita, nec de quadratura* 2°. *modo dicta, quia illa est impossibilis, nec* 4°. *modo dicta, quia ista etiam est impossibilis, ut statim probabitur, nec* 5°. *modo dicta, quia ista est scita, ut patebit in una conclusione ponendarum: ergo intellexit de quadratura* 3°. *modo dicta. Ista enim, quamvis sit scibilis forte, nondum est scita, ex eo quod forte nondum per artem est inventum nec demonstratum ad intellectum circumferentiam circuli habere se in proportione tripla sesquiseptima ad diametrum, nec aliquam lineam rectam equalem circumferentiae: nihilominus est demonstrabile ad intellectum quamvis difficile, et ideo quadratura ipsius circuli ipsius Campani est ad sensum non ad intellectum. Quarta conclusio: quadratura circuli quarto modo dicta est impossibilis, scil. aliquod quadratum esse equale circulo, cujus latera simul juncta sint equalia circumferentiae circuli in rectam extensae: haec (conclusio) patet ex eo quod figura circularis inter omnes alias est capacissima. Breviter de quadratura circuli nec primo modo, nec secundo, nec tertio, nec quarto modo principaliter intendo, sed de quadratura circuli* 5°. *modo dicta principaliter intendo, scil. demonstrative probare aliquod quadratum esse equale circulo. Quinta conclusio ad probandum quadraturam circuli hic intentam sit ista: omnis figura rectilinea equiangula et equilatera est equalis triangulo orthogono, cujus alterum laterum rectum angulum continentium est equale lineae rectae, quam omnia latera illius figurae simul juncta constituunt, et reliquum laterum angulum rectum constituentium equale lineae a centro ejusdem figurae ad aliquod suorum laterum perpendiculariter ductae: verbi gratia: sit figura rectilinea equilatera* .a.b.c.d. *et equiangula, cujus centrum sit* .e., *ducaturque linea a centro* .e. (Fig. 11) *usque ad aliquod latus illius figurae perpendiculariter, scil. ad latus* .a.b., *tangens latus* .a.b. *in puncto* .f., *sitque triangulus orthogonus* .e.f.g., *cujus alterum laterum rectum angulum constituentium, scil.* .e.g. *sit equale omnibus lateribus illius figurae simul junctis, et reliquum laterum rectum angulum constituentium, scil.* .e.f. *sit equale lineae, vel sit ipsamet linea perpendiculariter ducta a centro* .e. *ad latus* .a.b. *tangens ipsum in puncto* .f.: *tunc dico quod figura* .a.b.c.d. *est equalis triangulo* .e.f.g. *Hoc probatur sic: Illa tota sunt equalia, quorum partes similis de-*

nominationis unius sunt equales partibus similis denominationis alterius; sed modo ita est, quod partes similis denominationis figurae equiangulae et equilaterae .a.b.c.d. *sunt equales partibus similis denominationis trianguli* .e.f.g., *igitur etc.; major est nota per unam propositionem quinti Euclidis, quae sic dicit: si fuerint quotlibet quantitates aliarumque totidem equemultiplices aut singulae singulis equales, necesse est, quemadmodum una earum, totumque ex his aggregatum ad omnes illas pariter acceptas similiter se habere. Sed minor probatur. ducam enim a centro* .e. *ad quemlibet angulum figurae praedictae* .a.b.c.d. *lineam rectam et erunt quatuor trianguli equales, scil.* .e.b.a., .e.b.c., .e.c.d. *et* .e.d.a., *qui ex eo sunt equales quod cujuslibet latera unius sunt equalia lateribus alterius, et quilibet istorum triangulorum est quarta pars figurae equilaterae et equiangulae* .a.b.c.d. *Rursus dividam latus* .e.g. *trianguli* .e.f.g. *in* 4^or^. *partes equales, quaelibet illarum partium erit equalis uni lateri figurae* .a.b.c.d., *quarum una partium lateris* .e.g. *sit* .e.h., *altera* .h.l., 3^a^. .l.k., 4^a^. .k.g. *Postea ducam a puncto* .f. *ad punctum* .h. *lineae* .e.g. *lineam* .f.h., *et ad punctum* .l. *lineam* .f.l., *et ad punctum* .k. *lineam* .f.k., *et erit triangulus* .e.f.g. *resolutus in quatuor triangulos equales, ex eo quod omnes illi trianguli quatuor cadunt super equales bases, et altitudo omnium eorum est linea* .e.f., *quare per primam sexti Euclidis erunt equales. Et similiter quilibet triangulorum* .e.f.g. *trianguli est equalis cuilibet triangulorum figurae* .a.b.c.d., *ex eo quod basis cujuslibet trianguli trianguli* .e.f.g. *est equalis basi cujuslibet trianguli figurae* .a.b.c.d., *et una est altitudo omnium, scil. linea* .e.f., *quare per primam sexti Euclidis sequitur eos esse equales; prima enim sexti Euclidis dicit sic: si duarum superficierum equedistantium laterum sive triangulorum fuerit altitudo una, tanta erit alterutra earum ad alteram, quanta sua basis ad basim alterius. Erunt igitur quatuor partes seu quatuor quartae trianguli* .e.f.g. *equales quatuor quartis figurae equiangulae et equilaterae* .a.b.c.d.: *quare sequitur, cum partes similis denominationis figurae equilaterae et equiangulae* .a.b.c.d. *sint equales totidem partibus similis denominationis trianguli* .e.f.g., *sequitur totam superficiem figurae* .a.b.c.d. *esse equalem toti superficiei trianguli* .e.f.g., *quod fuit probandum. Et idem esset, si talis figura equilatera et equiangula esset pentagona, vel exagona, vel quotcunque angulorum, vel quotcunque laterum equalium.*

Sexta conclusio: omnis circulus est equalis triangulo orthogono cujus alterum laterum rectum angulum continentium est equale circumferentiae in rectam extensae, et reliquum latus rectum angulum continentium est equale semidiametro ejusdem circuli. Ad quam conclusionem probandam suppono primo, omnem figuram alteri inscriptam illi cui inscribitur minorem esse, ejusque latera simul juncta lateribus illius cui inscribitur breviora. 2°. *suppono, omnium triangulorum orthogonorum illum majorem esse, cujus ambo latera angulum rectum constituentia sunt majora reliquis lateribus reliqui anguli orthogoni angulum rectum constituentibus, aut alterum reliquo unius et alterum reliquo ipsum respiciente equale, sicut patet in his triangulis* .e.b.c. *et* .e.d.f.

et .e.d.a.* 3°. *suppono, propositis duabus quantitatibus continuis a majore majorem minore posse resecare(i). Ista patet ex eo quod quilibet excessus, quo una quantitas aliam excedit, est divisibilis. His suppositis probo conclusionem sic: Esto enim circulus* .a.b., *cujus centrum sit* .e., *sitque triangulus orthogonus* .e.b.c., *cujus latus* .e.c. *sit equale circumferentiae circuli* .a.b. *in rectam extensae, et reliquum latus rectum* .e.b. *sit semidiameter, seu equale semidiametro circuli* .a.b. *Tunc dico triangulum* .e.b.c. *esse equalem circulo* .a.b (Fig. 12.) *Probatur sic: quia triangulus* .e.b.c. *nec est major nec est minor circulo* .a.b., *igitur sibi equalis: tenet consequentia, quia omnes quantitates, quarum una non est major nec minor alia, sunt equales. Sed probo antecedens, et primo quod triangulus* .e.b.c. *non sit minor circulo* .a.b. *Nam si sic, tunc per tertiam suppositionem a circulo* .a.b. *figura major triangulo* .e.b.c. *posset resecari, sed hoc est falsum: nam sit illa figura poligonia equilatera et equiangula circulo inscripta* .f.g.h.i.k.l.m.n., *a cujus centro* .a. *ducatur linea* .a.o. *perpendiculariter super latus* .f.g. (Fig. 13), *tunc per conclusionem quintam jam ante demonstratam illa figura poligonia et octogonia erit equalis triangulo orthogono, cujus alterum laterum rectum angulum continentium est equale omnibus lateribus illius figurae simul junctis, et reliquum est equale lineae perpendiculari* .a.o.; *sed latera praedictae figurae simul juncta circumferentia circuli in rectam extensa sunt breviora, ut patet per secundam partem primae suppositionis, et linea* .a.o. *est brevior semidiametro, igitur triangulus orthogonus, cujus duo latera rectum angulum constituentia sunt eaedem lineae, est minor triangulo orthogono* .e.b.c *per secundam suppositionem, quem scil. triangulum* .e.b.c. *velles esse equalem circulo* .a.b.: *quare etiam sequitur figuram illam poligoniam a circulo resecatam non esse majorem triangulo* .e.b.c.; *quare sequitur, quod circulus* .a.b. *non est major triangulo* .e.b.c. *quod fuit probandum. Nec potest dici, quod triangulus* .e.b.c. *sit major circulo* .a.b., *quia sic a triangulo* .e.b.c. *posset una quantitas major circulo* .a.b. *resecari per* 3^am^. *suppositionem, sed hoc est falsum, quia si sic, tunc resecetur ab eo una quantitas seu una figura poligonia, quae sit* .a.p.q.r.s.t.v.x. *quae si est major circulo* .a.b. *potest sibi, vel equali sibi, esse circumscripta, quam tamen, si est circumscripta circulo* .a.b. *probo, quod impossibile est, ipsam esse minorem triangulo* .e.b.c. (Fig. 14). *Nam si esset minor triangulo* .e.b.c. *et resecata ab eo, sequeretur, triangulum orthogonum, cujus alterum laterum rectum angulum constituentium est equale omnibus lateribus figurae circumscriptae simul junctis et reliquum laterum equale lineae ductae a centro ejusdem figurae perpendiculariter ad unum suorum laterum, esse minorem triangulo* .e.b.c., *quod est falsum: tenet consequentia per quintam conclusionem prius demonstratam, ex eo quod iste triangulus est equalis illi figurae: falsitas con-*

---

* Bei den beiden letzten Dreiecken sind die Buchstaben nicht richtig angegeben; es soll wohl heissen: .e.a.f. *et* .c.d.a. Uebrigens ist diese Suppositio höchst überflüssig.

sequentis patet, quia omnia latera figurae circumscriptae sunt longiora circumferentia circuli inscripti in rectam extensa, ut patet per secundam partem primae suppositionis, quae quidem latera omnia figurae circumscriptae simul juncta unum de lateribus trianguli equalis illi figurae poligoniae angulum rectum continentibus constituunt, et reliquum de eisdem lateribus angulum rectum constituentibus est equale semidiametro: igitur per secundam partem secundae suppositionis triangulus talis orthogonus, qui est equalis figurae illi poligoniae circumscriptae circulo, est major triangulo .e.b.c., *quare etiam figura illa poligonia circulo sic circumscripta est major triangulo* .e.b.c., *quare sequitur, quod non est sibi minor, nec ab eo resecata, et eodem modo arguerem de quacunque alia figura poligonia majori ipso circulo. Sic igitur probatum est, quod triangulus* .e.b.c. *non est major nec minor circulo* .a.b., *quare sequitur, quod sit equalis, quod fuit probandum.*

7ª. *conclusio: quadratura circuli quinto modo dicta est scibilis et scita, demonstrabilis et demonstrata: probatur: demonstratum est circulo equalem triangulum assignare, et demonstratum est quadratum equale triangulo invenire, igitur demonstratum et scitum est, quadratum equale circulo invenire: tenet consequentia, quia quaecunque sunt equalia inter se, quicquid est equale uni, est equale alteri: sed antecedens quoad primam ejus partem patet ex dictis, et quoad secundam ejus partem patet ex ultima secundi Euclidis, quae dicit, dato trigono equum quadratum invenire.*

Ad rationes, et primo ad rationes ad oppositum. Illae enim probant intentum: verumtamen (?) ponentes illas rationes ad alium intellectum intendebant de quadratura circuli, et ad illum intellectum, Aristoteles improbavit Brissonem et Antifontem: Brisso forte intendebat, quod esset dare quadratum equale circulo, cujus omnia latera simul juncta essent equalia circumferentiae in rectum extensae, et hoc est impossibile sicut dictum est in una conclusione, quamvis etiam ratio Brissonis bene probet quadraturam circuli, quamvis non ad intellectum Brissonis, cum hoc tamen stat et verum est, quod major illius rationis non est universaliter vera. quia angulo portionis datur bene angulus rectilineus major, sicut est angulus rectus, et angulus rectilineus minor: non tamen datur angulo portionis angulus rectilineus equalis, et igitur, quamvis verum sit quod ratio prima concludit, tamen major illius rationis non est universaliter vera. Similiter dico de* 2ª.: *quamvis verum sit, quod ipsa concludit, tamen illud, quod reputatur esse falsum in ea, est valde possibile: potest enim fieri transitus de minore ad majus transeundo quodlibet punctum inter majus et minus, et nunquam pervenire ad equale. Verbi gratia: aliquis enim angulus rectilineus est minor angulo portionis et aliquis est major*

---

* Unter *angulus portionis* ist der Winkel verstanden gebildet von der Peripherie und einer Sehne; er spielt nebst dem *angulus contingentiae* oder *contactus*, gebildet von der Peripherie und einer Tangente, bei Euclid, Campanus und späteren Geometern eine wichtige Rolle; noch Clavius widmet in seiner 3. Euclid-Ausgabe diesen Winkeln 13 Folioseiten (S. 133—145 und S. 245)!

eodem, sicut est angulus rectus; et possibile est quod angulus rectilineus acutus continue augeatur, donec fiat equalis angulo recto, et tamen nunquam fit equalis angulo portionis, quod patet, si aliqua linea recta una cum diametro alicujus circuli constitueret angulum rectum, et (diameter) continue moveretur versus lineam contingentem circulum, donec ipsum cooperiret, et istud satis clare ponit Campanus et deducit super 15. propositionem tertii Euclidis. 3ª. ratio probat verum, sicut est illud, quod aliae rationes intendunt concludere.

Postea ad rationes quae videntur esse contra conclusionem principaliter intentam. Ad primam: quando dicitur, si circulus posset quadrari, quadratum posset circulari, concedo ad istum intellectum, quod possibile est invenire circulum equalem quadrato, sicut est possibile invenire quadratum equale circulo, et hoc ad intellectum positum in questione; et quando dicitur, si latera alicujus quadrati extendantur equaliter a centro, non erit superficies equalis superficiei prius extentae, certe verum est, nec hoc oportet ad quadraturam circuli: ymo dictum est, quod impossibile est, aliquod quadratum esse equale circulo, cujus omnia latera simul juncta sint equalia circumferentiae in rectum extensae. Ad aliam: quando dicebatur, impossibile est invenire quadratum, cujus medietas sit equalis medietati circuli, hoc nego, et quando dicebatur, data aliqua medietate alicujus quadrati, anguli istius figurae non sunt equales aliquibus angulis semicirculi, adjuto (?), et quando dicitur, igitur nec medietas quadrati medietati circuli est equalis, nego consequentiam, et quando dicitur, Euclides et Campanus per equalitatem angulorum probant equalitatem figurarum, bene volo, ex hoc tamen non sequitur, quod inequalitatem angulorum sequeretur inequalitas figurarum, et cetera.

Aus dieser Abhandlung ersehen wir, dass Albertus de Saxonia den gleichen Fehler begeht; wie alle seine Vorgänger seit Boetius, die sich mit der Kreisquadratur, resp. Ausmessung des Kreises beschäftigt haben, nämlich das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser genau gleich $3\frac{1}{7}$ anzunehmen. Boetius selbst bedient sich in seiner Geometrie* bei Berechnung der Fläche eines Kreises und eines Halbkreises des Verhältnisses $\frac{22}{7}$; es ist indess anzunehmen, dass er die Ungenauigkeit dieses Werthes wohl kannte, denselben aber als für die Praxis genügend erkannte und deshalb bei seinen Flächenberechnungsbeispielen anwandte. Es geht dies auch aus einer Stelle in seinem Commentar zu den Kategorieu des Aristoteles hervor, wo Boetius erklärt, was man unter Quadratur des Kreises verstehe, aber kein weiteres Verfahren angiebt; er fügt dann hinzu: „*Aristotelis quidem temporibus non fuisse inventum videtur (scil. quadratum aequale circulo): post vero repertum est, cujus quoniam longa demonstratio praetermittenda est.*"** Nach Boetius

* Edid. Friedlein, Leipzig 1867, S. 423 u. 424.

** Nach Ersch und Gruber: Allgemeine Encyclopädie, 11. Theil, schrieb Boetius auch über die Quadratur des Kreises, welches Werk aber verloren gegangen sei. Woher Ersch und Gruber diese Angabe haben, ist mir nicht bekannt.

haben Gerbert, Adelbold von Utrecht und Franco von Lüttich* bei der Berechnung des Kreises und der Kugel das Verhältniss $\frac{22}{7}$ angewandt, aber nur der Letztere hat sich mit der eigentlichen Quadratur beschäftigt, ist jedoch zu keinem Ziele gelangt, da ihm die Verwandlung des Rechtecks in ein Quadrat noch nicht bekannt war.** Nach Franco von Lüttich wird als nächster Verfasser einer Kreisquadratur genannt Campanus von Novarra. Diese kurze Schrift findet sich an mehreren Orten gedruckt, so in dem Werke von Lucas Gauricus, betitelt: „Tetragonismus, id est circuli quadratura per Campanum, Archimedem Syracusanum atque Boetium, mathematicos perspicacissimos adinventa. Venetiis 1503"; von Joh. Cesarius Juliacensis nebst einigen anderen kleineren Abhandlungen unter dem Titel: „De quadratura circuli demonstratio ex Campano", 1507, und am Schlusse der Geometria speculativa des Thomas Bradwardinus unter dem Titel: „Tractatus de quadratura circuli editus a quodam archiepiscopo ordinis fratrum minorum. Paris 1530." Dieser letztere Titel und auch der Inhalt der Schrift haben Zweifel darüber aufkommen lassen, ob dieselbe dem Campanus angehöre; allerdings liesse diese Autorschaft einen bessern Inhalt erwarten, allein Chasles*** ist doch vielleicht in der scharfen Verurtheilung etwas zu weit gegangen; freilich wenn Campanus in seinem Quadrate, dessen Seite $5\frac{1}{2}$ von den 7 gleichen Theilen eines Kreisdurchmessers hat, ein solches gefunden zu haben glaubte, dessen Fläche gleich derjenigen des Kreises sei, so hat Chasles Recht; wenn aber Campanus die Quadratur des Kreises so auffasste, es sei ein Quadrat zu finden, dessen Umfang gleich demjenigen des Kreises ist, so hat er die Aufgabe bei Zugrundelegung des Verhältnisses $\frac{22}{7}$ richtig gelöst, und in der That hat Albertus de Saxonia eine zu gute Meinung von den Kenntnissen des Campanus, als dass er ihn der ersten Auffassung fähig hielte, er citirt ihn als Denjenigen, der unter Quadratur des Kreises die Auffindung eines Quadrates von gleichem Umfange mit dem Kreise verstand. Das war nun allerdings eine sehr einfache Aufgabe, wenn das Verhältniss $\frac{22}{7}$ festgesetzt war, und von diesem Gesichtspunkte aus bleibt die Quadratur des Campanus immerhin ein schwaches Product.

Dass die Abhandlung den Thomas Bradwardinus zum Verfasser

---

* Für die ersten beiden vergl. Pez, „Thesaurus anecdot. nov. Tom. III.", und für den letzteren die Ausgabe seiner Quadratura durch Winterberg im Supplementheft zum 27. Jahrg. der Zeitschr. f. Math. u. Phys.

** Nach Ziegelbauer: „Historia rei literariae O. S. Benedicti. Augsburg und Würzburg 1754", Bd. IV S. 309, hat auch Hermann Contractus eine Abhandlung „De quadratura circuli" geschrieben. Vergl. auch Chasles (deutsch von Sohncke), Geschichte der Geometrie, S. 592.

*** A. a. O. S. 602 u. 611.

habe, welche Frage Chasles den Worten auf S. 614* nach zu schliessen als eine offene betrachtet, kann mit ziemlicher Sicherheit verneint werden. Denn erstens würde zur Zeit des Albertus de Saxonia, der nur etwa 30 Jahre jünger war als Bradwardinus, eine von diesem Letzteren verfasste Kreisquadratur wohl kaum dem Campanus zugeschrieben worden sein, und zweitens, was noch entscheidender ist, hat Bradwardinus in seiner Geometria speculativa (quinta conclusio sexti capituli tertii tractatus) selbst eine Kreisquadratur gegeben und zwar eine auf das Verhältniss $\frac{22}{7}$ gestützte richtige Quadratur. Er verwandelt nach dem von ihm citirten Satze des Archimedes, dass jeder Kreis einem rechtwinkligen Dreieck an Fläche gleich sei, dessen eine Kathete der Umfang des Kreises und die andere der Radius desselben sei, den Kreis in ein gleich grosses Rechteck und dieses in ein Quadrat.** Endlich mag auch noch darauf aufmerksam gemacht werden, dass Bradwardinus nicht dem Franziskanerorden angehört hat;*** freilich passt jener Titel noch weniger auf Campanus, der weder Erzbischof war, noch dem Franziskanerorden angehörte. † Wir glauben also die Frage über den Ursprung der sogenannten Campanus'schen Quadratur insoweit als entschieden betrachten zu dürfen, als dieselbe nicht den Thomas Bradwardinus zum Verfasser hat; ob dieselbe nun von Campanus selbst, oder von einem früheren oder von einem in der Zeit zwischen Campanus und Bradwardinus lebenden Autor herrühre, ist nicht mit Sicherheit zu behaupten; die Thatsache aber, dass Albertus de Saxonia und spätere Autoren sie dem Campanus zuweisen und nur eine einzige Quelle sie einem Ungenannten zuerkennen will, spricht eher für die erstere Ansicht.††

Es ist nun die Abhandlung des Albertus de Saxonia eine ausführlichere Darstellung der von Bradwardinus in seiner Geometria speculativa gegebenen Kreisquadratur; Albertus beweist die Sätze, die Bradwardinus nur citirt, und fügt noch andere hinzu; ausserdem giebt er eine Uebersicht über die verschiedenen Auffassungen, die sich bezüglich dieses Problems geltend gemacht haben. Wir glauben aber nicht, dass Albertus jenes Werk des englischen Gelehrten gekannt

* „Nach dem, was wir gesagt haben, wird man vermuthen, dass sie ebensowohl den Namen des Bradwardin, als den des Campanus führen darf.“

** Dies führt Chasles auch an S. 613. Um so weniger sind obige Worte zu begreifen; wir vermuthen, dass statt „ebensowohl“ es heissen sollte „ebensowenig“.

*** Vergl. Fabricius, Biblioth. med. et inf. latin., Bd. I.

† Nach Libri: Histoire des sciences mathématiques en Italie, Tome II p. 49, war er Caplan des Papstes Urban IV. und Canonicus von Paris.

†† Pitseus, De illustribus Angliae scriptoribus, pag. 471, ist meines Wissens der Erste, der aus diesem *„quodam archiepiscopo“* seinen Landsmann Bradwardinus machte; Baleus, Scriptorum illustrium mag. Brytann. catalogus, dem Pitseus meistens folgt, nennt unter den Werken Bradwardin's keine *quadratura circuli.*

hat, sonst hätte er wahrscheinlich seinen Namen nicht verschwiegen, wie er ja in der That ältere (Campanus) und sogar die ältesten Mathematiker citirt, die sich mit diesem Problem beschäftigt haben, wie Antiphon und Bryson. Beide, Bradwardinus und Albertus, nehmen $\frac{22}{7}$ als das genaue Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser an, was beim Ersteren um so mehr auffallen muss, als er in seiner Quadratur die Schrift des Archimedes, „De mensura circuli" citirt. Es führt uns dies auf den Gedanken, Bradwardinus habe diese Schrift selbst nicht gesehen, sondern jene Citate aus Archimedes auf indirectem Wege erhalten. Welches ist nun aber diese indirecte Quelle? Die Antwort hierauf findet sich nach unserer Ansicht in dem von Albertus gegebenen Beweise des oben schon angeführten Satzes, dass jeder Kreis gleich einem rechtwinkligen Dreieck sei etc. Dieser Beweis ist im Princip derselbe, den schon Archimedes in seiner Kreisrechnung sehr kurz und demnach nicht leicht verständlich, nach ihm aber ausführlicher Zenodoros gegeben hat, und der dann aus der nicht mehr vorhandenen Schrift* des Letzteren in die Collectio des Pappos (V. Buch)** und in den Commentar des Theon von Alexandrien zum Almagest des Ptolemäos*** übergegangen ist. Der Unterschied zwischen dem Beweise des Albertus und demjenigen des Zenodoros besteht blos darin, dass Albertus das etwas schwierige Lemma (Pappos-Ausgabe von Hultsch, 3. Bd. S. 1195), welches beweisen soll, dass man durch fortgesetzte Verdoppelung der Seitenzahl des umgeschriebenen Vielecks endlich zu einem solchen gelangt, dessen Fläche kleiner ist als diejenige eines den Kreis an Fläche übertreffenden Rechtecks oder rechtwinkligen Dreiecks, durch den Grundsatz ersetzt: „*Propositis duabus quantitatibus continuis, a majore majorem (partem) minore posse resecari.*" (Wenn man zwei stetige Grössen hat, so kann von der grösseren stets ein Theil weggenommen werden, der grösser ist als die kleinere Grösse.) Wir können nicht wohl annehmen, Albertus habe diesen schönen, aber keineswegs leichten Beweis selbstständig gefunden, es wäre höchstens denkbar, er habe ihn aus dem kurzen Beweis der Archimed'schen Kreisrechnung reconstruirt. Allein wir haben schon einmal darauf hingewiesen, dass es höchst unwahrscheinlich sei, dass die Archimed'sche Kreisrechnung den beiden Mathematikern Bradwardinus und Albertus vor Augen gelegen habe, sonst hätte wohl auch der eine oder andere von ihnen darauf aufmerksam gemacht, dass $\frac{22}{7}$ nicht das genaue

---

* *περὶ ἰσομέτρων σχημάτων.*

** Ausgabe von Hultsch, 1. Bd S. 309 335.

*** Baseler Ausgabe vom Jahre 1538, S. 11—17. Eine lateinische Uebersetzung dieser Abhandlung giebt Hultsch in seiner Pappos-Ausgabe, 3. Bd. S. 1189 bis 1211.

Verhältniss von Umfang zum Durchmesser sei; es bleibt uns also nichts Anderes übrig, als anzunehmen, die beiden mittelalterlichen Mathematiker haben aus dem Commentar des Theon (resp. aus der Schrift des Zenodoros über die isoperimetrischen Figuren) oder aus dem V. Buche der Collectio des Pappos geschöpft. Da Pappos das ganze Mittelalter hindurch von keinem mathematischen Autor citirt wird, so wird die Wahrscheinlichkeit für Theon's Commentar zum Almagest um so grösser.

Die Abhandlung des Zenodoros über die isoperimetrischen Figuren ist uns allerdings auch noch in einer Schrift eines griechischen Anonymus unter demselben Titel erhalten, welcher nach Theon gelebt haben muss, da dieser in der Abhandlung citirt wird. Diese Schrift ist von Hultsch ebenfalls in seine Pappos-Ausgabe aufgenommen und mit einer lateinischen Uebersetzung begleitet worden.* Eine solche Uebersetzung war aber schon im Mittelalter und zwar im 13. oder spätestens in der ersten Hälfte des 14. Jahrhunderts vorhanden und befindet sich jetzt noch als Manuscript im Codex F. II. 33 der Basler Universitätsbibliothek.** Wir haben diese Handschrift einer genaueren Prüfung unterworfen und in der That in ihr die wortgetreue Uebersetzung jener Abhandlung des griechischen Anonymus gefunden; auch die Figuren stimmen bis auf wenige kleinere Fehler mit denen der griechischen Schrift überein. Es ist also höchst wahrscheinlich, dass auch diese Schrift jenen beiden Mathematikern des 14. Jahrhunderts bekannt war, und dass jenes Libellus de corporibus isoperimetris, welches Albertus in seiner Quadratura (s. oben S. 88) citirt, diese Schrift über die isoperimetrischen Figuren war.*** Dass es aber nicht diese Schrift allein sein kann, die Bradwardinus und Albertus zu Gebote stand, zeigt der Umstand, dass jener Beweis des Satzes von der Gleichheit eines Kreises und eines rechtwinkligen Dreiecks, den Bradwardinus ebenfalls kennt, aber nicht wiedergiebt,† in der Schrift des Anonymus fehlt;†† also müssen die beiden Mathematiker noch andere Quellen gehabt haben.†††

---

* Bd. III S. 1138—1165.

** Vergl. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, S. 605. Wie Herr Cantor in der Zeitschrift für Math. u. Phys. 1876, hist.-lit. Abth. S. 79 mittheilt, wurde er zuerst von Herrn Curtze auf dieses Manuscript aufmerksam gemacht.

*** Eigenthümlicher Weise citirt er den Satz über die Kugel, statt den entsprechenden über den Kreis.

† *„Quoniam eam demonstrare requireret majorem tractatum quam sit istud capitulum.*

†† Der Satz ist nur citirt. Vergl. Hultsch, Pappos-Ausgabe, 3. Bd. S. 1161.

††† Thomas Bradwardinus war ohne Zweifel der selbstständigere Arbeiter als Albertus de Saxonia, was schon seine Leistungen über die Sternvielecke beweisen; dennoch glauben wir nicht, dass die isoperimetrischen Sätze, die Bradwardinus im 5. Cap. des II. Tractatus seiner Geometria speculativa aufstellt,

Nach diesem glauben wir berechtigt zu sein, aus der vergleichenden Betrachtung der Geometria speculativa des Thomas Bradwardinus und der hier veröffentlichten Abhandlung des Albertus de Saxonia folgende Schlüsse zu ziehen: 1. Es ist mit ziemlicher Sicherheit anzunehmen, dass den beiden Mathematikern die lateinische Uebersetzung der Schrift des griechischen Anonymus, De figuris isoperimetris, bekannt war. 2. Sie kannten neben dieser Abhandlung noch entweder diejenige des Zenodoros, aufbewahrt im Commentar des Theon zum 1. Buch des Almagest, oder das V. Buch der Collectio des Pappos; das Erstere scheint uns das Wahrscheinlichere. 3. Ziemlich unwahrscheinlich ist, dass sie die Kreisrechnung des Archimedes aus eigener Anschauung kannten.

Zum Schlusse sei es uns gestattet, noch einen Moment auf jene lateinische Uebersetzung der anonymen Schrift über die isoperimetrischen Figuren zurückzukommen, die sich handschriftlich in der Basler Universitätsbibliothek befindet. Herr M. Cantor schreibt in seinen Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik (S. 605): „So müssen beispielsweise die Arbeiten des Zenodoros den Arabern bekannt gewesen sein, weil in einer lateinischen Abhandlung über die isoperimetrische Aufgabe, welche handschriftlich in Basel vorhanden ist, der Name Archimenides vorkommt." Wir haben an der Richtigkeit dieses Schlusses nicht gezweifelt, bis wir jenes Basler Manuscript zu Gesicht bekommen und mit der griechischen Schrift des Anonymus verglichen hatten. Wir fanden hierbei Folgendes: Erstens kommt neben dem Namen Archimenides, der viermal auftritt, auch einmal (in der 7. Propositio) der Name Archimedes, resp. der Dativ Archimedi deutlich geschrieben vor. (Das Nämliche sehen wir in der Geometria speculativa von Bradwardinus, Pariser Ausgabe vom Jahre 1530, wo in der Conclusio de quadratura circuli auch einmal der Genitiv Archimedis neben Archimenidis vorkommt.) Zweitens ist, wie schon erwähnt, die Basler Schrift die wortgetreue Uebersetzung der griechischen Abhandlung des Anonymus, wie sie Herr Hultsch veröffentlicht hat; es fehlt blos die Uebertragung des letzten Alinea, beginnend: „*Λοιπὸν δὲ ἀναγκαῖον*" etc. Die Anlehnung an das griechische Original ist so frappant, dass wir nicht umhin können, einige Beispiele davon zu geben. Die griechischen Wörter *ἰσόπλευρος*, *ἰσοσκελής*, *ἀνισοσκελής* und andere sind unübersetzt ins Lateinische hinübergenommen in den Formen: *ysopleurus*, *ysocheles*, *anysocheles*.

---

sein eigenes Product seien; die Beweise jedoch, die von denen des Zenodoros abweichen, sich aber auch nur auf ganz einfache Specialfälle beschränken, mögen von ihm herrühren; er hielt jedenfalls die ziemlich umfangreichen und schwierigen Beweise des Zenodoros für sein Breve compendium für unpassend, wie er ja auch jenen Beweis des Archimedes aus demselben Grunde weggelassen hat, dafür aber nichts Anderes zu substituiren wusste.

Das Quadrat über der Hypotenuse „τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τὰς ὀρθὰς“ heisst in der Uebersetzung: „*(id) quod a subtendente rectis*“; der Radius des Kreises „ἡ ἐκ τοῦ κέντρου“ heisst lateinisch „*quae e centro*“, das Rechteck aus *ab* und *cd*, „τὸ ὑπὸ τῆς *ab* καὶ τῆς *cd*“ heisst lateinisch „*quod sub* ab *et* cd“ und so noch andere. Wir stellen im Folgenden noch zwei Sätze in beiden Sprachen einander gegenüber:

(Ausgabe von Hultsch S. 1144_5.)

Ἔστω δοθὲν ἀνισοσκελὲς τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ δέον ἔστω ποιῆσαι τὸ εἰρημένον. τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ, etc.	*Esto datus anysocheles trigonus* abg, *et conveniens esto facere quod dictum est. Dividatur* ag *in duo aequalia secundum* d, etc.
(S. 1158_{22}—1160_4.)	
Ὅτι δὲ τὸ ὑπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου καὶ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου διπλάσιον τοῦ κύκλου δέδεικται Ἀρχιμήδει ἐν τῇ μετρήσει τοῦ κύκλου· ἀπέδειξε γὰρ ὅτι πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, ἡ δὲ λοιπὴ τῇ περιμέτρῳ τοῦ κύκλου.	*Quoniam (quod!) vero quod sub ea quae ex semidyametro et perimetro circuli duplum circuli demonstratum est Archimenidi in mensuratione circuli: demonstravit enim quod omnis circulus equalis trigono orthogonio, cujus quae ecentro equalis est uni quae circa centrum (rectum!), reliqua vero perimetro circuli.**

Es ist nun kaum denkbar, dass eine aus dem Griechischen durch das Arabische ins Lateinische übergegangene Schrift so wenig Veränderungen erfahren sollte, wie es bei der vorliegenden der Fall ist, zumal wenn man weiss, in welchem Maasse griechische Schriftsteller durch arabische Uebersetzer entstellt worden sind; wir sind also der Ansicht, die Uebersetzung unserer Schrift sei direct nach dem Griechischen gemacht worden, und erklären uns das Auftreten des Wortes „Archimenides“ folgendermassen: Bevor die Hauptwerke der bedeutenden griechischen Mathematiker aus dem Griechischen ins Lateinische übersetzt waren, also vor der Mitte des 15. Jahrhunderts, kannte man einige derselben durch Vermittelung der Araber, so also auch den Archimedes, aber unter dem Namen Archimenides. Aber auch griechische Manusripte tauchten lange vor jener Zeit hier und da auf, wurden benutzt und übersetzt; durch solche, zu denen wir also auch diese anonyme Schrift rechnen, wurde der Name Archimedes bekannt, so dass also im 14. Jahrhundert

* Diese Uebersetzung ist nicht fehlerlos. Erstens ist hier ὅτι mit *quoniam* statt mit *quod* übersetzt; dann giebt das Wort *semidyametro*, das sonst nirgends in der Abhandlung vorkommt, hier keinen Sinn, es sollte an seiner Stelle *centro* stehen, wie auch weiter unten *radius* oder *semidiameter* wirklich durch *quae e centro* wiedergegeben ist; schliesslich steht am Ende fälschlich *centrum* statt *rectum*, die Benennung *quae circa rectum (angulum)* für Kathete kommt einige Male vor.

beide Namen neben einander gebraucht wurden. Oder es wäre möglich, dass der Uebersetzer unserer anonymen Schrift hier zum ersten Mal auf den Namen Archimedes gestossen wäre, in demselben den durch die Araber bekannten Archimenides vermuthet und diese arabische Bezeichnung als die vermeintlich richtige der als fehlerhaft vorausgesetzten griechischen substituirt hätte; aus Versehen könnte dann einmal der Name Archimedes stehen geblieben sein. Die definitive Erledigung dieser Frage steht übrigens bei Denjenigen, die mit der Ausdrucksweise arabischer mathematischer Schriften vertraut sind, was bei uns nicht der Fall ist; haben die Araber ein besonderes Wort für Radius, so wäre die Frage zu unseren Gunsten entschieden; nennen sie aber den Radius, die Griechen nachahmend, die (Linie) aus dem Centrum, so wäre es immer noch möglich, dass jene Uebersetzung nach dem Arabischen gemacht wäre; dann hätten wir aber in dem Basler Manuscript jedenfalls ein einzig dastehendes Beispiel der Correctheit einer Doppelübersetzung und zwar, was eben das Merkwürdige wäre, einer durch das Arabische gegangenen.*

---

* Wir fanden nachträglich, dass in der Campanus'schen Euclid-Uebersetzung der Radius des Kreises bald mit *semidiameter,* bald mit *(linea) quae e centro* wiedergegeben ist, so dass dieser Punkt für die Erledigung der Frage nicht entscheidend sein kann; auffallend bleibt aber immerhin die wörtliche Uebereinstimmung der lateinischen Uebersetzung mit dem griechischen Text.

Recensionen.

Abriss der Geschichte der Potentialtheorie. Inauguraldissertation von MAX BACHARACH, Assistent für Mathematik und Physik an der königl. Kreisrealschule in Würzburg. Würzburg, Druck der Thein-schen Druckerei. 1883. IV, 78 S.

Unseres Wissens hat der Verf. mit vorliegender Schrift auch einen von der philosophischen Facultät der Universität Würzburg ausgesetzten Preis gewonnen. Wir können, wenn diese Annahme zutrifft, dem Gutachten der Preisrichter nur zustimmen, denn es ist in der That eine tüchtige Arbeit, mit welcher wir es zu thun haben. Die Lehre vom Potential ist eine ungemein umfassende und greift in die verschiedensten Gebiete ein, es war also gewiss nicht leicht, die Theorie sammt ihren mannichfaltigen Anwendungen so darzustellen, dass erstens im geschichtlichen Aufbau sich keine Lücke nachweisen liess, und zweitens eine Uebersicht des reichhaltigen Stoffes ermöglicht wurde. Beides zu erreichen, ist aber dem Verf. wohl gelungen.

In der Einleitung wird gezeigt, wie aus dem Newton'schen Attractionsproblem durch einen glücklichen Griff Lagrange's der Begriff des Potentials sich herausbildete. Hierauf wird die eine Zeit lang aufrecht erhaltene Gegenüberstellung von „Potential“ und „Potentialfunction“ erörtert und abgelehnt. § 3 beschäftigt sich mit der partiellen Differentialgleichung

$$\varDelta V \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

welche Laplace zuerst in diese Form brachte, während Poisson die wichtige und durch einen dreifachen Beweis erhärtete Bemerkung machte, dass für einen innerhalb der wirkenden Masse gelegenen Punkt rechts vom Gleichheitszeichen $-4\pi\varrho$ an die Stelle von 0 zu treten habe. Mancher Leser wird, wie Referent, zu seinem Staunen ersehen, welch' mächtige Literatur durch dieses Laplace-Poisson'sche Theorem ins Leben gerufen worden ist. Weiter schildert der Verfasser die Untersuchungen, welche das erste und zweite Differential des Körperpotentials behandeln und damit für die Ausnahmepunkte und Ausnahmelinien dieser Function die Regeln aufstellen. Bis hierher bezog sich das Potential ausschliesslich auf Gebilde von drei Dimensionen, die Elektrostatik hat aber dazu geführt, auch Flächenpotentiale in Betracht zu ziehen. Der Green'sche Lehrsatz beherrscht

dieses Capitel, und um ihn drehen sich denn auch hauptsächlich die Ausführungen des § 5, welche auch auf die allerneuesten Arbeiten von Paci und Heim Rücksicht nehmen. Das Linien- und Punktpotential wird seiner Einfachheit wegen nur ganz summarisch abgehandelt, während § 7 wieder ausführlicher bei Green, W. Thomson und Gauss verweilt, welch' Letzterer durch seine Studien über den Erdmagnetismus selbstständig zu den auf ganz anderem Wege erlangten Ergebnissen der englischen Analytiker kam. Namentlich der „Gauss'sche Satz des arithmetischen Mittels", wie ihn Carl Neumann später nannte, bildete in den Händen seines Erfinders ein kräftiges Hilfsmittel zur Entdeckung neuer Wahrheiten. Die Darstellung geht nun über zu der functionentheoretischen Begründung der Potentialtheorie, wie sie namentlich angestellt wurden, um für ein gewisses Integral die Existenz eines Minimalwerthes streng zu erweisen, nachdem Green dieselbe nur mittelst einer eigenthümlichen, aber mehr physikalischen, denn mathematischen Ueberlegung, erschlossen hatte. Natürlich wird auch des Dirichletschen Princips und der Bedenken eingehend gedacht, welche sich gegen die in jenem gelegene Hineintragung der Variationsrechnung in die vorwürfige Frage erhoben haben. Eine wichtige Anwendung der allgemeinen Sätze bildet die Lehre von der „äquipotentialen" Massenvertheilung, welche, wie hier dargethan wird, durch Lipschitz, Stahl, Bruns u. s. w. im Anschluss an die Reductionstheoreme von Ivory (besser von Laplace), Chasles und Gauss entwickelt worden ist. Damit ist denn bereits ein halbwegs physikalisches Gebiet betreten; der nächste Paragraph ist speciell dem Potential in der Physik gewidmet und verfolgt das Auftreten dieser wichtigen Function in den verschiedensten Zweigen. Angesichts der äusserst concisen, ja gedrängten Darstellung, welcher sich der Verf. wohl aus äusseren Gründen befleissen musste, hält es schwer, auf besondere Einzelheiten die Aufmerksamkeit zu richten; doch sei als Beleg für gründliches historisches Studium dessen gedacht, dass das erste Auftreten der Niveauflächen in der Hydrostatik bei Maclaurin (1742) und bei Clairaut (1743) nachgewiesen, und dass die erste Verwendung des Ausdrucks „*vis potentialis*" den Basler Mathematikern, namentlich dem Daniel Bernoulli zugeschrieben wird, von welch' Letzterem ihn einer gar nicht unwahrscheinlichen Vermuthung des Autors zufolge Gauss entlehnte. Die „Green'sche Belegung", welche Helmholtz für seine Theorie der Luftschwingungen und W. Thomson für seine die gesammte Geophysik beherrschende Definition der centrobarischen Massen verwerthete, wird als ein schneidiges Instrument der neueren mathematischen Physik charakterisirt, namentlich nachdem ihr Helmholtz, C. Neumann u. A. die „Doppelbelegung" zur Seite gestellt haben. Bis hierher reicht, wenn diese Bezeichnung gestattet ist, die Principienlehre, denn jetzt wendet sich der Verf. dazu (im § 13), die ana-

lytischen Methoden zu schildern, durch deren Mitwirkung Potentialaufgaben gelöst werden. Dies sind die Kugel- und Cylinderfunctionen — welch' letztere, beiläufig bemerkt, nicht erst von Bessel, sondern nach Maggi bereits von Bernoulli und Euler der Analysis dienstbar gemacht worden sind —, die krummlinigen Coordinatensysteme, das Neumann'sche Verfahren des arithmetischen Mittels u. s. w.; auch erfahren wir, für welche Körper und Flächen die Bestimmung des Potentials bereits endgiltig durchgeführt worden ist. Einem besondern Paragraphen blieb die Methode der sphärischen Spiegelung (Transformation durch reciproke Radien) vorbehalten; Gleiches gilt auch für das „cylindrische" oder nach neuerer Terminologie „logarithmische" Potential, das planare Analogon des Gravitationspotentials, dem allerdings erst Neumann zur vollen Anerkennung seiner Gleichberechtigung verholfen hat. Den Beschluss macht eine Uebersicht über die neueren Versuche, den Begriff des Potentials sowohl auf eine ebene Mannichfaltigkeit von n Dimensionen, als auch auf dreidimensionale Räume von nicht verschwindendem Krümmungsmaasse auszudehnen.

Jedem Abschnitte ist ein die Citate und näheren Nachweisungen enthaltender Anhang beigegeben, und diese Anhänge geben dem Verfasser volle Gelegenheit, seine in hohem Grade anerkennenswerthe Literaturkenntniss zu bethätigen. Referent ist nur in einem einzigen Falle einen kleinen Nachtrag (zu S. 62) zu liefern in der Lage: der explicite Ausdruck für die Kraft, mit welcher ein homogenes Parallelepipedum auf einen ausserhalb gelegenen Punkt wirkt, ist zuerst durch v. Friesach in den Verhandlungen des steiermärkischen naturforschenden Vereins aufgestellt worden. Für junge Mathematiker, welche selbstständig das weite Feld der Potentialtheorie bearbeiten wollen, ist die Bacharach'sche Schrift besonders schätzbar, denn in ihr finden sie über etwaige Vorarbeiten gewiss jeden nur wünschbaren Aufschluss.

Ansbach. Dr. S. Günther.

Récréations mathématiques par M. Édouard Lucas. II. Paris, Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire. 1883. 245 S.

Die erste Abhandlung dieses interessanten Werkes ward von uns bereits in der Zeitschr. f. Math. u. Phys. besprochen. Was die zweite, nunmehr vorliegende anlangt, so werden in ihr gewisse Spiele aus älterer und neuerer Zeit erörtert, deren Wesen einen unleugbar mathematischen Charakter trägt; selbstverständlich sind wesentlich Combinatorik und *Analysis situs* diejenigen Disciplinen, welche bei der Fragestellung und bei der Lösung der Aufgaben in Betracht kommen. Den Beginn macht jene Abart des Damenbrettspieles, welche in Frankreich den Namen „*Qui perd gagne*", in Süddeutschland den etwas prosaischen Namen „Steinfressen"

führt. Es folgt das Domino, für dessen auf den Steinen zum Ausdruck gelangende Zahlwerthe der Verf. drei fundamentale Sätze beweist. Er lehrt sodann die Steine zu Figuren zusammenzusetzen, welche er als „magische" und „teuflische" Dominos bezeichnet, behandelt algebraisch gewisse Räthselfragen, welche sich auf das Dominospiel beziehen, und construirt eine elegante zwölfeckige Figur aus Dominosteinen, zusammengesetzt aus 14 Einzelquadraten, deren jedes wieder vier mit der nämlichen Zahl erfüllte Einzelzellen aufweist. Natürlich wird auch das Reiss'sche Problem behandelt, anzugeben, wie und wie oft sämmtliche Steine im Sinne der Spielregel aneinandergereiht werden können. An das Dominospiel schliesst sich ganz natürlich an das Spiel des Mühleziehens (*„le jeu de marelle"*), dessen erste Andeutung Herr Lucas in den „Tristien" des Ovid zu finden glaubt. Von diesem giebt es eine ganze Menge von Ab- und Unterarten, deren jede einzeln besprochen wird. U. A. wird hierher gerechnet die hübsche Unterhaltung *„entre chiens et loup"* (Wolf und Schaafe); es handelt sich dabei darum, auf einem Brette von $(n)^2$ Feldern durch n einer bestimmten Farbe angehörige Steine einen einzelnen Stein von derselben Farbe derart einzuschliessen, dass dem letzteren schliesslich jedwede Bewegung unmöglich gemacht wird. Die Theorie dieses Spieles ist keineswegs eine so leichte, wie man wohl auf den ersten Blick anzunehmen geneigt sein könnte, indem die Anzahl der zu berücksichtigenden Möglichkeiten eine sehr grosse ist. Von hier wendet sich unser Autor zu dem *„Jeu de parquet"*, dessen Grundregeln allem Anscheine nach bereits für die Mosaikböden der Alten massgebend waren, dessen Theorie aber zuerst ein Pater Truchet zu Beginn des vorigen Jahrhunderts bearbeitet hat. Man hat n^2 Quadrate, deren jedes durch eine Diagonale in eine schwarze und in eine weisse Hälfte getheilt ist; es ist die Frage, wie man diese Quadrate so zusammenstellen könne, dass sich symmetrische Figuren aus den verschieden gefärbten Theilen ergeben. Es lag für den Verfasser der originellen „Theorie der Gewebe"* nahe, die Construction der Parketböden mit den „anallagmatischen Quadraten" Sylvester's in organische Beziehung zu setzen und dabei auch auf die schönen Mosaikornamente einzugehen, deren Theorie man Laisant und Catalan verdankt.

Während die Spiele, von welchen wir bisher zu sprechen hatten, wesentlich einen combinatorischen Anstrich hatten, betreten wir mit dem *„casse-tête chinois"* mehr ein geometrisches Gebiet. Man stellt sich die Aufgabe, geometrische Figuren ohne Aenderung ihres Flächeninhalts in

---

* Diese wirklich geistreiche Anwendung der Zahlentheorie auf geometrische Fragen ist, soweit uns bekannt, in Deutschland nur zu geringer Verbreitung gelangt. Bis sich vielleicht einmal ein Uebersetzer für Lucas' „Geometria dei tessuti" (Turin 1876) findet, verweist Referent auf seinen bezüglichen Aufsatz im 13. Jahrg. der Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht.

andere Figuren von vorgeschriebener Gestalt umzuwandeln, eine Aufgabe, mit deren Lösung man nach Ausonius bereits zur spätrömischen Zeit den jugendlichen Scharfsinn zu wecken und zu stärken liebte.* Es werden uns hier, unter den mannichfaltigsten und — für den Referenten wenigstens — theilweise ganz neuen Namen Zerlegungsprobleme aller Art vorgeführt, die unbedingt in den elementargeometrischen Unterricht aufgenommen zu werden verdienen. Insbesondere möchten wir auf die schöne Constructionsaufgabe aufmerksam machen: Ein regelmässiges Fünfeck so in sieben Flächenstücke zu zerlegen, dass diese, gehörig zusammengesetzt, ein — dem Fünfeck mithin flächengleiches — Quadrat liefern. Hier findet auch das nette Paradoxon seine Stelle, welches in dem geometrischen Beweise der Relation $64 = 65$ gipfelt; der Verf. zeigt, wie die Aufklärung des Fehlers auf die Reihe von Fibonacci-Lamé $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$ und auf den Kettenbruch $1:(1+(1:(1+\ldots$ führt, doch hätte er diesen Abschnitt noch etwas reichhaltiger gestalten können, wenn er auf die in dieser Zeitschrift veröffentlichte Arbeit V. Schlegel's Bezug genommen haben würde. Ein dankenswerther Anhang zu diesem Capitel handelt von der Unmöglichkeit der Kreisquadratur und den dieselbe gewährleistenden neueren Untersuchungen von Hermite-Lindemann. Wiederum einen Sammeltitel repräsentirt die nächstfolgende Aufschrift „*Les jeux de demoiselles*“, deren Grundzug in der Einbeschreibung gewisser halbregelmässiger Sternpolygone in einen Kreis besteht, während jedoch diese Construction nicht sowohl geometrisch, als vielmehr durch Bildung gewisser Permutationen zu erfolgen hat. Eine wesentlich analoge, jedoch in der Ausführung noch ungleich schwierigere Problemstellung ist die der Turnkunst entnommene, mit welcher sich Nägelsbach im Erlanger Gymnasialprogramm für 1878 beschäftigte. Von der Ebene zum Raume sehen wir uns emporgeführt in dem englischen Spiele „*The Travellers Dodocahedron*“, welches keinem Geringeren, als dem berühmten Erfinder der Quaternionenrechnung, Sir Rowan Hamilton, seine Entstehung verdankt; dasselbe giebt Veranlassung zu mancherlei interessanten Excursen in die Lehre von den regelmässigen Sternpolyedern überhaupt, und namentlich das Ikosaeder ist es, auf welches Herr Lucas die von Hamilton für das Dodekaeder entworfenen Spielregeln auszudehnen weiss. Es muss Jedermanns Interesse erregen, wenn er sieht, wie sich hier ein für die gesammte Raumwelt charakteristisches Gesetz, nämlich dasjenige der Dualität oder Reciprocität, in den Dienst des Erfinders stellt, um neuere und mannichfaltigere Spiele des Geistes und der Combinationskraft zu ersinnen.

Einige rein mathematische Noten beschliessen das Ganze. Die eine behandelt die Kriterien, mittelst deren die Theilbarkeit oder Nichttheil-

* Unter dem Namen „*Loculus Archimedius*“ wird das gleiche Spiel bekanntlich – sei es mit Recht, sei es mit Unrecht – auf Archimed zurückgeführt.

barkeit einer Zahl von der Form $(2^m - 1)$ je nach dem Charakter der Zahl m erkannt werden soll. Eine zweite ist einer näherungsweisen Rectification des Kreises gewidmet, eine dritte beleuchtet den Hamilton'schen „*Calcul icosien*“, welcher den von Laisant gegebenen Aufschlüssen zufolge eine Rechnung mit Operationssymbolen für die Wurzeln der Einheit darstellt. Auch zu der ersten Abtheilung der „Récréations“ werden einige Notizen und Verbesserungen nachgetragen.

Wir können zum Schlusse dieser Anzeige nur unserer Befriedigung darüber Ausdruck verleihen, dass es dem unermüdlichen Autor im Verein mit der berühmten Verlagsfirma gelungen ist, dieses durchaus eigenartige Werk zu schaffen, dem wir in Deutschland recht viele Leser wünschen möchten.

Ansbach. Dr. S. Günther.

Handbuch der Klimatologie von Dr. Julius Hann, Director der meteorolog. Centralanstalt und Professor an der Universität in Wien etc. etc. Stuttgart, Verlag von J. Engelhorn. 1883. X, 764 S.

Treffliche Lehrbücher der Meteorologie, die den vollen Wissensstandpunkt ihrer Zeit zum Ausdruck bringen, giebt es in grösserer Anzahl; es genügt, an die Namen Kämtz, Schmid, Mohn zu erinnern. In all' diesen Werken ist natürlich auch das klimatologische Element mehr oder weniger berücksichtigt, allein es spielt darin doch mehr nur eine untergeordnete Rolle, und zumal Derjenige, der sich über die klimatischen Verhältnisse einer bestimmten Erdgegend unterrichten wollte, sah sich auf die mühsame Arbeit angewiesen, aus Monographien und Reisebeschreibungen die für ihn wichtigen Einzelheiten zusammenzusuchen. Wenn sonach auf ein Buch die viel missbrauchte Bezeichnung „Befriedigung eines allgemein gefühlten Bedürfnisses“ angewandt werden kann, so ist es das vorliegende Handbuch der Klimatologie, welches aus der Feder eines der berufensten Vertreter der Erdphysik stammt und den zweiten Band der von Prof. Ratzel in München herausgegebenen „Geograph. Handbücher“ bildet. Ein Werk wie dieses vermag ja selbstverständlich nicht endgiltig Abschliessendes zu liefern, denn eine solche gleichmässig theoretische wie beschreibende Disciplin wird eben zu keiner Zeit eine fertige sein; wohl aber haben wir es mit einem Repertorium zu thun, zu welchem zwar Nachträge und Zusätze, kaum aber Ergänzungen von principieller Bedeutung sich liefern lassen werden.

Das Wort „Klima“ fasst Hann im allgemeinsten Sinne; die Humboldt'sche sowohl, wie die Peschel'sche Definition des Wortes wird als eine zu enge verworfen und mit Recht wird der ersteren gegenüber, die wesentlich auf den Wechselbeziehungen zwischen der Atmosphäre und dem menschlichen Organismus fusste, darauf hingewiesen, dass von

einem Klima auf der Erde selbst für jene graue Vorzeit gesprochen werden dürfe, da es weder eine vegetabilische, noch auch eine animalische Bevölkerung gab. Wir verstehen den Sinn, welchen unser Verf. mit dem Stichworte verbindet, am besten, wenn wir seiner Besprechung der einzelnen klimatischen Factoren folgen. In erster Linie stehen natürlich die Temperaturverhältnisse, deren umfassende Kenntniss die Bestimmung der Jahrestemperatur, der Monatsmittel, der mittleren Jahresschwankung, der täglichen Amplitude, sowie auch Berücksichtigung der unregelmässigen Wärmeschwankungen zur Voraussetzung hat. Nicht weniger als acht Elemente der Lufttemperatur müssen für eine Gegend bekannt sein, wenn eine genügende klimatographische Charakteristik von derselben möglich werden soll. Die strahlende Wärme ferner, welche für die Meteorologie von mehr untergeordneter Bedeutung ist, spielt in der Klimakunde eine nicht unwichtige Rolle, wie es denn für agronomische Zwecke sogar wünschenswerth erscheint, die Quote des von grösseren Wasserflächen reflectirten Quantums der Sonnenwärme schätzen zu können. Nächtliche Erkaltung und Bodentemperatur erheischen gleichfalls eine genaue Messung. Sowohl die absolute, als auch die relative Feuchtigkeit der Luft müssen ihren Monatsmitteln nach bekannt sein, und zwar ist die letztere der klimatologisch einflussreichere Factor. An dritter Stelle kommt der Grad der Bewölkung, welchen man neuerdings durch Selbstregistratoren zu bestimmen begonnen hat; hiermit in engster Beziehung steht Angabe der nebligen und nebelfreien Tage im Jahre und Messung des Thaufalles. Dass die Winde unter den das Klima in seiner Eigenart gestaltenden Potenzen nicht vergessen werden dürfen, versteht sich von selbst, und namentlich ist die Häufigkeit der verschiedenen Windrichtungen nicht zu unterschätzen; die Luftdruckschwankungen dagegen, deren Studium der modernen Meteorologie besonders am Herzen liegt, treten in unserem Specialfache nicht eben in den Vordergrund. Dagegen sind die Verdunstungsmesser von Wild und Piche stetig zu beobachten, die Schwankungen in der chemischen Zusammensetzung der Erd- und Bodenluft verdienen Beachtung, obwohl oder gerade weil man über deren klimatographischen Werth noch nicht recht im Klaren ist. Endlich ist das Anstellen pflanzenphänologischer Beobachtungen nicht zu vernachlässigen. Man sieht, das hier kurz skizzirte Programm ist kein geringfügiges, Manches ist darin enthalten, worauf bisher kein oder doch nur ein schwächeres Gewicht gelegt wurde; allein man darf sich wohl überzeugt halten, dass der Vorstand der ältesten und geachtetsten aller Anstalten, welche der Verfolgung geophysikalischer Erscheinungen gewidmet sind, nur Dasjenige in sein Programm aufgenommen haben werde, was ihm nach seiner langjährigen Erfahrung als durchaus nothwendig erschien.

Die an dieses Einleitungscapitel sich anschliessende theoretische Klimatologie zerfällt in zwei Hauptabtheilungen, deren erste das solare oder

mathematische Klima erörtert und namentlich auch die absorbirende Wirkung der irdischen Atmosphäre untersucht. Es findet sich, dass in unseren Breiten selbst bei ganz heiterem Himmel unsere Lufthülle die Hälfte der täglichen Wärmestrahlung der Sonne neutralisirt. Die zweite Abtheilung widmet sich der Klarstellung jener Modificationen, welche das solare Klima unter dem Einflusse der verschiedenartigen Bedeckung der Erdoberfläche mit Wasser und Land erleidet. Als die wichtigsten Klimagruppen terrestrischen Ursprungs erscheinen einerseits das Land- und Seeklima und andererseits das Gebirgsklima. Das Wesen der cyklonalen und anticyklonalen Luftbewegung wird in höchst übersichtlicher Weise gekennzeichnet und ebenso der Einfluss, welchen die selbst wieder nur als die Ergebnisse solcher Luftbewegungen von langer Dauer anzusehenden Meeresströmungen auf die Wärmevertheilung und auf das Klima ausüben. Das „Höhenklima" hat vermuthlich noch nirgendwo eine so sorgfältige Behandlung erfahren, wie hier, und die atmosphärischen Höhenstufen trifft man für eine sehr grosse Anzahl von Erdgegenden genau angegeben. Höchst ansprechend ist die nach mehreren Seiten hin neue Gesichtspunkte eröffnende Theorie der Gebirgswinde, den Fön (Hann hat noch die ältere Schreibart „Föhn") mit eingeschlossen. Die klimatische Function der Bergzüge ist die des Windschutzes und der Hemmung des Luftaustausches zwischen beiden Abhängen. Auf diese Weise hat der Verf. die Grundzüge der allgemeinen Klimatologie gewonnen, welche es nun gilt zu Gunsten der speciellen Klimatologie, d. h. der Klimatographie der Erdoberfläche, zu verwerthen.

Obwohl dieser Bestandtheil des Werkes ganz natürlich das räumliche Uebergewicht besitzt (über ⅘ des Ganzen), so müssen wir uns doch an dieser Stelle kürzer darüber fassen. Es genüge, zu sagen, dass mit enormer Belesenheit und Sachkunde für die einzelnen Länder das klimatische Gesammtbild gezeichnet wird, so zwar, dass die Einwirkung der klimatischen Verhältnisse auf Sitten und Eigenart der Bewohner zu ihrem vollen Rechte gelangt. Die Eintheilungsprincipien nach Klimazonen sind im Grossen und Ganzen diejenigen des Parmenides, ohne natürlich sich streng an die begrenzenden Parallelkreise zu halten. Was die einzelnen Welttheile anlangt, so ist die Schematisirung folgende: I. Tropenzone. 1. Afrikanisches Tropengebiet; 2. Südasiatisches Tropengebiet oder Gebiet des Südwest-Monsuns; 3. Hinterindisch-australisches Tropengebiet oder Gebiet des Nordwest-Monsuns; 4. Inseln des stillen Oceans; 5. Amerikanisches Tropengebiet. II. Gemässigte Zonen. 1. Subtropengebiet der alten Welt (Mittelmeerländer); 2. Atlantisches Klimagebiet, West- und Nordeuropa umfassend; 3 Mitteleuropa; 4. Russland und Westsibirien als Gebiet des europäisch-asiatischen Continentalklimas; 5. Ostasien ausser der Tropenzone; 6. Nordamerika zwischen Wende- und Polarkreis; 7. Südafrika ausserhalb der Tropen; 8. Australien ausserhalb der Tropen;

9. Aussertropisches Südamerika. III. Polarregionen. 1. Uferländer und Inseln des europäischen Eismeeres; 2. Polares Asien; 3. Polares Nordamerika; 4. Antarktischer Gürtel. Ausser den Detailschilderungen begegnen wir noch einer klimatographischen Charakteristik jeder der drei grossen Schilderungen im Allgemeinen, trefflichen kleinen Monographien, auf welche zumal die Verfasser von geographischen und physikalischen Lehrbüchern aufmerksam zu machen wären, weil sie daselbst *in nuce* die wichtigsten ihnen nothwendigen Materialien beisammen finden können. Beiläufig sei erwähnt, dass auch ein so vorsichtiger Meteorologe, wie Herr Hann, die Versuche Koeppen's mit günstigem Auge ansieht (S. 707), zwischen den periodischen Temperaturschwankungen der Tropenzone und der wechselnden Sonnenfleckenhäufigkeit einen Causalzusammenhang zu ermitteln.

Von specifisch mathematischem Interesse sind drei Excurse unseres Werkes. Die Intensität der Sonnenstrahlung, mit deren exacter Bestimmung Meech, Wiener, Haughton, Röllinger, Schlemüller u. A. sich beschäftigt haben, wird (S. 77 flgg.) durch eine ganz einfache Formel ausgedrückt, die Forbes'sche Formel zur Darstellung der mittlern Temperatur eines Breitenkreises erfährt (S 134 flgg.) eine eingehende Discussion, und ganz besonders verdienstlich ist ein neues Verfahren, um den Einfluss der Erdrotation auf meridionale Luftströmungen mathematisch zu bestimmen. Das Princip der Flächenerhaltung führt rasch und sicher zum Ziele.

Einzelbedenken gegen ein so ausgezeichnetes — und, nebenbei bemerkt, auch äusserlich trefflich ausgestattetes — Werk wird wohl nur ein solcher Recensent geltend zu machen in der Lage sein, der das bearbeitete Gebiet mit gleicher Sicherheit beherrscht, wie der Autor selbst, und solcher Recensenten wird es nur sehr wenige geben. Nur Eine Frage sei gestattet: Sollte nicht auch der Eisgang der Flüsse, deren alternirendes Aufgehen und Wiedergefrieren, unter den klimatologischen Factoren ein wenn auch bescheidenes Plätzchen verdienen? Hällström's mathematisch gehaltene Arbeiten über diesen Gegenstand, vor Allem die im 1. Bande der Acta soc. scient. Fenn. enthaltenen „Specimina mutati currente saeculo temporis, quo glacies fluminum annuae dissolutae sunt", scheinen uns auch heute noch einige Aufmerksamkeit zu verdienen.

Ansbach. Dr. S. Günther.

Untersuchungen auf dem Gebiete der trigonometrischen Reihen und der Fourier'schen Integrale von Otto Beau. Druck von B. G. Teubner. Leipzig 1883. 84 S.

Die beachtenswerthe Abhandlung, deren Verfasser eine erfreuliche Gewandtheit in analytischen Rechnungen an den Tag legt, besteht aus

drei Abschnitten. Im ersten Abschnitte werden den bekannten Coefficienten der periodischen Cosinus- und Sinusreihen $a_\nu = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(\alpha).\cos\nu\alpha.d\alpha$, $b_\nu = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(\alpha).\sin\nu\alpha.d\alpha$ Formen ertheilt, in welchen Integrale mit unendlichen Intervallen vorkommen, nämlich:

$$a_\nu = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^\infty f(x).\cos(\nu+\eta)x.\sin\alpha x\cdot\frac{dx}{x}$$

und

$$b_\nu = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^\infty f(x).\sin(\nu+\eta)x.\sin\alpha x\cdot\frac{dx}{x};\quad 0<\alpha\pm\eta<1.$$

Der Verfasser erhält diese neuen Coefficientenformen auf doppelte Art. Einmal leitet er sie unmittelbar ab, ausgehend von einigen allerdings schon bekannten, aber selbst neu abgeleiteten bestimmten Integralen; dann giebt er zum Zweiten die Umformung der beiden Coefficienten aus der neuen Gestalt in die alte, eine Operation, deren nothwendige Ausführbarkeit ihm aus dem Satze folgt, dass jede Function nur auf eine Weise in periodische Cosinus- oder Sinusreihen entwickelt werden kann.

Der zweite Abschnitt führt von den periodischen Reihen zu Doppelintegralen. Sie bieten das Analogon zu jenen Doppelintegralen, welche Fourier's Namen führen, und heissen unter der Voraussetzung der Continuität von $\psi(x)$ für $x=-\infty$ bis $x=\infty$:

$$\int\limits_0^\infty \sin\alpha z.d\alpha\int\limits_0^\infty \psi(x).\cos\alpha x.dx = z\int\limits_0^\infty \psi(x)\cdot\frac{dx}{z^2-x^2},$$

$\psi(x)$ eine gerade Function;

$$\int\limits_0^\infty \cos\alpha z.d\alpha\int\limits_0^\infty \psi(x).\sin\alpha x.dx = \int\limits_0^\infty x.\psi(x)\cdot\frac{dx}{z^2-x^2},$$

$\psi(x)$ eine ungerade Function.

An diese Doppelintegrale schliessen sich andere, welche Functionen von grösserer Allgemeinheit enthalten, ähnlich wie sie in den Fourier'schen Integralen vorkommen. Einige specielle Beispiele beschliessen den Abschnitt.

Der dritte Abschnitt endlich führt die Ueberschrift: Summation von Reihen mit Hilfe von (Fourier'schen) Doppelintegralen. Reihen, welche nach gewissen λ-Functionen fortschreiten und Coefficienten A_ν, B_ν besitzen, die aus den früheren a_ν, b_ν hervorgehen, werden durch Doppel-

integrale summirt und, nachdem die Convergenz jener Reihen nachgewiesen ist, wird die Methode an bestimmten Beispielen geprüft.

In einem Anhange werden noch weitere Umgestaltungen der oftgenannten Coefficienten a_ν, b_ν besprochen.

CANTOR.

Aufgaben der sphärischen Astronomie, gelöst durch planimetrische Constructionen und mit Hilfe der ebenen Trigonometrie. Von Dr. A. PEIN, ordentl. Lehrer an d. Höheren Bürgerschule zu Bochum. 1883. 4⁰. VIII, 48 S., 3 Figurentafeln.

Ein den Anforderungen mathematischer Strenge genügender Unterricht in der sphärischen Trigonometrie wird jedenfalls eine Fundamentalformel stereometrisch beweisen und deren Giltigkeit für alle möglichen Fälle darthun müssen. Von dieser einmal gewonnenen Fundamentalformel aus werden alsdann meistens auf dem Wege analytischer Ableitung andere und andere Formeln entwickelt, andere und andere Aufgaben gelöst. Man kann auch den andern Weg einschlagen, nämlich unter möglich geringster Anwendung analytischer Ableitungen jede Aufgabe für sich stereometrisch betrachten und die ihre Antwort enthaltende Formel aus der Figur zu erkennen suchen. Will man ein solches Verfahren sphärische Trigonometrie nennen oder nicht, das scheint ziemlich gleichgiltig, und den Ausschlag dafür dürfte häufig der äussere Umstand geben, ob der betreffende Lehrer an der betreffenden Schule das Recht hat, „sphärische Trigonometrie“ vorzutragen, oder ob nur deren Zwillingsschwester „mathematische Geographie“ den Schülern bekannt werden soll. Herr Pein hat, wie es scheint, unter dem Drucke einer derartigen Nöthigung seine Anwendung der zweiten hier erwähnten Methode eine planimetrische, nur ebene Trigonometrie beanspruchende genannt. Wesentlich ist dieser Name nicht für die uns vorliegende recht interessante Programmschrift. Wesentlich erscheint uns nur das Eine, dass die verhältnissmässig selbstständige Behandlung derjenigen Aufgaben, die man sonst die einzelnen Fälle der sphärischen Trigonometrie zu nennen pflegt, es gestattet, je nach Zeit und Bedürfniss bald die eine, bald die andere Aufgabe zu behandeln oder zu vernachlässigen, und dass die Einkleidung der Aufgaben in die Kunstsprache sphärischer Astronomie ihnen für viele Schüler ein erhöhtes Interesse beilegen wird. Ob dagegen andere Schüler durch die Schwierigkeit der ihnen neuen, fremdartigen Kunstsprache nicht abgestossen werden dürften, hängt sicherlich — wie freilich das Meiste in der Mathematik der Mittelschulen — von dem Lehrer ab.

CANTOR.

Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln, bearbeitet v. J. HENRICI. Stereotypausgabe. Leipzig 1882, bei B. G. Teubner.

Eine Seite Erklärung, neun Seiten Tabellen in Duodezformat, das ist die äussere Gestalt dieser Tafeln, die in jeder Brusttasche Platz finden können und durch ebenso geschmackvollen, als soliden Leinwandeinband gegen Zerreissen geschützt sind. Die Erklärung hier wiederzugeben wäre unmöglich, ohne die Tafeln selbst zum Abdruck zu bringen. Es gehört so wie so eine gewisse, allerdings nicht schwer zu erwerbende Uebung dazu, sich an die Benutzung dieser Täfelchen zu gewöhnen. Ob allerdings die nur sehr geringfügige Annäherung der mittels vierstelliger Logarithmen zu erhaltenden Rechnungsergebnisse mehr als zu blos vorläufigen Ueberschlägen für später noch genauer auszuführende Rechnungen dienen können, ist dem Referenten zweifelhaft. Zu einer Bejahung der aufgeworfenen Frage scheint allerdings der Umstand drängen zu müssen, dass es noch kürzer gefasste Tafeln giebt. Hat doch eine dreistellige logarithmisch-trigonometrische Tabelle von Bremiker durch den Druck Verbreitung gefunden.

CANTOR.

Bremiker's logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit sechs Decimalstellen, neu bearbeitet von Dr. TH. ALBRECHT, Professor und Sectionschef im königl. preuss. Geodätischen Institut. X. Stereotypausgabe. Berlin 1883, Nicolai'sche Verlagsbuchhandl. (R. Stricker). XVIII, 598 S.

Wir haben Bd. XXVII, hist.-lit. Abth. S. 142, auf die 1881 erschienene VIII. Stereotypausgabe der bekannten sechsstelligen Tafeln aufmerksam gemacht. Zwei Jahre genügten, um jene VIII. und auch noch eine IX. Ausgabe buchhändlerisch aufzubrauchen, die X. Ausgabe liegt vor uns. Von Veränderungen, durch welche dieselbe sich von den älteren Abdrücken unterscheidet, sind zwei zu nennen. Die von uns früher bemängelten Maass- und Gewichtsvergleichungen mit ihren nicht blos dem Gebrauch, sondern sogar der gesetzlichen Statthaftigkeit entrückten Grössenarten sind in Wegfall gekommen. Hinzugekommen ist dagegen auf S 188—262 eine Tafel der Logarithmen der Sinus und der Tangenten der Winkel bis zu 5^0 von Secunde zu Secunde fortschreitend, ähnlich wie sie in den nicht stereotypirten Ausgaben der sechsstelligen Bremiker'schen Logarithmen von 1852 und 1860 vorhanden war, in den stereotypirten Ausgaben aber weggelassen wurde, eine Verkürzung, welche von Astronomen übel vermerkt worden zu sein scheint.

CANTOR.

Logarithmisch-trigonometrische und andere für Rechner nützliche Tafeln, zunächst für Techniker, sowie für den Schulgebrauch und für praktische Rechner überhaupt von Dr. Moritz Rühlmann, königl. preuss. Geh. Regierungsrath und Professor an der technischen Hochschule zu Hannover, und Dr. Moritz Richard Rühlmann, Professor am königl. Gymnasium zu Chemnitz. IX., vollständig umgearbeitete und beträchtlich vermehrte Auflage. Leipzig, Arnoldische Buchhandlung. 1883. XXXVIII, 320 S.

Die Logarithmen sind zu sechs Stellen angegeben. Der Druck ist so eingerichtet, dass stets nach je fünf Zeilen ein Zwischenraum eintritt, wenn auch kein so scharf hervortretender wie bei anderen Tabellen. Die Logarithmen der Zahlen unterhalb der Einheit, also insbesondere der trigonometrischen Sinus und Cosinus sind bei positiv bleibender Mantisse mit negativer Charakteristik abgedruckt. Z. B. $\log. \sin. 4^0\, 5' = \bar{2},852525$, wobei die überstrichene Charakteristik 2 besagen soll, es sei eigentlich $0,852525 - 2$ gemeint. Die Verfasser glauben in der Vorrede, „zumal der Lehrer, dem die Aufgabe zufällt, Ungeübte in den Gebrauch der Tafeln einzuführen, werde diese Abänderung als einen Fortschritt zu schätzen wissen". Referent kann einen Fortschritt unmöglich in einem Verfahren erkennen, welches ihm der Logik der Bezeichnung geradezu zu widersprechen scheint. Wir würden fürchten, unsere Schüler zu den tollsten Rechenfehlern zu veranlassen, wenn wir sie eine derartige Bezeichnung kennen lehrten. Wir können auch keinerlei Grund absehen, warum von der althergebrachten Schreibweise 8,852525 (*sc.* — 10) Abstand zu nehmen wäre. Die fast 100 Seiten füllenden anderen als logarithmischen Tabellen sind sehr zweckmässig gewählt.

Ausstattung, Druck und Papier lassen Nichts zu wünschen übrig.

Cantor.

Sammlung von arithmetischen und algebraischen Fragen und Aufgaben, verbunden mit einem systematischen Aufbau der Begriffe, Formeln und Lehrsätze der Arithmetik, für höhere Schulen von Dr. Hermann Schubert, Oberlehrer an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Zweites Heft: Für obere Classen. Potsdam 1883, Verlag von Aug. Stein. 224 S.

Wir haben das zweite Heft der Aufgabensammlung vor uns, deren erstes für den Gebrauch in mittleren Gymnasialclassen bestimmtes Heft wir im vorigen Bande (hist.-lit. Abthlg. S. 199) angezeigt haben. Was wir damals lobend betonen durften, Strenge mit Fasslichkeit gepaart, geschmackvolle Einkleidung der Textaufgaben, vielseitige Anknüpfung an sonstige Gegenstände des Gymnasialunterrichts, das findet buchstäblich zu wiederholende Anwendung auch auf das neue Heft. Dem Ge-

brauche in den oberen Classen angepasst, enthält es natürlich auch gewisse Dinge, welche kaum vor vier Jahrzehnten ihren Einzug in die Hörsäle der Universitäten hielten und heute schon der Mittelschule unentbehrlich geworden sind: die folgerichtige Begründung der Erweiterungen des Zahlbegriffes zur irrationalen und zur imaginären Zahl. Jene gewinnt der Verfasser in üblicher Weise, indem er zeigt, dass jede Nichtquadratzahl zwischen zwei Quadratzahlen eingeschlossen werden kann, welche beliebig wenig von ihr sich unterscheiden; uns scheint indessen damit noch nicht Alles geleistet, sofern nicht bewiesen wird, dass die Commutativität der Addition und Multiplication auch bei Irrationalzahlen obwaltet, ein Beweis, den Referent 1855 in seinen „Grundzügen einer Elementararithmetik" S. 57—59 aus Kästner's vielverleumdeten, weil wenig gelesenen Schriften in Erinnerung gebracht hat. Dieser Beweis als geführt vorausgesetzt, ist Herrn Schubert's Darstellung des Rechnens mit irrationalcomplexen Zahlen, wie er die algebraische Summe eines rationalen und eines irrationalen Theiles nennt (§ 29 F, S. 248 bis 250), als sehr gelungen zu bezeichnen. Daran schliessen sich Bemerkungen über die fremdartigen Wurzeln, welche durch Beseitigung von Irrationalitäten in eine Gleichung hineingebracht werden können, Bemerkungen, welche auf S. 270 in anderer Form wiederkehren. Das Rechnen mit den durch die Nothwendigkeit, auch negative Zahlen radiciren zu können, erzwungenen imaginären Zahlen behandelt der Verfasser S. 260 flgg., bevor er die Versinnlichung der imaginären Zahl kennen lehrt. Er bedarf also eines von der Zahlenebene nicht Gebrauch machenden Beweises des Satzes $(+\sqrt{-b}).(+\sqrt{-c}) = -\sqrt{bc}$ ohne weitere Voraussetzung als der von $(\pm\sqrt{-b})^2 = -b$. Er führt diesen hübschen Beweis folgendermassen: $\pm\sqrt{-b}$ ist Wurzel der Gleichung $x^2 = -b$ und $\pm\sqrt{-c}$ Wurzel der Gleichung $y^2 = -c$. Vervielfachung beider Gleichungen liefert $x^2y^2 = bc$, $xy = +\sqrt{bc}$ oder $xy = -\sqrt{bc}$, und zwar kann, sofern speciell $x = +\sqrt{-b}$, $y = +\sqrt{-c}$ genommen wird, nur ein Werth, sei es $+\sqrt{bc}$ oder $-\sqrt{bc}$, erscheinen. Die Richtigkeit des Letzteren wird an dem Sonderfalle $c = b$ sofort erkannt. Wir denken unseren Lesern an diesem einen Beispiele eine deutliche Probe des Geistes, in welchem das Aufgabenlehrbuch, wie wir Herrn Schubert's Buch nennen möchten, verfasst ist, gegeben zu haben und sind überzeugt, dass kein Lehrer es bereuen wird, sich durch eigenen Augenschein mit unserer Vorlage bekannt zu machen.

CANTOR.

Bibliographie

vom 16. Februar bis 31. Mai 1884.

Periodische Schriften.

Mathematische und naturwissenschaftliche Mittheilungen aus den Sitzungsberichten der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften. Jahrg. 1884, 1. Heft. Berlin, Dümmler. compl. 8 Mk.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Classe der königl. bayer. Akademie der Wissensch. Jahrg. 1883, 3. Heft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Sitzungsberichte der königl. sächs. Gesellschaft der Wissensch., mathem.-physikal. Cl. 1883. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissensch. in Wien; mathem.-naturwissenschaftl. Cl. Abth. II. 88. Bd. 2. Heft. Wien, Gerold. 8 Mk. 80 Pf.

Bulletin de l'académie des sciences de St. Petersbourg. Tome XXIX, Nr. 1. Leipzig, Voss. compl. 9 Mk.

Mélanges mathématiques et astronomiques, tirés du bulletin de l'académie etc. Tome VI, livr. 1. Ebendas. 2 Mk. 80 Pf.

Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1886, herausgeg. von F. Tietjen. Berlin, Dümmler. 12 Mk.

Stern-Ephemeriden für das Jahr 1886. Ebendas. 6 Mk.

Die veränderlichen Tafeln des astronomischen und chronologischen Theils des königl. preuss. Normalkalenders für 1885, herausgeg. v. Foerster u. Lehmann. Berlin, Verlag des statist. Bureaus. 5 Mk.

Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie. 12. Jahrg. 1884, 1. Heft. Berlin, Mittler. Halbjährl. 1 Mk. 50 Pf.

Gezeitentafeln für das Jahr 1885, herausgeg. vom hydrograph. Amt der kaiserl. Admiralität. Berlin, Mittler & S. 1 Mk. 50 Pf.

Annalen des physikal. Centralobservatoriums in Petersburg, herausgeg. von H. Wild. Jahrg. 1882, 1. u. 2. Theil. Leipzig, Voss. 25 Mk. 60 Pf.

Repertorium für Meteorologie, herausgeg. von der Petersburger Akad. d. Wissensch., redig. v. H. Wild. Bd. 4. Leipzig, Voss. 16 Mk. 70 Pf.

Publicationen der astronomischen Gesellschaft. XVII. Leipzig, Engelmann. 5 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft, herausgeg. von E. Schönfeld und H. Seeliger. 18. Jahrg. 4. Heft. Ebendas. 2 Mk.

Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn, red. v. Fröhlich. 1. Bd. Berlin, Friedländer & S. 10 Mk.

Acta mathematica, herausgeg. v. Mittag-Leffler. 3. Bd. 1.—3. Heft. Berlin, Mayer & Müller. compl. 12 Mk.

Archiv der Mathematik und Physik, begr. von Grunert, fortges. von Hoppe. 2. Reihe, 1. Theil, 1. Heft. Leipzig, Koch. compl. 10 Mk. 50 Pf.

Astronomische Nachrichten, herausgeg. v. A Krüger. 108. Bd. (24 Nrn.), Nr. 2569. Hamburg, Mauke S. compl. 15 Mk.

Die Fortschritte der Physik, dargestellt von der physikal. Gesellsch. in Berlin. 34. Jahrg. (Jahr 1878), red. v. Neesen. 2. Abth.: Optik, Wärme und Elektricität. Berlin, G. Reimer. 11 Mk.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Bergk, Th., Beiträge zur römischen Chronologie, herausgeg. v. G. Hinrichs. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 40 Pf.

Heiberg, L., Philologische Studien zu griechischen Mathematikern. Ebendas. 1 Mk.

Giesel, F., Leibnitii nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus etc. Ex actis eruditorum Lips. a. 1684 edita. Leipzig, Hinrichs. 1 Mk.

Dan. Bernoulli und Leonh. Euler, die Basler Mathematiker. Hundert Jahre nach ihrem Tode gefeiert von der naturf. Gesellschaft. Basel, Georg. 1 Mk. 60 Pf.

Rosenberger, F., Geschichte der Physik in Grundzügen. 2. Thl., Neuere Zeit. Braunschweig, Vieweg. 8 Mk.

Reine Mathematik.

Rausenberger, O., Theorie der periodischen Functionen einer Variabelen mit einer endlich. Anzahl wesentlicher Discontinuitätspunkte. Leipzig, Teubner. 10 Mk. 80 Pf.

Schobloch, A., Ueber Beta- und Gammafunctionen. (Dissert.) Halle, Nebert. 60 Pf.

Kneser, A., Irreductibilität und Monodromiegruppe algebraischer Gleichungen. (Dissert.) Berlin, Mayer & Müller. 1 Mk. 20 Pf.

Hamilton, R., Die Elemente der Quaternionen. Deutsch von P. Glan. 2. Bd. 1. Hälfte. Leipzig, Barth. 6 Mk. 70 Pf.

Kronecker, L., Ueber bilineare Formen mit vier Variabelen. Berlin. Dümmler. 2 Mk. 50 Pf.

Spitzer, H., Untersuchungen im Gebiete linearer Differentialgleichungen. 1. H. Wien, Gerold. 3 Mk.

Biermann, O., Zur Theorie der Abbildung mittelst gebrochener rationaler Functionen. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

GEGENBAUER, L., Ueber die Bessel'schen Functionen. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

IGEL, B., Ueber einige algebraische Formen, welche in der Theorie der Curven vom Geschlechte $p = 0$ auftreten. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

DÜHRING, E. u. U. DÜHRING, Neue Grundmittel und Erfindungen zur Analysis, Algebra, Functionsrechnung u. zugehörigen Geometrie etc. Leipzig, Fues. 12 Mk.

REUSCHLE, C., Graphisch-mechanische Methode zur Auflösung numerischer Gleichungen. Stuttgart, Metzler. 1 Mk. 50 Pf.

GREVE, A., Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Bielefeld, Velhagen & Klasing. 2 Mk.

ALBRECHT, TH., Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit fünf Decimalen. Berlin, Friedberg & Mode. 2 Mk.

REX, W., Fünfstellige logarithmische Tafeln. Stuttgart, Metzler. 2 Mk. 60 Pf.

REIDT, F., Resultate zu der Aufgabensammlung für die Arithmetik und Algebra. Berlin, Grote. 80 Pf.

BAUR, Die heuristische Methode und Reform der Euklidischen Geometrie. Vortrag. Tübingen, Fues. 40 Pf.

BÖKLEN, O., Analytische Geometrie des Raumes. 2. Aufl. Stuttgart, Koch. 7 Mk.

ROSSMANITH, C., Die Elemente der Geometrie im constructiven Sinne. Wien, Pichler. 2 Mk.

WAELSCH, E., Ueber die Bestimmung von Punktgruppen aus ihren Polaren. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

BÖKLEN, Ueber die Rechnung mit Vectoren. (Dissert.) Tübingen, Fues. 80 Pf.

SCHÖNEMANN, P., Die mechanische Verwandlung der Polygone. Soest, Nasse. 80 Pf.

HOCH, J., Lehrbuch der ebenen Geometrie. 1. Thl. Halle, Schmidt. 1 Mk. 75 Pf.

SCHELLBACH, H., Ueber mechanische Quadraturen. 2. Aufl. Berlin, Mayer & Müller. 1 Mk. 50 Pf.

LIEBER, H. u. v. LÜHMANN, Leitfaden der Elementarmathematik. 1. u. 3. Theil. Berlin, Simion. 2 Mk. 75 Pf.

BROCKMANN, J., Repetitionscompendium über alle Zweige der Elementarmathematik. Stuttgart, Enke. 3 Mk.

KAJETAN, J., Grundzüge der reinen Projectionslehre und Perspective. Wien, Hölder. 1 Mk. 80 Pf.

GALOPIN-SCHAUB, Théorie des approximations numériques. Basel, Georg. 1 Mk. 25 Pf.

Angewandte Mathematik.

Hagen, G., Der Constanten wahrscheinliche Fehler. Berlin, Ernst & Korn. 1 Mk. 60 Pf.

Helm, G., Die Elemente der Mechanik und mathematischen Physik. Leipzig, Teubner. 3 Mk. 60 Pf.

Finger, J., Elemente der reinen Mechanik. 2. Lief. Wien, Hölder. 3 Mk. 20 Pf.

Jacobi's gesammelte Werke. Supplementband, herausgeg. v. E. Lottner. Vorlesungen über Dynamik. Berlin, G. Reimer. 10 Mk.

Weyrauch, J., Theorie elastischer Körper. Leipzig, Teubner. 7 Mk. 20 Pf.

Franke, H., Die Coordinatenausgleichung nach Näherungsmethoden in der Kleintriangulirung und Polygonalmessung. München, Grubert. 3 Mk. 60 Pf.

Boltzmann, L., Zur Theorie der Gasdiffusion. 2. Thl. 7. Abschn. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

Pick, A., Die elementaren Grundlagen der astronom. Geographie. Wien, Klinkhardt. 2 Mk. 40 Pf.

Vodusek, M., Neue exacte Methode für die Bahnbestimmung der Planeten und Kometen, nebst einer neuen Störungstheorie. Laibach, Kleinmayr & Bamberg. 4 Mk.

Göbel, H., Die Grösse, Entfernung und Bewegung der wichtigsten Himmelskörper. Wiesbaden, Bergmann. 2 Mk. 40 Pf.

Bauschinger, J., Untersuchungen über die Bewegung des Planeten Merkur. München, Ackermann. 1 Mk. 60 Pf.

Fodor-Mayerhoffer, L., Zur Theorie der Verticalsonnenuhr. (Akad.) Wien, Gerold. 25 Pf.

Herz, N., Bahnbestimmung des Planeten Russia (232). (Akad.) Ebendas. 60 Pf.

Holetschek, J., Ueber die Bahn eines Kometen, der während seiner günstigen Helligkeit nicht aus den Sonnenstrahlen heraustreten kann. (Akad.) Ebendas. 1 Mk. 20 Pf.

Kohn, G., Ueber Satellitcurven und Satellitflächen. (Akad.) Ebendas. 50 Pf.

Tumlirz, O., Das Potential und seine Anwendung zur Erklärung der elektrischen Erscheinungen. Wien, Hartleben. 3 Mk.

Neumann, F., Vorlesungen über elektrische Ströme; herausgegeben v. K. von der Mühll. Leipzig, Teubner. 9 Mk. 60 Pf.

Stefan, J., Ueber die Berechnung der Inductionscoefficienten von Drahtrollen. (Akad.) Wien, Gerold. 25 Pf.

Liznar, J., Anleitung zur Messung und Berechnung der Elemente des Erdmagnetismus. Wien, Gerold. 2 Mk.

Boltzmann, L., Ueber das Arbeitsquantum, welches bei chemisch bindungen gewonnen werden kann. (Akad.) Wien, Gerold.

Fourier, M., Analytische Theorie der Wärme. Deutsch herausg B. Weinstein. Berlin, Springer.

Physik und Meteorologie.

Hann, J., Die Erde als Weltkörper, ihre Atmosphäre, Hydrosph Leipzig, Freytag.

Ladenburg, A., Die kosmischen Consequenzen der Spectralanalyse. Kiel, Universitätsbuchhandlung.

Vogel, H., Einige spectralanalytische Untersuchungen an Sterne geführt mit dem grossen Refractor der Wiener Sternwarte. (Wien, Gerold.

Günther, S., Lehrbuch der Geophysik und physikalischen Geog Stuttgart, Enke. 1

Hollmann, K., Der Raum und seine Erfüllung. Eine Abhandlu Licht- und Wärmelehre. Berlin, Weidmann.

Palmieri, L., Die atmosphärische Elektricität. Uebers. v. H. D Wien, Hartleben.

Waitz, K., Ueber atmosphärische Elektricität. (Dissert.) Tüb Fues.

Sperber, J., Versuch eines allgemeinen Gesetzes über die spe Wärme. Zürich, Schmidt.

Wallentin, G, Die Generatoren hochgespannter Elektricität m. Be der Elektrisirmaschinen im engeren Sinne. Wien, Hartleben.

Serpieri, A., Das elektrische Potential oder Grundzüge der Elektro Ebendas.

Broszus, E., Die Theorie der Sonnenflecken. Berlin, Springer.

Wassmuth, A., Ueber die beim Magnetisiren erzeugte Wärme. (A Wien, Gerold. 4

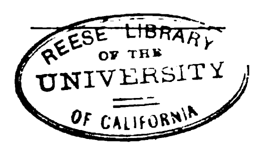
Voller, A., Ueber eine neue Form des Differentialgalvanometers un Messung d. Leitungswiderstandes glühender Kohlenfäden. Ham Nolte. 1 Mk. 5

Wild, H., Bestimmung des Werthes der Siemens'schen Widerstan heit in absolutem elektromagnetischem Maasse. Petersburg u. Lei Voss. 4 Mk. 7

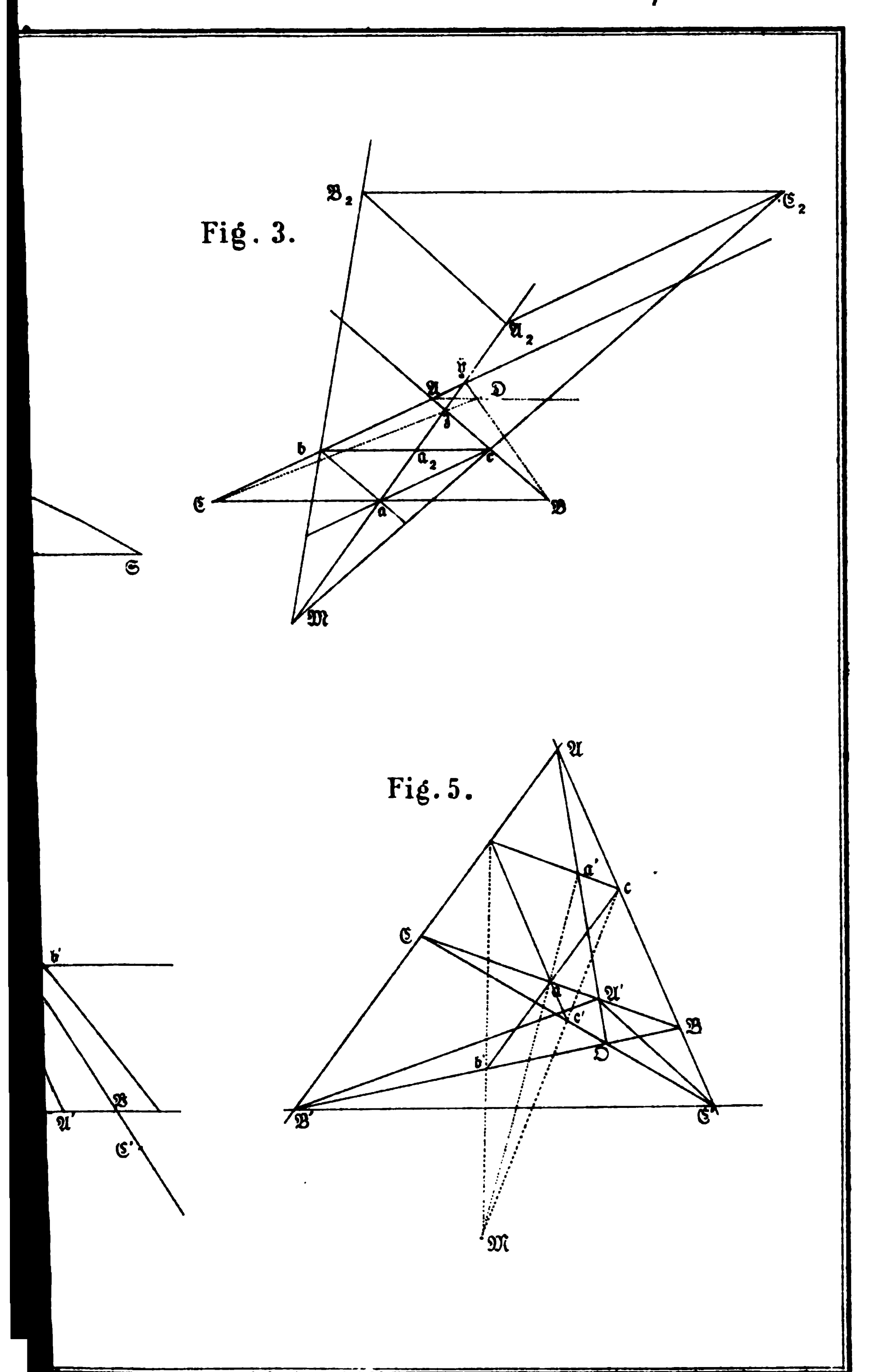
Marcuse, A., Ueber die physische Beschaffenheit der Kometen. B Friedberg & Mode. 5

Secchi, L., Die Einheit der Naturkräfte, übersetzt von L. R. Schu 2. Aufl., 1. Lief. Leipzig, Frohberg. 2

Günther, S., Der Einfluss der Himmelskörper auf Witterungsverh nisse. Eine meteorol. Studie. 2. Aufl. Nürnberg, Ebner. 1 Mk. 50



Tafel V.




REESE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF CALIFORNIA

Historisch-literarische Abtheilung.

Recensionen.

Erwiderung.

Im 2. Hefte dieses Bandes hat Herr Kurz sich mit meiner Arbeit über die Principien der Hydrodynamik beschäftigt und dabei, wie er sich ausdrückt, allerhand Schlacken gefunden. Ich möchte auf diesen Angriff erwidern, da derselbe die Fundamente meiner Arbeit betrifft; ich werde nur auf das Sachliche der Recension eingehen.

Herr Kurz behauptet, meine Definition der Componenten der Winkelgeschwindigkeit eines Linienelements sei falsch. Dass seine Definition die richtige ist, hält er nicht für nöthig zu beweisen, da er ja von Herrn Dr. Braun die richtigen Formeln erhalten hat. Ich gedenke nun Herrn Kurz zu beweisen, dass meine Formeln die richtigen sind, dass also die Formeln des Herrn Dr. Braun falsch sind. Dabei ist es wohl nöthig, etwas ausführlicher zu sein, als ich es in der Abhandlung war, da ich mich vielleicht für den Herrn Recensenten zu kurz ausgedrückt habe.

Ein Linienelement δx, δy, δz, dessen Richtungscosinus α, β, γ sind, habe nach einer unendlich kleinen Zeit dt die Projectionen $\delta x + \delta u\,dt$, $\delta y + \delta v\,dt$, $\delta z + \delta w\,dt$ und die Richtungscosinus α_1, β_1, γ_1; die beiden Richtungen mögen einen Winkel $\varepsilon\,dt$ miteinander machen. Dann ist ε die Rotationsgeschwindigkeit der Richtung α, β, γ um eine zu der Anfangs- und Endrichtung senkrechte Axe. Die Richtungscosinus dieser Rotationsaxe seien α_2, β_2, γ_2, so sind die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit resp. $\varepsilon\alpha_2$, $\varepsilon\beta_2$, $\varepsilon\gamma_2$ (vergl. Kirchhoff, Mech., S. 48). Trägt man vom Coordinatenursprung auf den Richtungen α_1, β_1, γ_1, α, β, γ die Längeneinheit ab und verbindet man die Endpunkte, so entsteht ein gleichschenkliges Dreieck Δ, dessen doppelter Inhalt gleich $\sin(\varepsilon\,dt)$ ist, und die Projectionen dieses Dreiecks auf die Coordinatenebenen A, B, C sind gegeben durch folgende Gleichungen (vergl. Hesse, Anal. Geom. des R., 2. Aufl., S. 8 u. 9):

$$2A = \gamma\beta_1 - \beta\gamma_1, \quad 2B = \alpha\gamma_1 - \gamma\alpha_1, \quad 2C = \beta\alpha_1 - \alpha\beta_1$$

(wobei gegen die Bezeichnung von Hesse die Indices vertauscht sind). Nun ist aber

$$2A = 2\Delta\alpha_2 = \sin(\varepsilon\, dt).\alpha_2,$$
$$2B = 2\Delta\beta_2 = \sin(\varepsilon\, dt).\beta_2,$$
$$2C = 2\Delta\gamma_2 = \sin(\varepsilon\, dt).\gamma_2,$$

und da dt ein unendlich kleiner Winkel ist, so habe ich

$$\varepsilon\, dt.\alpha_2 = \gamma\beta_1 - \beta\gamma_1, \quad \varepsilon\, dt.\beta_2 = \alpha\gamma_1 - \gamma\alpha_1, \quad \varepsilon\, dt.\gamma_2 = \beta\alpha_1 - \alpha\beta_1.$$

Die Ausdrücke rechter Hand kann ich demnach die Projectionen des Winkels $\varepsilon\, dt$ nennen, und wenn ich der Reihe nach diese Ausdrücke $= \vartheta\, dt$, $\iota\, dt$, $\varkappa\, dt$ nenne, so habe ich

$$\varepsilon\, dt.\alpha_2 = \vartheta\, dt, \quad \varepsilon\, dt.\beta_2 = \iota\, dt, \quad \varepsilon\, dt.\gamma_2 = \varkappa\, dt,$$

und wenn ich mit dt durchdividire,

$$\varepsilon\alpha_2 = \vartheta, \quad \varepsilon\beta_2 = \iota, \quad \varepsilon\gamma_2 = \varkappa$$

(linker Hand stehen die Componenten der Winkelgeschwindigkeit), und damit also bewiesen, dass die Grössen

$$\vartheta = (\gamma\beta_1 - \beta\gamma_1) : dt, \quad \iota = (\alpha\gamma_1 - \gamma\alpha_1) : dt, \quad \varkappa = (\beta\alpha_1 - \alpha\beta_1) : dt$$

die Componenten der Winkelgeschwindigkeit ε sind.

Vielleicht versteht jetzt Herr Kurz die Entwickelung, deren Richtigkeit er angezweifelt hat. Er hat, wenn ich seine Formeln recht verstehe, sich nicht klar gemacht, was man unter den Componenten einer Rotationsgeschwindigkeit versteht. Denn seine Ausdrücke für $\vartheta\, dt$, $\iota\, dt$, $\varkappa\, dt$ (ich meine damit diejenigen Grössen, die ich so bezeichnet habe),

$$\vartheta\, dt = \vartheta'\, dt \sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\alpha_1^2},$$

wo ϑ' die von Herrn Braun aufgestellte Componente ist, zeigen mir, dass er als Componente der Winkelgeschwindigkeit nach der x-Axe den Winkel zwischen den Projectionen zweier aufeinander folgender Lagen des Linienelements auf die y-, z-Ebene, dividirt durch dt versteht. In jedem Lehrbuch der Mechanik aber kann er sich darüber unterrichten, dass die Componenten einer Winkelgeschwindigkeit ε nach den Axen x, y, z resp. $\varepsilon\alpha_2$, $\varepsilon\beta_2$, $\varepsilon\gamma_2$ sind, wo α_2, β_2, γ_2 die Cosinus der Drehaxe sind.

Auch die Bemerkung über den Anfang des § 3 ist so haltlos, wie es fehlerhaft ist, bei allgemeiner Flüssigkeitsbewegung

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

zu setzen.

Tübingen, den 20. Juni 1884. R. Reiff.

Theorie der homogen zusammengesetzten Raumgebilde, von Dr. VICTOR SCHLEGEL. Mit 9 Tafeln. Halle 1883. In Comm. bei W. Engelmann in Leipzig. Aus: Nova acta der kaiserl. Leop.-Carol. deutschen Akademie der Naturforscher. Bd. XLIV Nr. 4.

In einer Abhandlung: „Quelques théorèmes de géométrie à n dimensions“ (Bulletin de la société mathématique de France. Paris 1882) hatte Herr Schlegel ein homogen begrenztes oder homogenes n-dimensionales Raumgebilde durch die Bedingung definirt, dass um jede Ecke, Kante, Fläche u. s. w. bez. gleichviel Grenzgebilde von höherer Dimensionszahl liegen, so dass z. B. für $n = 2$ jedes ebene Polygon, für $n = 3$ die fünf im weiteren Sinne zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder erster Art, von denen die regulären (Platonischen) Polyeder Specialfälle sind, solche homogene Figuren darstellen. Der Verfasser betrachtet nun in der vorliegenden Schrift die homogen zusammengesetzten Raumgebilde und deren Beziehungen zu den homogenen; er nennt ein $(n-1)$-dimensionales Raumgebilde homogen zusammengesetzt, wenn alle Theile desselben gleichviele Grenzgebilde haben und alle diese Grenzgebilde gleichvielen Theilen angehören.

Ein solches homogen zusammengesetztes $(n-1)$-dimensionales Raumgebilde kann als die Abbildung der Grenze eines homogenen n-dimensionalen Gebildes auf einem einfachen (ebenen) $(n-1)$-dimensionalen Gebilde angesehen werden. Denn denkt man sich eines der $(n-1)$-dimensionalen Grenzgebilde entfernt und den Complex aller übrigen auf einem ebenen $(n-1)$-dimensionalen Gebilde ausgebreitet, so resultirt ein homogen zusammengesetztes $(n-1)$-dimensionales Gebilde, welches für die Fälle $n = 2, 3, 4$ bez. als Kette des Polygons, als Netz des Polyeders, als Zellgewebe des Polytops bezeichnet wird. Hierbei kann für $n = 2$ der zu beiden Seiten der Kette liegende Theil der im Unendlichen geschlossenen Geraden, für $n = 3$ der rings um das Netz liegende Theil der Ebene, für $n = 4$ der rings um das Zellgewebe liegende Theil des Euklidischen Raumes als die Abbildung des einen, vorher entfernten Grenzgebildes angesehen werden.

Umgekehrt kann ein homogenes n-dimensionales Gebilde durch Zusammenfaltung eines homogen zusammengesetzten $(n-1)$-dimensionalen Gebildes im n-dimensionalen Raume und Hinzufügung des einen fehlenden Grenzgebildes erzeugt werden.

In der vorliegenden Schrift erstreckt sich die Untersuchung im Wesentlichen auf die homogen zusammengesetzten Gebilde der Ebene und des Euklidischen Raumes.

Der erste Hauptheil enthält die Betrachtung der homogen zusammengesetzten Figuren in der Ebene oder der homogenen polygonalen Figuren. In dem ersten Abschnitte werden zunächst Relationen zwischen den Gesammtzahlen der Gebilde, den Zahlen der

äusseren und inneren Gebilde, speciell auch für die vollständigen derartigen Figuren (für welche die Zahl der in einer Aussenecke und in einer Innenecke zusammentreffenden Kanten dieselbe ist) aufgestellt. Für die nähere Bestimmung der verschiedenen Arten der homogenen polygonalen Figuren ergeben sich drei Fälle entsprechend der Formel:

$$\Delta = 2(n+p) - np \gtreqless 0,$$

wenn n die Kantenzahl der Polygone, p die Anzahl der in jeder Innenecke zusammentreffenden Flächen bedeutet. Der erste Fall: $\Delta > 0$, liefert fünf endliche vollständige Figuren, nämlich die 3theilige, 7theilige und 19theilige triagonale, die 5theilige tetragonale und die 11theilige pentagonale Figur. Im zweiten Falle: $\Delta = 0$, ergeben sich drei unendliche (d. h. aus einer unendlichen Anzahl von Theilen bestehende) vollständige Figuren, den Werthsystemen

$$n = 6, \quad p = 3,$$
$$n = 4, \quad p = 4,$$
$$n = 3, \quad p = 6$$

entsprechend. Der dritte Fall: $\Delta < 0$, liefert keine vollständigen Figuren, sondern solche Netze, welche ins Unendliche fortgesetzt werden können, doch nicht gleichmässig, wie im zweiten Falle, sondern so, dass die entfernteren Theile sich mehr zusammendrängen und der Umfang der polygonalen Figur sich einer Curve als Grenze nähert. Die Construction der vollständigen homogenen Figuren wird sodann durch Zusammensetzung oder Zerlegung einer gegebenen Figur ausgeführt, wobei sich diese beiden Processe als symmetrisch verwandt zufolge der Eigenschaft der Umkehrbarkeit erweisen.

Diejenigen Systeme ebener Polygone, deren Ebenen Winkel bilden, d. h. die räumlichen polygonalen Figuren, deren Betrachtung der folgende Abschnitt gewidmet ist, gehen aus den ebenen polygonalen Figuren hervor. Aus den vollständigen endlichen Figuren ergiebt sich beim Uebergang aus der Ebene in den Raum und durch Hinzufügung der vom Randpolygon begrenzten „Schlussseite" eine geschlossene Figur und damit ein durch diese begrenztes homogenes Polyeder. Diese letzteren Gebilde leitet der Verfasser auch direct aus der Euler'schen Formel her und erhält so die bekannten fünf Arten dieser Figuren und der durch sie begrenzten homogenen Polyeder, wobei die Beziehungen dieser Figuren zu denen der Ebene (für $\Delta > 0$) und auch das gegenseitige Entsprechen je zweier sich leicht ergeben. Die ebenen polygonalen Figuren lassen sich nicht nur als die perspectivischen ebenen Abbildungen jener Körper, sondern auch als Specialfälle derselben ansehen. Analog werden den Figuren in der Ebene (für $\Delta = 0$) entsprechend im Raume drei Arten offener homogener Figuren mit endlicher Grösse aller Flächen, nämlich die triagonale, tetragonale und hexagonale Figur, erhalten.

In einem weitern Abschnitte wird die homogene Bedeckung von Oberflächen (von überall gleichartiger Krümmung) behandelt, bei welchen die Polygonsysteme durch kürzeste Linien begrenzt werden. Hier lassen sich, entsprechend den drei Hauptarten polygonaler Figuren, drei Arten von Bedeckungen unterscheiden, nämlich von Flächen mit positiver, verschwindender und negativer Krümmung. Sodann betrachtet der Verfasser die gegenseitigen Abbildungen einer Fläche auf einer andern und macht in dem letzten Abschnitte noch Anwendungen auf die Flächenmessung auf der Ebene (Quadrangulation, Triangulation, Hexangulation), auf der Kugel und der Pseudosphäre.

Der zweite Haupttheil enthält die Bestimmung und Untersuchung der homogenen polyedrischen Körper, d. h. der homogen zusammengesetzten Polyeder. Nach Herleitung allgemeiner Formeln zwischen den Gesammtzahlen der Gebilde, den Zahlen der inneren und äusseren Grenzgebilde, insbesondere auch für die vollständigen und regelmässigen polyedrischen Körper wird, da eine der Grösse $\varDelta$ bei den polygonalen Figuren analoge Function sich hier annullirt, zur Ermittelung der homogenen polyedrischen Körper der folgende Weg eingeschlagen. Da die Construction eines solchen Gebildes entweder durch Zerlegung oder Zusammensetzung eines gegebenen Körpers erfolgen kann, wobei im letzteren Falle die Aussengrenze des fertigen Gebildes verschieden ausfällt, je nachdem man von der Gruppirung der Körper um einen Punkt, eine Kante, eine Fläche oder einen Körper ausgeht, es aber von vornherein nicht zu erkennen ist, welche dieser Arten der Zusammensetzung den homogenen Körper liefert, so geht man am besten von der äussern bekannten Gestalt der regelmässigen Körper aus und bestimmt diese durch Zerlegung — wiewohl diese Methode den Unterschied zwischen endlichen und unendlichen Bildungen im Allgemeinen nicht hervortreten lässt. Der Verfasser stellt demgemäss die von der Beschaffenheit der Aussenfläche abhängigen Grössen als Functionen von P (der Zahl der in jeder innern Ecke zusammentreffenden Körper), die übrigen Grössen als Functionen von P und C (der Zahl der Körper) dar, bestimmt alsdann die Werthe für P und ermittelt schliesslich diejenigen für C in den einzelnen Fällen. Auf diese Weise ergeben sich sechs endliche und ein unendlicher vollständiger Körper (mit endlicher Grösse aller Theile), nämlich der 4theilige, 15theilige, 599theilige tetraedrische, der 23theilige oktaedrische, der 7theilige hexaedrische, der 119theilige dodekaedrische und der unendliche hexaedrische Körper, ausserdem noch vier unendliche Körper mit ins Unendliche abnehmender Grösse der Theile, den Werthen $P=12,\ N=20;$

$$P=20,\ N=6;$$
$$P=8,\ N=12;$$
$$P=20,\ N=12$$

entsprechend, wo N die Seitenzahl jedes einzelnen Polyeders bezeichnet.

Die specielle Untersuchung der sechs endlichen vollständigen Körper, zumal des dritten und sechsten, welche ziemlich complicirte Gebilde darstellen, wird sorgfältig durch das Verfahren der Zerlegung in Schichten unter fortwährender Anwendung der aufgestellten Formeln durchgeführt und durch die beigefügten Figuren erläutert. Auch wird das Verfahren der Zusammensetzung, welches auch hier mit dem der Zerlegung symmetrisch verwandt erweist, kurz erwähnt.

In einem weitern Abschnitte werden nun die geschlossenen Körper und die homogen begrenzten vierdimensionalen Gebilde aus den polyedrischen Körpern entwickelt. Wenn man sich je zwei benachbarte Polyeder der letzteren in verschiedenen Euklidischen Räumen liegend denkt, so können die bisher betrachteten Körper als die Abbildungen von vierdimensionalen Gebilden in einem Euklidischen Raume aufgefasst werden. Bei diesem Uebergang in den vierdimensionalen Raum giebt das Polyeder, welches die Aussenfläche eines vollständigen endlich polyedrischen Körpers bildete, einen Körper, welcher im Verein mit den Theilen des polyedrischen Körpers einen Theil jenes Raumes vollständig begrenzt. So werden aus den endlichen polyedrischen Körpern sechs homogen begrenzte, geschlossene vierdimensionale Gebilde erhalten, für welche die Zahl der Grenzkörper um 1 grösser ist, als die Zahl der Theile des polyedrischen Körpers: das 5-Zell, 16-Zell, 600-Zell, 24-Zell, 8-Zell und 120-Zell. Diejenigen speciellen Fälle dieser Gebilde, bei welchen die Grenzkörper nicht nur homogen, sondern regulär sind, d. h. die sogenannten regulären Vielräume (Polytope), sind bereits von Stringham, Hoppe, Scheffler (und auch von Forchhammer) untersucht worden. Aus den vom Verfasser aufgestellten Formeln ergiebt sich in einfacher Weise, dass es nicht möglich ist, die homogenen vierdimensionalen Gebilde auch unabhängig von ihren Abbildungen in einem Euklidischen Raume zu bestimmen. Auch wird hier das Entsprechen der erhaltenen vierdimensionalen Gebilde hervorgehoben und auf die Vorstellung eingegangen, die polyedrischen Körper nicht nur als perspectivische räumliche Abbildungen von vierdimensionalen Gebilden, sondern auch als Specialfälle derselben aufzufassen, überhaupt auf die Analogie der hier sich darbietenden Beziehungen mit den früher beim Uebergang aus dem zwei- in den dreidimensionalen Raum hervorgetretenen hingewiesen.

Ferner ergeben sich im vierdimensionalen Raum nur eine Art offener homogener polyedrischer Körper mit endlicher Grösse aller Theile (der zweite hexaedrische) und vier solcher Körper mit ins Unendliche abnehmender Grösse aller Theile: der ikosaedrische, der dritte hexaedrische und zwei dodekaedrische.

In einem weitern Abschnitte wird das Problem der homogenen Ausfüllung von dreidimensionalen Räumen von überall gleichartiger und constanter (positiver, verschwindender oder negativer) Krümmung durch homogene polyedrische Körper behandelt, deren Eckpunkte durch kürzeste Linien verbunden sind, während die von diesen Linien eingeschlossenen Polygone Flächenstücke kleinster Krümmung sind. Es ergeben sich so für einen geschlossenen dreidimensionalen Raum mit positiver Krümmung sechs Arten vollständiger homogener Ausfüllung, für einen Euklidischen Raum nur eine (die unendlich hexaedrische), für einen offenen dreidimensionalen Raum von negativer Krümmung vier (unendliche) Arten vollständiger homogener Ausfüllung.

Es folgen dann noch Betrachtungen über die gegenseitigen Abbildungen der Ausfüllung eines Raumes in einem andern, insbesondere über die vier Arten der Uebertragungen der vollständigen Ausfüllung eines positiv gekrümmten Raumes in den Euklidischen. Von diesen ist hauptsächlich die Zusammensetzung derjenigen Abbildungen der homogenen Gebilde von Interesse, welche dadurch zu Stande kommen, dass eine Ecke mit den P in ihr zusammentreffenden Körpern weggelassen und der Rest in einem Euklidischen Raume ausgebreitet wird.

Endlich werden auch die Anwendungen auf die dreidimensionale Inhaltsbestimmung (Raummessung) für die drei unterschiedenen Fälle besprochen und zum Schluss die verwandten Arbeiten von Hoppe, Stringham, Scheffler u. A. berücksichtigt, wobei darauf hingewiesen wird, dass durch die Untersuchungen von Stringham auch die Frage nach der Existenz endlicher homogener Gebilde für den n-dimensionalen Raum beantwortet ist. —

Unser Gesammturtheil über die vorliegende Arbeit glauben wir nicht besser ausdrücken zu können, als mit fast denselben Worten, welche H. Grassmann in der zweiten Vorrede zu seiner linealen Ausdehnungslehre über das „System der Raumlehre“ desselben Verfassers ausgesprochen hat: „Der Verfasser hat mit grosser Klarheit und zum grossen Theile in selbstständiger, der Sache durchaus angemessener Methode die Bedeutung dieses besondern Zweiges der Ausdehnungslehre dargelegt.“ Der in der Schrift behandelte besondere Zweig der Ausdehnungslehre ist in der That besonders geeignet, den Nutzen mehrdimensionaler Untersuchungen vor Augen zu führen, welcher ja nicht zum kleinsten Theile darin besteht, die Beziehungen der anschaulich vorstellbaren Gebilde der Ebene und des Euklidischen Raumes in ein neues Licht zu setzen. Die von dem Verfasser angewendeten Methoden entsprechen mehrfach dem von G. Veronese in einer inhaltsreichen und bedeutungsvollen Arbeit (Math. Ann. XIX, S. 161 flgg.) aufgestellten und angewendeten Princip des Projicirens und Schneidens.

Fügen wir hinzu, dass die Schrift von Schlegel noch eine Fülle anregender Bemerkungen enthält, auf welche in der obigen Wiedergabe des wesentlichen Inhalts nicht eingegangen werden konnte, so lässt sich die Erwartung aussprechen, dass die Schrift von Schlegel im Verein mit den von Stringham und Hoppe gewonnenen Resultaten, zumal des Letzteren Untersuchungen über mehrdehnige Winkel, den Anlass zur Aufstellung weiterer interessanter Beziehungen geben wird. Referent hofft hierzu in der Kürze einen Beitrag liefern zu können, zu welchem er im Wesentlichen die Anregung dem Studium der Schlegel'schen Schrift verdankt.

Dem oben ausgesprochenen Gesammturtheil gegenüber kommen einige Bemerkungen, welche wir noch zu machen haben, kaum in Betracht.

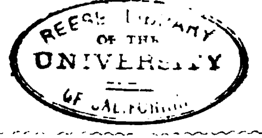
Bei der Besprechung der Bedeckung von Flächen mit positiver Krümmung, speciell der Kugel, giebt der Verf. für die ikosaedrische Bedeckung [S. 36 unter 3)] an, man solle auf der Kugelfläche sechs Paar Gegenpunkte so annehmen, dass je zwei Paar auf einem Diametralkreise liegen, und diese 15 Diametralkreise construiren. Diese Bedingung, welche ja im Allgemeinen immer erfüllt ist, genügt aber nicht, um das verlangte Netz zu bestimmen. Von den sechs Punkten (und deren Gegenpunkten) sind nur vier beliebig — nur so, dass nicht je drei auf einem Diametralkreise liegen — annehmbar, die beiden anderen aber durch die Bedingung bestimmt, dass die sechs Punkte die Eckpunkte eines sphärischen zehnfach-Brianchon'schen Sechsecks darstellen. (Vergl. des Ref.: Einleitung in die Lehre von der Kugeltheilung. Leipzig, Teubner. 1883. S. 422 flgg.)

Bei der in der Einleitung (S. 8) gegebenen Definition des Entsprechens zweier homogenen n-dimensionalen Gebilde hätte wohl die allgemeinere Beziehung, nach welcher die Zahl der $(n-m)$-dimensionalen Grenzgebilde des einen gleich derjenigen der $(m-1)$-dimensionalen Grenzgebilde des andern Gebildes ist, Erwähnung verdient.

Auf S. 111 Anm. 3) sollte es statt „Rhomboeder" heissen: „Rhombendodekaeder", welches durch die Zusammensetzung von vier Rhomboedern (mit Flächenwinkel $=120^0$) resultirt.

Die Anmerkung auf S. 115, in welcher der Verf. u. A. als eine wahrscheinliche Folgerung der vorhergehenden Betrachtungen die Immaterialität unseres Geistes hinstellen will, würde nach unserer Ansicht besser fortgefallen sein. Wir befürchten, dass der Inhalt dieser Anmerkung Denjenigen, deren „wissenschaftlicher Tummelplatz das Grenzgebiet der Philosophie und der Mathematik ist", einen nicht ganz unbegründeten Anlass zu Angriffen bieten und möglicherweise neue Missverständnisse über die Bedeutung n-dimensionaler Untersuchungen bedingen möchte.

Schliesslich glaubt Referent darauf hinweisen zu müssen, dass, so sehr auch die analoge Durchführung der Untersuchungen im zwei- und



dreidimensionalen Raume und derjenigen im drei- und vierdimensionalen Raume als ein Hauptvorzug der Schrift zu bezeichnen ist, doch das vom Verf. zufolge der Analogie für die Herleitung und Beschreibung der homogenen polyedrischen Körper gewählte Verfahren nicht das einfachste und zur Einführung in diese Lehren geeignetste sein dürfte. Insbesondere glaubt Ref., dass Jeder, welcher zuerst eine genauere Vorstellung über die Structur z. B. des dritten, complicirtesten polyedrischen Körpers (welcher sich aus 599 Tetraedern zusammensetzt) gewinnen will, viel einfacher und rascher zum Ziele kommt, wenn er das vom Verf. erwähnte und von Hoppe (Arch. f. Math. u. Phys. T. 67 S. 38 flgg.) für das entsprechende reguläre Gebilde durchgeführte Verfahren der Zusammensetzung, von der Gruppirung der 20 Tetraeder um einen Punkt ausgehend, wählen wird. Es tritt bei Anwendung dieses Verfahrens die symmetrische Gruppirung der Ecken, Körper u. s. w. in Beziehung auf die mittlere Zone, deren Eckpunkte im Falle der Regelmässigkeit mit denjenigen eines (12+20)-flächigen gleicheckigen 30-Ecks zusammenfallen, sowie auch das Entsprechen des dritten und sechsten polyedrischen Körpers in allen Einzelheiten bei Weitem besser und vollständiger hervor, als bei dem vom Verf. gewählten, wenn auch sorgfältig durchgeführten Verfahren der Zerlegung.

Marburg, im October 1883. EDMUND HESS.

Grundriss einer elementar-geometrischen Kegelschnittslehre, von H. G. ZEUTHEN. Leipzig, B. G. Teubner. 1882.

Die Vielseitigkeit, Klarheit und Tiefe der mathematischen Forschung, welche einen in ihrem Bereiche liegenden Gegenstand bald von dieser, bald von jener Seite betrachtet, auf den verschiedensten Seitenpfaden ihn zugänglich findet und mit anscheinend entlegenen Gegenständen in nächster unerwarteter Wechselwirkung erkennt, hat von jeher in der Theorie der Kegelschnitte ihre schönsten Triumphe gefeiert und die Geister mit unwiderstehlicher Gewalt stets auf's Neue angezogen. Zu diesem hohen sachlichen Interesse, welches die mathematische Behandlung der Kegelschnitte dem Weiterblickenden darbietet, kommt ihre didaktische Bedeutung, da sie für den Anfänger die unerlässliche Bedingung jedes weiteren Fortschreitens darstellen. Man kann es daher als in der Natur der Sache liegend ansehen, wenn fähige Bearbeiter die Kegelschnitte wieder und wieder von neuen theoretischen und praktischen Gesichtspunkten aus darzulegen und dem Anfänger fassbar zu machen unternehmen.

Nachdem der Verfasser des vorliegenden Büchleins auf sieben Seiten der Einleitung die grundlegenden Sätze über Kreisbüschel mitgetheilt

und die Lösung des Tactionsproblems angegeben hat, definirt er die drei Kegelschnitte Ellipse, Hyperbel und Parabel ganz nach der Methode der Alten durch ihre Brennpunkteigenschaft. Dieselben werden darauf im Einzelnen durchgenommen, ihre Form wird festgestellt, es werden daran, namentlich in Bezug auf die Tangenten, einige vorläufige Bemerkungen geknüpft und die Grenzformen untersucht.

Daran schliessen sich Uebungsaufgaben.

Der Verfasser schreibt ersichtlich für Schüler, die an streng logische Formulirung jedes Sätzchens gewöhnt sind. Aus diesem Grunde werden eindeutige Beziehungen keineswegs sofort umgekehrt, sondern es wird für nicht überflüssig gehalten, die Berechtigung dieses Verfahrens ausdrücklich nachzuweisen. Dieser Beweis gelingt an einer besonders geeigneten Stelle in § 74, wo der betreffende Schluss vollständig durchgeführt und die Bemerkung beigefügt ist, dass man sich im Folgenden öfter Beweise für Umkehrungen ähnlich geführt denken müsse. Dabei verweist Verf. auf einen frühern Fall, wo bereits ein analoger Schluss, dessen sich der Leser vielleicht von der Elementarbank her erinnert, vorgekommen ist mit gewissermassen berechtigter *captatio benevolentiae*. Allein noch einmal in einem spätern Falle, S. 33 § 115, führt der Verfasser das Schlussverfahren in kurzer Andeutung nochmals durch. Es ist dem Referenten ganz unzweifelhaft, dass diese Darstellungsweise dem aus Euklid's formstarrer, aber überzeugender Schule kommenden Anfänger gefallen wird. Und auch des Mathematikers scheint es mir würdiger, solche Kleinigkeiten in im Ganzen vielleicht einem Dutzend Zeilen gebührend zu erledigen, als durch billige Wendungen, wie: „Umgekehrt hat man“ oder: „Selbstverständlich ist auch umgekehrt“ oder: „Offenbar ist“ darüber fort zu hüpfen.

An dieser Stelle möge es mir auch gestattet sein, noch zwei andere Gesetze hervorzuheben, die der Verfasser sich anscheinend auferlegt hat.

Das eine besteht darin, dass jedem Abschnitte eine Sammlung von Uebungsaufgaben beigefügt ist, die sich inhaltlich auf das bereits Vorgetragene beziehen und eine wirksame Recapitulation des ganzen bis dahin durchgenommenen Lernstoffes ermöglichen. Dabei ist jede Andeutung einer Lösung streng vermieden.

Ferner ist der Lehrstoff zwar kurz und knapp, aber so klar vorgetragen und mit so grossem didaktischem Geschick jedesmal, wo Zweifel entstehen könnten, auf die vorbereitenden Sätze durch Angabe des betreffenden Paragraphen verwiesen, dass Referent hier ein uneingeschränktes Lob zu spenden in der Lage ist.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen gehen wir in der Durchsprechung des Einzelnen weiter.

Auf S. 17—24 werden Eigenschaften der Tangenten aus den Brennpunktseigenschaften abgeleitet. Die Darstellung kann hier schon öfter

in ganz ungezwungener Weise dem bestimmten den allgemeinen Kegelschnitt substituiren und selbst eine mehr projectivische Eigenschaft ergiebt sich ungesucht im Laufe des Vortrags. Zu dem in § 72 gegebenen Satze vermisse ich eine nebenstehende Figur und S. 21 Z. 29 steht durch Druckfehler Scheitel für Schenkel. Unter den Uebungsaufgaben hebe ich hervor: „Eine gemeinschaftliche Tangente an zwei concentrische Kegelschnitte zu legen.“

Im vierten Abschnitte, welcher bis S. 32 geht, werden die confocalen Kegelschnitte erörtert. Dieselben führen sich durch folgende klare Darlegung ein: „Wenn durch einen Punkt ein Kegelschnitt mit gegebenen Brennpunkten gelegt werden soll, so wird derselbe entweder eine Ellipse sein, deren Brennpunktsaxe gleich der Summe, oder eine Hyperbel, deren Brennpunktsaxe gleich der Differenz der Brennstrahlen an den gegebenen Punkt ist. Diese zwei Curven werden sich noch in drei anderen Punkten, die mit dem ersten in Bezug auf die Axen und das Centrum symmetrisch liegen, schneiden, und ihre Tangenten in jedem Schnittpunkte sind senkrecht aufeinander.“ (Folgt Verweisung auf §§ 36 und 50.)

Man sieht aus dieser Beifügung, wie ängstlich der Verfasser bemüht ist, dem studirenden Leser keine Räthsel aufzugeben. Der Text soll eben nach der von mir oben bemerkten Absicht des Verfassers möglichst mühelos verständlich sein, während die Selbstthätigkeit in den Aufgaben hinreichenden Stoff zur Bethätigung findet.

Sprachlich würde ich mich S. 27 § 103 etwas anders ausgedrückt haben, indem ein gewisser geometrischer Ort wohl einer von zwei Kegelschnitten sein muss, nicht aber sich „von zwei Kegelschnitten zusammensetzt“. Auch würde ich S. 129 § 106 1. Abs. die drei verschiedenen Bestimmungen von Schnittpunkten durch 1), 2), 3) hervorgehoben wissen wollen.

Unter den Uebungsaufgaben erwähne ich:

„4. Einen Kegelschnitt mit einem gegebenen Brennpunkte zu construiren, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kegelschnitt mit demselben Brennpunkte berührt.

8. Eine Parabel zu construiren, welche vier gegebene Gerade berührt. Zu zeigen, dass die den von vier willkürlichen Geraden gebildeten Dreiecken umschriebenen Kreise durch einen festen Punkt gehen.“

Abschnitt V mit der Ueberschrift „Leitlinien“ geht bis S. 38. Ausser den gewöhnlichen Sätzen finden wir hier in §§ 120 und 121 kurz und einfach die Grundeigenschaften von Pol und Polare, ohne dass diese Begriffe als solche genannt werden, entwickelt. Ebenso in § 125 den Fundamentalsatz über das anharmonische Doppelverhältniss. Diese Gegenstände ergeben sich aus dem Lehrgange recht ungezwungen. Nur

hätte der Fall, dass die Berührungssehne durch den Brennpunkt geht, ausdrücklich erwähnt werden sollen und als Gedächtnissunterstützung öfters der Kreis mit seinen analogen, dem Studirenden bekannten Sätzen herangezogen werden dürfen. Die Beziehung $sec\frac{1}{2}v$ S. 35 hält Ref. für veraltet, S. 33 Z. 2 v. u. fehlt ein Accent. Die Uebungsaufgaben empfehle ich dem Leser als treffliche Gelegenheit, nicht blos den vorhergehenden, sondern alle bis dahin vorgetragenen Abschnitte zu repetiren. Als besonders charakteristisch sei erwähnt:

„6. Ein Vieleck ist dem einen von zwei Kegelschnitten, die einen Brennpunkt und die zugehörige Leitlinie gemein haben, eingeschrieben, dem andern umgeschrieben. Zu beweisen, dass in diesem Falle unendlich viele Vielecke in derselben Verbindung mit den zwei Kegelschnitten stehen.“

Zu Aufgabe 13 sei bemerkt, dass der Parameter eines Kegelschnittes nicht definirt ist und ich erst nach einigem Suchen in den §§ 33, 48, 61 die Definitionen für die drei besonderen Kegelschnittsarten fand. An dieser Stelle habe ich das Fehlen eines *index rerum* übel empfunden.

Abschnitt VI, über die Durchmessereigenschaften, reicht bis S. 52. Der Inhalt ist wieder ein sehr reicher, wobei insbesondere §§ 143 und 152 erwähnt seien. Zu § 160 vermisse ich die Figur. Druckfehler fanden sich S. 49 Z. 15 v. o., S. 50 Z. 2 (dieser statt diese).

Von jetzt ab glaube ich mich mit einer kurzen Inhaltsangabe der einzelnen Abschnitte unter blosser Hervorhebung einiger geringer Aussetzungen begnügen zu sollen. Ich fürchte sonst, durch Wiederholung von Lobsprüchen den Leser zu ermüden. Nur eine Ausnahme werde ich machen.

Abschnitt VII enthält die Asymptoteneigenschaften und die Heranziehung der gleichseitigen Hyperbel. In § 165 ist wohl 146 statt 143 zu lesen, obwohl auch das Letztere richtig ist. S. 54 und sonst, z. B. Fussnote S. 32, redet der Verfasser von „entgegengesetzten Umlaufssinnen“, wo mir der Plural sprachlich nicht gefallen kann. Ebenda Z. 3 v. u. steht C durch Druckfehler statt O. S. 55 oben würde ich den Satz ebenfalls sprachlich anders formuliren.

Es folgen dann Arealbestimmung und die Centralprojection, die im eigentlichen Sinne § 193 auftritt und planimetrisch schon an früherer Stelle durchblickt. Daran reihen sich Sätze über Pol und Polare, wo uns Aufgabe 4 S. 76 an S. 31 und § 215 an S. 34 recapitulirend und vervollständigend gemahnen. Weitere Sätze über confocale Kegelschnitte und Anwendungen auf die Wurfbewegung und die Kepler'schen Gesetze bilden den Schluss des trefflichen Buches.

Die bereits oben angekündigte Ausnahme von dieser kurzen Inhaltsangabe mache ich zu Gunsten eines Beweises des Satzes von Brianchon.

Derselbe rührt von dem Herrn F. Bing her. Er lautet wörtlich, zunächst für den Kreis giltig:

„Wir nennen die Berührungspunkte der Seiten $R_1, R_2, \ldots, R_6$. Auf den Seiten bestimmen wir weiter Punkte $S_1, S_2, \ldots, S_6$, indem wir auf alle eine willkürliche Strecke so absetzen, dass $R_1S_1 = -R_2S_2 = R_3S_3 = -R_4S_4 = R_5S_5 = -R_6S_6$, wo derjenige Sinn einer Tangente als der positive gerechnet wird, welcher vom Berührungspunkte aus gesehen dem Bogen z. B. rechts liegt. R_1S_1 und R_4S_4 werden dann einen Kreis (A) in S_1 und S_4 berühren, R_2S_2 und R_5S_5 einen Kreis (B) in S_2 und S_5, R_3S_3 und R_6S_6 einen Kreis (C) in S_3 und S_6. Der Schnittpunkt von R_1S_1 und R_2S_2 hat dann dieselbe Potenz in Bezug auf die beiden Kreise (A) und (B), ebenso der Schnittpunkt von R_4S_4 und R_5S_5; die diese Punkte verbindende Gerade ist also die Potenzlinie von (A) und (B) und muss also durch das Potenzcentrum von (A), (B) und (C) gehen. Dasselbe ist der Fall mit den beiden anderen Diagonalen, welche die gegenüberliegenden Ecken des Sechsecks verbinden."

Eine so klare und mit so einfachen Mitteln operirende Beweisführung ist selbst ihre beste Empfehlung. Und in diesem Geiste ist das ganze Buch verfasst.

Die deutsche Bearbeitung rührt von dem Herrn Verfasser unmittelbar her. Dass dieselbe von sprachlichen Unreinheiten, die er in der Vorrede sehr bescheiden in Erwähnung bringt, durchgehends nach meiner Ueberzeugung frei ist, glaube ich dadurch am deutlichsten gezeigt zu haben, dass ich an einigen Stellen mein abweichendes Sprachgefühl betont habe.

Sei hiermit das kleine Büchlein, welches auf 97 Seiten so viel des Trefflichen bietet, den Studirenden der Hochschulen und ganz besonders den Lehrern an höheren Unterrichtsanstalten bestens empfohlen.

Coesfeld, im October 1883. K. Schwering.

Einleitung in die Lehre von der Kugeltheilung. Mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendung auf die Theorie der gleichflächigen und der gleicheckigen Polyeder von Dr. Edmund Hess, a. o. Professor an der Universität Marburg. Mit 16 lithographirten Tafeln. Leipzig, Verlag von Teubner. 1883.

Das vorliegende Werk behandelt in umfassender, systematischer Weise einen Theil der Raumgeometrie, dem im Allgemeinen auf den Universitäten wenig Beachtung geschenkt wird, das Problem der Kugeltheilung, also die Theilung der Kugelfläche in eine bestimmte Anzahl von gleichen und ähnlichen sphärischen Polygonen. Genauer präcisirt, nimmt es die folgende Fassung an:

„Es soll eine gegebene Kugelfläche mit einem Netze von gleichen und ähnlichen sphärischen Polygonen überzogen oder es sollen alle Fälle ermittelt werden, in welchen ein sphärisches Polygon nebst seinen congruenten oder symmetrischen Wiederholungen eine geschlossene Fläche bildet, welche die Kugel ein- oder mehrere Male bedeckt.“

Unter den einfachen, die Kugelfläche einmal bedeckenden gleichflächigen und den zugeordneten gleicheckigen Netzen werden zunächst die regulären Netze hervorgehoben und dann diejenigen, welche der Reihe nach durch sphärische Dreiecke, Vierecke, Fünfecke gebildet werden. Den gleicheckigen Netzen sind die gleicheckigen Polyeder ein-, die gleichflächigen Polyeder umgeschrieben, so dass sich aus jenen Netzen die gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder ergeben, von welchen die Archimedeischen und Platonischen Polyeder nur besondere Fälle sind.

Eingeleitet wird die Untersuchung dieser Netze durch die Definition der regulären und halbregulären sphärischen Polygone. Ein reguläres sphärisches n-Eck wird erhalten, wenn man die aufeinanderfolgenden Theilpunkte eines in n gleiche Theile getheilten kleinen Kugelkreises durch Hauptkreisbögen verbindet; ein halbreguläres Polygon ist entweder nur gleichseitig oder nur gleicheckig. Das gleicheckige Polygon hat gleiche Innenwinkel und abwechselnd gleiche Seiten, seine Eckpunkte liegen auf einem kleinen Kugelkreise; das gleichseitige Polygon hat gleiche Seiten und abwechselnd gleiche Innenwinkel, seine Seiten berühren einen kleinen Kugelkreis.

Von den allgemeinen Eigenschaften der Netze wird zuerst die durch den Euler'schen Satz ausgedrückte abgeleitet. Bezeichnet s die Summe der Innenwinkel einer n-eckigen Grenzfläche, m die Anzahl der Flächen, μ diejenige der Ecken, k diejenige der Kanten, so ergiebt sich, wenn man die Summe der Flächeninhalte der Grenzflächen gleich der Kugelfläche setzt,

$$\sum_1^m s - \sum_1^m (n-2)\,180^0 = 720^0$$

und, da

$$\sum_1^m s = \mu . 360^0, \quad \sum_1^m n = 2k$$

ist,

$$\mu + m = k + 2.$$

Um die sämmtlichen regulären Netze zu erkennen, denke man sich die Kugelfläche mit m regulären n-Ecken bedeckt. Bedeutet A den Innenwinkel eines n-Ecks, so gilt die Gleichung

$$nA - (n-2)\,180^0 = \frac{720^0}{m}.$$

Wenn in jeder Ecke ν Flächen zusammenstossen, so ist

$$\nu . A = 360^0.$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$m = \frac{4\nu}{2n - (n-2)\nu},$$

diejenige Gleichung, deren Discussion die sämmtlichen regelmässigen Netze ergiebt.

Es fällt jetzt die Beschränkung, dass die Grenzflächen regulär sein sollen; doch bleibt diejenige bestehen, dass sie congruent oder symmetrisch-gleich sind.

In einem Netze von gleichschenkligen Dreiecken seien die Winkel eines solchen Dreiecks A_1, A_2, A_3 und $A_2 = A_3$, ferner die Seiten α_1, α_2, α_3 und $\alpha_2 = \alpha_3$. Wieder gilt die Gleichung

$$A_1 + 2A_2 - 180^0 = \frac{720^0}{m}.$$

Diejenigen Ecken, deren Scheitel die Spitzen der gleichschenkligen Dreiecke bilden, seien regulär, die anderen halbregulär. Bezeichnet ν_i die Zahl der in einer Ecke zusammenstossenden gleichen Winkel A_i, so ist

$$\nu_1 A_1 = \nu_2 A_2 = 360^0.$$

Beide Gleichungen ergeben die neue Gleichung

$$\frac{2}{\nu_1} + \frac{4}{\nu_2} = 1 + \frac{4}{m},$$

deren Discussion wieder die sämmtlichen Fälle erkennen lässt. Die wichtigsten Eigenschaften der so erhaltenen Sätze werden in den folgenden Paragraphen (16—23) besprochen.

Die gleichschenkligen Dreiecke können noch auf zwei andere Arten gruppirt werden, erstens so, dass sie gleicheckige Netze liefern, indem an jeder Ecke der Basiswinkel doppelt so oft auftritt, als der Spitzenwinkel. Geschieht Letzteres k-mal, so kommt noch die Gleichung hinzu

$$k(A_1 + 2A_2) = 360^0$$

und aus beiden

$$m = \frac{4k}{2-k},$$

woraus als einzig möglicher Werth $k = 1$ und $m = 4$ folgt.

Eine dritte Möglichkeit für die Anordnung der gleichschenkligen Dreiecke ist die folgende. Von den beiden Basiswinkeln stossen je ν_1 Winkel in einer Ecke zusammen und in einer andern Ecke gleichviel Basis- und Spitzenwinkel k von jeder Art. Ist μ_1 die Anzahl der Ecken der ersten Art, μ_2 diejenige der zweiten, so erhält man zur Bestimmung der möglichen Netze dieser Anordnung die Gleichung

$$m = \frac{4\nu_1 k}{2\nu_1 - (\nu_1 - 2)k}.$$

In ähnlicher Art werden die übrigen Netze behandelt, also zunächst die Dreiecksnetze mit ungleichen Seiten, dann die Vier- und Fünfecksnetze. Auf das reichhaltige Detail kann in einer Besprechung, ohne dieselbe zu sehr auszudehnen, nicht näher eingegangen werden; es ist in klarer, übersichtlicher Weise dargelegt. Die so erhaltenen gleichflächigen und gleicheckigen Netze, sowie die entsprechenden Polyeder werden dann in bestimmte Hauptclassen und Gruppen zusammengefasst.

Den Schluss des Capitels bildet eine Anwendung auf die räumlichen Winkelspiegel (Polyederkaleidoskope).

Es folgt die analytische Darstellung der gleichflächigen und gleicheckigen Netze, sowie der zugehörigen Polyeder, für welche sich ein rechtwinkliges Coordinatensytem nicht darbietet.

Durch stereographische Projection der erhaltenen Netze werden die Beziehungen der gewonnenen Resultate zu gewissen Problemen der Functionentheorie und der Algebra dargelegt. Hieran schliesst sich die collineare und reciproke Transformation der gleichflächigen und gleicheckigen Netze.

Im letzten Capitel wird die Herleitung derjenigen gleichflächigen und gleicheckigen Netze, welche mehrfach die Kugelfläche bedecken, behandelt.

Wenn auf einer Kugelfläche ein Polygon liegt und wenn die Summe der Winkel, welche ein um einen beliebigen Punkt sich drehender sphärischer Radius vector beschreibt, dessen anderer Endpunkt den Perimeter des Polygons in der durch den Sinn dieses Perimeters gegebenen Richtung durchläuft, $b.360^0$ beträgt, so heisst das Polygon von der b^{ten} Art. Lässt man durch Verlängerung jeder Seite nach ihrer positiven Richtung an jeder Ecke einen Aussenwinkel entstehen und bezeichnet die Summe aller Aussenwinkel mit ΣU, den Excess mit E, so hat man für ein Polygon der b^{ten} Art

$$E + \Sigma U = b.360^0.$$

Die Art einer sphärischen Ecke wird durch die Zahl β bestimmt, wenn die Summe ihrer sphärischen Winkel $\beta.360^0$ beträgt.

Wenn ein sphärisches Netz B-mal die Kugelfläche bedeckt, k die Zahl der Kanten, m und μ die Zahl der Flächen und Ecken, b_i und β_i die Art einer Fläche und Ecke bezeichnet, so erhält man die erweiterte Euler'sche Formel

$$\sum_1^m b_i + \sum_1^\mu \beta_i = k + 2B.$$

Zur Herleitung der regulären Netze höherer Art, welche also die Kugelfläche mehrfach bedecken, dienen die Formeln

$$m = \frac{4.B.\nu}{2\beta n - (n - 2b).\nu}, \quad \cos\tfrac{1}{2}\alpha.\sin\tfrac{1}{2}A = \cos b \cdot \frac{180^0}{n}, \quad m.n = \mu.\nu = 2k,$$

worin m, n, ν die auf S. 134 angegebene Bedeutung haben.

Die Zahl derjenigen Lösungen der ersten Gleichung, welchen construirbare sphärische Netze höherer Art entsprechen, reducirt sich durch eine wichtige Eigenschaft dieser Netze, welche der folgende Satz ausspricht:

Jedes gleicheckige (speciell reguläre) Netz höherer Art hat seine Eckpunkte mit einem gleicheckigen (speciell regulären) Netze erster Art gemein.

Es ergeben sich sechs reguläre Netze höherer Art; vier von ihnen führen auf die Kepler-Poinsot'schen Sternpolyeder.

Den Schluss bilden die Methoden, die gleicheckigen und gleichflächigen Netze höherer Art herzuleiten, und die Bestimmung derjenigen, welche sich durch Anwendung jener Netze ergeben.

Hiermit wäre der ungemein reiche Inhalt des Buches im Allgemeinen angegeben. Es werde noch hervorgehoben, dass dasselbe leicht und fliessend geschrieben, im ersten Theile nur elementare Kenntnisse beansprucht. Jedem, der sich mit dem behandelten, immerhin etwas abgelegenen Gebiete der Geometrie beschäftigt, giebt es ein klares Bild von dem Zusammenhange der unendlichen Mannichfaltigkeit der Körperformen und eine Fülle von Anregungen; dem Lehrer aber wird es eine reiche Quelle zu interessanten stereometrischen Aufgaben sein. So wird denn das vorliegende Werk den Wunsch des Verfassers erfüllen helfen, dass dem in ihm behandelten Theile der Raumgeometrie mehr Beachtung geschenkt werden wird.

MILINOWSKI.

Die Deck-Elemente. Ein Beitrag zur descriptiven Geometrie von Dr. C. REUSCHLE, Professor an der technischen Hochschule zu Stuttgart. Mit einer lithographirten Figurentafel. Verlag der J. B. Metzler'schen Buchhandlung. Stuttgart. 8°. 37 S.

Man kennt seit Langem die Nützlichkeit der Affinitätsaxen bei der Bestimmung ebener Durchschnittsfiguren in der darstellenden Geometrie. In der vorliegenden interessanten Schrift geht der Verfasser einen wesentlichen Schritt weiter, indem er neben den oben angeführten Geraden noch andere Elemente in den Kreis der Betrachtungen zieht und ihre principielle Bedeutung für die descriptive Geometrie nachweist. Dies geschieht durch die folgenden Definitionen:

Ein Punkt, dessen beide Projectionen sich decken, heisse Deckpunkt.

Eine Gerade, deren beide Projectionen sich decken, heisse Deckgerade.

Eine Ebene, deren beide Spuren sich decken, heisse Deckebene.

Eine Gerade, deren beide Spuren sich decken, heisse symptotische Gerade.

Diesem Hauptgegenstande der Schrift gehen in einem Abschnitte „Allgemeines über descriptive Geometrie" einige Erörterungen über die

Anwendung des Reciprocitätsgesetzes voraus. Trotzdem die Constructionen in orthogonaler Projection einen wesentlich metrischen Charakter haben, kann man, was zunächst befremden möchte, jenes Princip zur Geltung bringen und einen Theil der Aufgaben und Lehrsätze in zwei einander dual gegenüberstehende Gruppen spalten. Definirt man zunächst behufs Erzielung grösserer Einfachheit im Ausdruck:

1. als Zenith einer Geraden in einer Ebene den unendlich fernen Punkt der Normalen der Geraden,
2. als Zenith einer Ebene den unendlich fernen Punkt ihrer Normalen,
3. als Zenithlinie einer Geraden die unendlich ferne Gerade der Normalebene der Geraden,

so kann man unter Benutzung eines aus zwei zu einander senkrechten Ebenen, *H*-Ebene und *V*-Ebene, bestehenden Projections- oder Grundsystems im Raume einander gegenüberstellen:

der *H*-Ebene	das Zenith der *H*-Ebene,
der *V*-Ebene	das Zenit der *V*-Ebene,
dem Grundschnitt, als Schnittlinie von *H*- und *V*-Ebene	die Zenithlinie, als Verbindungslinie der Zenithe von *H*- und *V*-Ebene.

Hieran schliesst der Verfasser die Darstellung von

Punkt und Ebene.

Verbindet man den Punkt im Raum mit dem Zenith der *H*-Ebene, so ist der Schnittpunkt dieser Verbindungslinie	Schneidet man die Ebene im Raum durch die Horizontalebene, so ist diese Schnittlinie

mit der Zeichnungsebene (*H*-Ebene)

das Bild des Punktes	das Bild der Ebene,
die sog. *H*-Projection des Punktes	die sog. *H*-Spur der Ebene

in der Zeichnungsebene (*H*-Ebene),

so dass also in der Zeichnungsebene nach dem Reciprocitätsprincip einander gegenüberstehen:

Punkt als Projection eines Punktes im Raum,	Gerade als Spur einer Ebene im Raum,

während im Raum nach dem räumlichen Reciprocitätsprincip einander dualistisch gegenüberstehen

der Punkt im Raum,	die Ebene im Raum,

ferner

die Verbindungslinie des Punktes mit dem Zenith der *H*-Ebene, das sog. *h*-projicirende Loth des Punktes,	die Schnittlinie der Ebene mit der *H*-Ebene, die sog. *H*-Spur der Ebene.

In derselben Weise wird die Gerade behandelt.

Für den Raum steht nach den anfänglichen Festsetzungen die Richtigkeit des Entsprechens der auftretenden Elemente ausser Frage. Aber es bedarf unserer Ansicht nach der näheren Begründung, dass man, um

zur ebenen Abbildung zu gelangen, für das projicirende Loth dessen Schnittpunkt mit der Bildebene substituiren kann, und ferner, dass nach erfolgter Umlegung die Reciprocitätsbeziehungen fortbestehen, z. B. dem Grundschnitt der Zenithpunkt des Grundschnitts entspricht, einerlei, ob man diese Elemente der H- oder der V-Ebene angehörend denkt.

Die volle Richtigkeit der Angabe folgt nun in der That aus der Bemerkung, dass durch die gegebene räumliche Zuordnung Zenith und zugehörige Grundebene als Pol und Polare einer Kugel definirt sind, deren Mittelpunkt im Grundschnitt liegt, und dass ferner nach erfolgter Vereinigung der Projectionsebenen die beiden Kreise, in welchen die Fundamentalkugel von den Projectionsebenen geschnitten wird, coincidiren.

Im Raum entsprechen sich dann

Punkt als Pol,	Ebene als Polarebene;
projicirender Strahl	Spur

als Polaren.

Der Spur ist aber in jeder Projectionsebene eindeutig der Schnittpunkt des projicirenden Lothes mit der Projectionsebene als Pol in Bezug auf den Fundamentalkreis zugeordnet,

die beiden Pole (Projectionen)	die beiden Polaren (Spuren)

in den Projectionsebenen

bestimmen den Punkt	bestimmen die Ebene

im Raum

und man kann daher Pol und Polare in Bezug auf den Fundamentalkreis bez. als Bilder von Punkt und Ebene betrachten u. s. w.

Andere Sätze, die vom Verfasser anfangs beispielsweise hingestellt werden, wie etwa die folgenden:

In einer Ebene ist

eine Gerade parallel zu einer zweiten Geraden, wenn sie durch den ∞ fernen Punkt der letztern geht,	eine Gerade normal zu einer zweiten Geraden, wenn sie durch das Zenith der letztern geht,

lassen sich nicht in ähnlicher Weise gegenüberstellen; wenigstens nicht nach dem Reciprocitätsprincip, wie es die Geometrie der Lage benutzt; der Verfasser müsste neu definiren.

Im weitern Verlaufe der Schrift wird die Lage der Deckelemente angegeben:

Deckpunkte und Deckgerade liegen in der zweiten Medianebene (Winkelhalbirungsebene des zweiten und vierten Quadranten).	Deckebene und symptotische Gerade gehen durch's Zenith der zweiten Medianebene.

Als neues Constructionselement wird der Centralpunkt A^* eines Punktes (a, a') eingeführt. Er ist die Spur der durch den Punkt (a, a')

gehenden symptotischen Geraden, durch ihn gehen die Spuren aller Deckebenen des Punktes. Ein Punkt ist bestimmt durch eine Projection und durch seinen Centralpunkt.

Die Aufgabe: „Gegeben ein fester Punkt (C', C^*) und ein zweiter (a', A^*), gesucht die Verticalspur G' der Verbindungslinie 𝔖 beider Punkte“, wird als Fundamentalaufgabe bezeichnet und gelöst; sie erweist sich später als Fundamentalaufgabe der Perspective.

Sehr ansprechend findet sich unter den mannigfachen Anwendungen die perspectivische Collineation behandelt: H- und V-Spuren $1\,2\,3\ldots$ bez. $1'\,2'\,3'\ldots$ werden als entsprechende Punkte angesehen, dann sind $\overline{1\,1'}$, $\overline{2\,2'}$, $\overline{3\,3'}$, ... Spuren von Deckebenen des Punktes, welche sämmtlich durch den Centralpunkt gehen. Dieser Punkt ist also das Collineationscentrum, die Collineationsaxe ist der Grundschnitt.

Von weiteren Anwendungen sei hier noch die am Schlusse gegebene Bestimmung der Knotenpunkte eines Linsensystems erwähnt.

Ref. zweifelt nicht, dass das besprochene Buch von allen Fachgenossen mit Interesse gelesen werden wird.

Darmstadt, den 23. October 1883. Dr. Carl Rodenberg.

Elemente der darstellenden Geometrie. Von Ernst Prix, Oberlehrer an der k. Realschule zu Annaberg. Erster Theil: Darstellung von Raumgebilden durch orthogonale Projectionen. Zweiter Theil: Schnitte von Ebenen und krummen Flächen. Schiefwinklige und axonometrische Projectionen. Centralprojection. Leipzig, B. G. Teubner. 1883.

Der Verfasser beabsichtigt durch diese Schrift eine Unterlage für den ersten Unterricht in der Projectionslehre zu geben. Da die darstellende Geometrie an den Realschulen vor der Stereometrie in den Lehrplan eintritt, so werden in der Einleitung die wichtigsten stereometrischen Sätze in propädeutischer Behandlung vorgeführt, woran sich eine kurze Uebersicht der Methoden der Darstellung von Raumgebilden auf Ebenen und gekrümmten Flächen anschliesst. Nun werden die orthogonalen Projectionen von Punkten und Linien behandelt und darauf bezügliche Aufgaben über die Bestimmung der wahren Grösse von Strecken und Winkeln gelöst. Eine eingehende Untersuchung wird von krummen Linien der Ellipse, welche als Projection des Kreises definirt wird, zu Theil. Es ist gewiss nur zu billigen, dass bei der nun folgenden Betrachtung der allgemeinen ebenen geschlossenen Polygone auf die affinen Eigenschaften ihrer Projectionen aufmerksam gemacht wird.

Damit ist die Grundlage für die Darstellung der Polyeder und namentlich für deren Construction aus gegebenen Elementen gewonnen, welche jetzt vorgenommen wird. Prisma, Pyramide und die fünf regulären Körper werden nacheinander betrachtet. In der Fig. 30, der Projection des regulären Tetraeders, ist die Höhe ungenau abgetragen.

Referent möchte hier hinsichtlich der Anordnung des Stoffes dem Herrn Verfasser zur Erwägung anheimgeben, ob es nicht besser sei, vor der Betrachtung der Punkte, Geraden und Ebenen an sich, einige einfache Körper, wie reguläre Prismen und Pyramiden, abzubilden, da der Schüler erfahrungsgemäss leichter den ganzen Körper, als jene von diesem abstrahirten Grenzgebilde aufzufassen vermag. Die Ableitungen allgemeiner Lagen in Bezug auf die Projectionsebenen aus einer einfachen anfänglichen Stellung sind sehr instructiv und anregend.

Den Schluss des ersten Theils bilden einige Sätze über die Transformation von Bildebene und Object.

Das Bisherige soll das Pensum der Obersecunda einer Realschule I. Ordnung bilden, während der zweite Theil in den beiden Primen zu absolviren ist. Dieser Theil beginnt mit der allgemeinen Darstellung der Ebene durch ihre Spuren und mit der Lösung der einschlägigen Aufgaben über Schnitte und Winkel zweier Ebenen, Abstandsbestimmungen u. s. w. Die folgenden Capitel sind den Schnittfiguren der Polyeder, insbesondere der Prismen und Pyramiden mit Ebenen gewidmet. Da im ersten Theil bereits der Begriff der Affinität gewonnen wurde, so ist nicht recht ersichtlich, warum vom Verfasser nicht auf die affinen bez collinearen Eigenschaften zwischen der Basis, den Projectionen der Schnittfigur und deren wahrer Gestalt aufmerksam gemacht wird, um so mehr, da ihre Benutzung für die Construction so ungemein nützlich ist.

Von krummen Flächen werden Kegel, Cylinder und Rotationsflächen betrachtet und ihre ebenen Schnittcurven, sowie ihre Tangentenebenen bestimmt. Letztere Constructionen werden nur ganz allgemein besprochen. Die besonderen Vereinfachungen, welche die drei eben aufgeführten Flächengattungen gestatten, verdienten unseres Erachtens eingehend erörtert zu werden. In einem besondern Abschnitte werden viele Eigenschaften der Kegelschnitte, als Schnitte eines geraden Kreiskegels betrachtet, abgeleitet.

Von Durchdringungen werden ausführlich nur diejenigen ebenflächiger Körper unter sich behandelt, nur ganz kurz wird angegeben, wie man bei krummen Oberflächen zu verfahren habe.

Der folgende Abschnitt handelt von der Lagenveränderung der Raumgebilde; das Resultat ist der Nachweis des Chasles'schen Satzes: Jede Bewegung eines räumlichen Systems aus einer Lage R in eine zweite R' ist äquivalent einer Schraubenbewegung.

Hiermit schliesst der rein geometrische Theil der Orthogonalprojection. Der folgende Abschnitt: Schattenconstruction, behandelt diese für ebenflächige Körper, Cylinder, Kegel und Kugel. Isophoten werden nicht betimmt, was im Interesse der Kürze gewiss zu billigen ist; jedoch werden die Regeln, nach denen man bei der Abtönung krummer Flächen zu verfahren hat, in ausreichender Weise auseinandergesetzt. Hierbei wird die von Dr. Joh. Müller in seiner constructiven Zeichenlehre ausgesprochene Ansicht citirt, dass eine überall gleich stark erleuchtete Fläche auch überall gleich stark im Tuschton zu halten sei und man nicht etwa dort, wo sie an eine hellere grenzt, die Contrastwirkung durch einen tiefern Ton hervorzuheben habe, weil diese Eigenthümlichkeit aus denselben Gründen auf der Zeichnung wie in der Wirklichkeit schon von selbst hervorgerufen würde. Ref. kann sich dieser Ansicht nicht anschliessen, da in Wirklichkeit die Differenz der Lichtstärke in einem solchen Falle viel bedeutender ist, als wir sie bei dem schwachen Lichte, in dem eine Zeichnung zu betrachten ist, andeuten können, und daher zum Hervorbringen der Contrastwirkung noch ein Uebriges zu thun gezwungen sind.

Die letzten Abschnitte sind der schiefwinkligen Projection, Axonometrie und Centralprojection gewidmet. Bei letzterer vermissen wir ungern die Angabe der wichtigen Beziehung der Collineation zwischen einer ebenen Figur und ihrem Bilde, welche der Verfasser vielleicht in einer spätern Auflage noch aufnimmt.

Die Darstellung des Gesammtinhalts ist sehr klar und zeichnet sich durch lobenswerthe Kürze aus, die bei einem Schulbuch, dessen Studium die Hilfe eines Lehrers voraussetzt, besonders wünschenswerth ist. Die am Ende fast jeden Abschnittes angefügten Uebungsaufgaben bieten mehr als ausreichenden Stoff zur Behandlung während der dem Schüler zu Gebote stehenden Zeit. Das Buch sei hiermit zur Aufnahme wärmstens empfohlen.

Darmstadt, den 23. October 1883. Dr. Carl Rodenberg.

Lehrbuch der darstellenden Geometrie für Oberrealschulen. Von Josef Menger, k. k. Professor an der Staats-Oberrealschule in Graz. Mit 228 Originalholzschnitten. Wien, Alfred Hölder. 337 S. 8°.

Das vorliegende Lehrbuch ist im Sinne der Instruction verfasst, welche das österreichische Ministerium für Cultus und Unterricht als Anschluss an den Erlass vom 23. April 1880 Z. 6233 für den Unterricht in den Elementen der darstellenden Geometrie an der Oberrealschule herausgegeben hat.

Der Lehrstoff ist in neun Abschnitte getheilt, von denen der erste einer kurzen Widerholung der wichtigsten Lehrsätze über die Lagenver-

hältnisse der Geraden und Ebenen gewidmet ist, während die folgenden drei Abschnitte die Elementaraufgaben der darstellenden Geometrie in orthogonaler Projection durchführen. Insbesondere behandelt der zweite Abschnitt die Projection auf eine einzige Bildebene; der dritte Abschnitt lehrt die Projection auf zwei zugeordnete Ebenen und behandelt jene Aufgaben, welche sich auf die gemeinsamen Elemente und die parallele Lage von Geraden und Ebenen beziehen; der vierte Abschnitt erklärt die Transformation der Projectionsebenen und das Coordinatensystem, zeigt die Darstellung von zugeordneten Projectionen ebener Figuren und behandelt die Aufgaben über die normale Stellung von Geraden und Ebenen, sowie die Construction von Abständen und Neigungswinkeln. Den Schluss des dritten und vierten Abschnittes bilden die einschlägigen Schattenconstructionen.

Der Artikel über das Dreikant macht den Anfang des fünften Abschnittes, welcher von ebenflächigen Körpern handelt und einige Erklärungen über Axonometrie bringt; der sechste Abschnitt, welcher das in des Verfassers „Grundlehren der Geometrie" enthaltene Capitel von den Kegelschnittslinien zur Voraussetzung nimmt, bespricht die Evoluten, Evolventen, Spiralen und Cycloiden und zeigt die orthogonale und schiefe Projection der Kreislinie. Der siebente Abschnitt behandelt die Darstellung der krummen Flächen, sowie die Construction ihrer Berührungsebenen und ebenen Schnitte, während der achte Abschnitt ihre gegenseitigen Durchdringungen vorführt und die Construction der Selbst- und Schlagschatten an krummen Flächen lehrt. Der neunte, letzte Abschnitt enthält eine kurze Theorie der centralen Projection nebst deren Anwendung zur perspectivischen Darstellung geometrischer Körper und einfacher technischer Objecte. Ein Anhang zu diesem Abschnitte enthält einige Bemerkungen über Kartenprojection (nach Pohlke).

Den einzelnen Capiteln ist eine hinreichende Anzahl von Uebungsaufgaben beigegeben.

Den Instructionen gemäss ist das vorliegende Lehrbuch unter dem Gesichtspunkte abgefasst, dass die ungeübte Vorstellungskraft der Schüler vornehmlich durch einfache Modelle unterstützt werde und dass es nicht empfehlenswerth sei, anstatt solcher Modelle perspectivische Bilder zu benutzen.

Ref. hält das selbstständige Entwerfen und die Ausführung von Figuren in axonometrischer Projection — welche sehr gut ohne Kenntniss der Theorie vorgenommen werden kann — von Seiten des Schülers für ausserordentlich nützlich und möchte nicht gern auf die Aufnahme einiger leitender Figuren verzichten. Wenn dieselben aber durchaus ausgeschlossen werden sollen, so ist gewiss die Anwendung der stereoskopischen Figuren für den Unterricht in der Stereometrie und darstellenden Geometrie von J. Schlotke, Hamburg bei B. S. Berendsohn, mit deren

Benutzung gleichberechtigt — ja, man möchte sagen, wenn es sich um die Angabe der Durchsichten handelt, den opaken Modellen vorzuziehen.

Das Buch ist klar und ansprechend geschrieben. Wir empfehlen es den Lehrern zur Benutzung für den Unterricht bestens.

Darmstadt, den 23. October 1883. Dr. Carl Rodenberg.

Grundzüge der Reliefperspective, nebst Anwendung zur Herstellung reliefperspectivischer Modelle. Als Ergänzung zum Perspective-Unterricht an Kunstakademien, Kunstgewerbeschulen und technischen Lehranstalten bearbeitet von Dr. L. Burmester, Professor der darstellenden Geometrie am königl. Polytechnikum zu Dresden. Mit drei lithographirten Tafeln und einer Lichtdrucktafel. Leipzig, B. G. Teubner. 30 S. gr. 8⁰.

Ueber das vorliegende Werkchen zu berichten, ist für den Referenten eine Aufgabe, wie sie angenehmer nicht gedacht werden kann.

Der Verfasser wendet sich, wie aus Titel und Vorwort zu entnehmen, in erster Linie an die Künstler und für diese sei daher gleich erwähnt, dass sie nicht vor Beginn der Lecture nöthig haben, die ihnen meistens innewohnende Scheu vor mathematischen Dingen zu überwinden, da alle Gesetze auf rein anschauliche Weise gewonnen, hingegen Rechnungen durchaus vermieden werden. Aber nichtsdestoweniger verdient die Schrift auch in einer mathematischen Zeitschrift besprochen zu werden, da die Entwickelung mit Strenge durchgeführt ist.

Der erste Theil: „Begründung der Reliefperspective“, enthält nach der Einleitung die Ableitung der fundamentalen Beziehungen, welche zwischen dem Original und dem Relief bestehen; Augpunkt, Bild- und Fluchtebene werden definirt. Daran knüpft sich die Darlegung von speciellen Beziehungen, welche aus einer besondern Lage des abzubildenden Gegenstandes in Bezug auf die Bildebene entspringen.

Der zweite Theil erläutert an Beispielen die Construction zur Herstellung reliefperspectivischer Modelle. Es wird die Methode entwickelt, nach der die vor längerer Zeit erschienenen Modelle des Verfassers:

Nr. I: Würfel mit aufgesetztem Rotationskegel, Obelisk, Rotationscylinder mit Kugel;

Nr. II: Bogenhalle;

Nr. III: Inneres einer romanischen Basilica

(in vorzüglicher Weise ausgeführt von C. Lehmann, Inspector und Conservator am königl. Museum der Gypsabgüsse, und von diesem zu beziehen), hergestellt sind. Auf die vielen kleinen Vortheile, die man sonst nur bei eigenem Modelliren nach und nach kennen lernt, wird aufmerksam gemacht.

Von theoretischen Gegenständen verdient der einfache synthetische Beweis für die Rytz'sche Construction der Hauptaxen einer Ellipse aus zwei conjugirten Durchmessern besonders hervorgehoben zu werden.

Einige Schlussworte behandeln die Regeln, nach denen unter Umständen nothwendige Abweichungen von den strengen Gesetzen der Reliefperspective vorzunehmen sind.

Das Buch wird sich unstreitig in Bälde viele Freunde der verschiedensten Kreise erwerben; speciell dem Künstler gegenüber möchten wir sogar äussern, dass ihm gewissermassen eine Pflicht erwächst, das Buch zu studiren; wenigstens hat fortan kein Nichtmathematiker das Recht, Gründe hinsichtlich der Schwierigkeit des Verständnisses der hier entwickelten Gesetze als Entschuldigung für eine Ausserachtlassung derselben anzuführen.

Darmstadt, den 23. October 1883. Dr. Carl Rodenberg.

Elemente der darstellenden Geometrie. Ein Lehrbuch für Oberrealschulen. Im Sinne des mit der Verordnung vom 15. April 1879 Z. 5607 ausgegebenen Normallehrplanes und der hierzu erschienenen Instruction verfasst von Franz Smolík, k. k. Oberrealschul-Professor. Mit 345 in den Text gedruckten Holzschnitten. Prag, F. Tempsky. 271 S. gr. 8°.

Dieses Buch ist sowohl nach Form, als auch nach Inhalt so ähnlich dem auf S. 142flg. besprochenen, dass wir uns fast damit begnügen können, beide als gleichwerthig zu bezeichnen. Kleine Abweichungen finden wir gegenüber dem Menger'schen in der Zugabe der dort ausgeschlossenen axonometrischen Figuren zur Veranschaulichung der Vorgänge beim Projiciren. Ferner sind in Capitel VI, „Geometrische Verwandtschaften ebener Gebilde", die Collineation und ihre Specialfälle Affinität, Aehnlichkeit, Congruenz kurz behandelt. Merkwürdigerweise sind jedoch die abgeleiteten Gesetze in dem Capitel über Perspective nicht verwerthet.

Noch eine Kleinigkeit möchte hier Erwähnung finden. Auf S. 99 erfahren wir, dass man Herrn Staudigl die Definition: „Ein Gebilde der dritten Stufe ist das räumliche System; das ist die Gesammtheit aller Punkte, Geraden und Ebenen des unendlichen Raumes", verdankt. Andererseits schreibt der Verfasser im Vorwort, wo von den Zielen der Wissenschaft die Rede ist, den Fiedler'schen* Ausspruch: „Die Geometrie muss so lange graphisch construiren, bis gelernt ist, ohne äussere Anschauung räumlich zu denken", ab und nennt keinen Namen. Glaubt er sich hierzu berechtigt infolge

* Vergl. dessen „Darstellende Geometrie", Vorrede S. VI.

Verwandlung des Wortes „graphisch" in das weniger bezeichnende „praktisch"?

Hierdurch wird selbstverständlich die volle Brauchbarkeit des Buches in keiner Weise beeinträchtigt.

Darmstadt, den 24. October 1883. Dr. CARL RODENBERG.

Theilbarkeitsregeln für ein Zahlensystem mit beliebiger ganzer, positiver Basis. Von CARL HAAS, Dr. phil. Separatabdruck aus dem XIX. Jahresbericht des Mariahilfer Communal-Real- und Obergymnasiums. Wien 1883. Im Selbstverlag des Verfassers. 16 S.

Wir haben im XXVII. Bd. dieser Zeitschrift, hist.-lit. Abth. S. 192, auf eine Programmabhandlung des Herrn Hunrath, das Rechnen mit Systemzahlen betreffend, hingewiesen. Unsere gegenwärtigen Zeilen knüpfen an eine Abhandlung ähnlichen Inhalts an, welche vornehmlich mit der Aufgabe sich beschäftigt, diejenigen Zahlen aufzusuchen, welche als Theiler in einer beliebig nach links sich fortsetzenden Zahl enthalten sind, deren aus m Ziffern bestehendes rechtsseitiges Ende sie theilen. Je nach der Grundzahl des Systems erscheinen dabei bald mehr, bald weniger Theiler, während die Ifferzahl m des charakteristischen Endes unverändert bleibt.

CANTOR.

Bibliographie

vom 1. Juni bis 15. Juli 1884.

Periodische Schriften.

Mathematische Abhandlungen der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften. (Aus dem Jahre 1883.) Berlin, Dümmler. 6 Mk. 50 Pf.

Physikalische Abhandlungen der königl. preussischen Akademie d. Wissenschaften. (Aus dem Jahre 1883.) Ebendas. 6 Mk. 50 Pf.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Classe der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. 1884, Heft 1. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Jahresbericht des Centralbureaus für Meteorologie und Hydrographie im Grossherzogth. Baden. Jahrg. 1883. Karlsruhe, Braun. 4 Mk. 50 Pf.

Mathematische Annalen, herausgegeben von F. Klein und A. Mayer. 24. Bd (4 Hefte). 1. Heft. Leipzig, Teubner. pro compl. 20 Mk.

Archiv der Mathematik und Physik, begr. v. A. Grunert, fortges v. Hoppe. Inhaltsverzeichniss zu Theil LV—LXX. Leipzig, Koch. 1 Mk. 80 Pf.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft, herausgeg. von E. Schönfeld und A. Seeliger. 19. Jahrg. 1. Heft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Astronomische Nachrichten, herausgegeben von A. Krüger. 109. Bd. (24 Nrn.) Nr. 2593. Hamburg, Mauke S. pro compl. 15 Mk.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Hunrath, K., Die Berechnung irrationaler Quadratwurzeln vor der Herrschaft der Decimalbrüche. Kiel, Lipsius & Tischer. 2 Mk. 40 Pf.

Lepsius, R., Die Längenmaasse der Alten. Berlin, Besser. 3 Mk.

Rudio, E., Leonhard Euler. Vortrag. Basel, Schwabe. 60 Pf.

Hoppe, E., Geschichte der Elektricität. Leipzig, Barth. 13 Mk. 50 Pf.

Heller, A., Geschichte der Physik von Aristoteles bis auf die neueste Zeit. 2. Bd.: Von Descartes bis R. Mayer. Stuttgart, Enke. 18 Mk.

Reine Mathematik.

Bardey, E., Zur Formation quadratischer Gleichungen. Leipzig, Teubner. 7 Mk. 60 Pf.

Schurig, R., Lehrbuch der Arithmetik. 2. Thl.: Allgem. Zahlenlehre. Leipzig, Brandstetter. 6 Mk.

Lange, Th., Hauptsätze der Planimetrie und Trigonometrie. Berlin, Guttentag. 1 Mk. 25 Pf.

Völker, C., Die derivirten Curven der Hyperbel und die Lemniscate zweiter Art. (Dissert.) Berlin, Mayer & Müller. 1 Mk. 20 Pf.

Euclidis opera omnia, ed. L. Heiberg et H. Menge. Vol. II. Leipzig, Teubner. 4 Mk. 50 Pf.

Lagrange, Oeuvres publiées par J. A. Serret. Vol. X. Paris, Gauthier-Villars. 18 Frcs.

Angewandte Mathematik.

Czuber, E., Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerthe. Leipzig, Teubner. 6 Mk. 80 Pf.

Petersen, J., Kinematik. Deutsch von Fischer-Benzon. Kopenhagen, Höst & S. 2 Mk.

Finger, J., Elemente der reinen Mechanik. 3. Lief. Wien, Hölder. 3 Mk. 20 Pf.

Ligowski, W., Taschenbuch der Mechanik. (Phoronomie, Statik und Dynamik.) 2. Aufl. Berlin, Ernst & Korn. 2 Mk. 50 Pf.

Zeising, A., Der goldene Schnitt. Leipzig, Engelmann. 3 Mk.

Schmidt, M., Ueber die Verbesserung der mit Schnur und Gradbogen gewonnenen Messungsresultate und ein Schachtlothungsverfahren mit fixirten Lothen. Freiberg, Craz & Gerlach. 1 Mk. 50 Pf.

Krüger, A., Zonenbeobachtungen der Sterne zwischen 55° und 65° n. Br., angestellt in Helsingfors u. Gotha. 1. Bd. Leipzig, Engelmann. 20 Mk.

Laplace, Oeuvres publiées sous les auspices de l'acad. des sc. Vol. X. Paris, Gauthier-Villars. 20 Frcs.

Physik und Meteorologie.

Müller, H., Ueber Resonanzschwingungen gespannter Saiten. Fulda, Nehrkorn. 1 Mk.

Jelinek, Anleitung zur Ausführung meteorologischer Beobachtungen. 2 Hefte. Leipzig, Engelmann. 3 Mk.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1883.

Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

A.

Analytische Geometrie der Ebene.

1. Sur les coordonnées curvilignes. E. Mathieu. Journ. mathém. Sér. 3, VIII, 5.
2. Sur les courbes définies par une équation de la forme $\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$ et examinées en les projetant gnomoniquement sur la sphère. H. Poincaré. Compt. rend. XC, 673.
3. Construction de la tangente à certaines courbes. De Lisleferme. Mathesis III, 206.
4. Construction der Tangenten äquidistanter Curven und der Tangentialebenen äquidistanter Flächen. C. Schirek. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 183.
5. Ueber Fusspunktcurven. Weinmeister I. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 256.
6. Ueber Rouletten und Polbahnen ebener kinematischer Systeme. Rich. Sellentin. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 116.
7. Ueber Tripel einer Curve dritter Ordnung, welche denselben Höhenschnitt haben. Ad. Ameseder. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 53.
8. Ueber Unicursalcurven vierter Ordnung. C. Hossfeld. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 296.

Vergl. Ellipse. Geometrie (höhere). Kegelschnitte. Kreis. Krümmung 297. Parabel. Singularitäten.

Analytische Geometrie des Raumes.

9. Eine geometrische Auffassung der homogenen Coordinaten einer Geraden. A. Thaer. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 315.
10. Ueber die Auflösung eines Doppelpunktes einer ebenen Curve im dreidimensionalen Raume und ein mit dieser Curve zusammenhängendes Problem der Mechanik. V. Schlegel. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 105.
11. Verallgemeinerung eines analytischen Fundamentalsatzes. H. A. Schwarz. Annali mat. Ser. 2, X, 129.
12. Sur la génération des surfaces et des courbes à double courbure analogue à celle de Mac-Laurin. Vaneček. Journ. mathém. Sér 3, IX, 269.
13. Des enveloppes des courbes dans l'espace. Collet. Journ. mathém. Sér. 3, IX, 257.
14. Ueber den Reye'schen Axencomplex. A. Weiler. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 188.
15. Ein Paradoxon der Theorie der Collineation. Fr. Hofmann. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 318.
16. Plan coupé par 2 plans verticaux perpendiculaires entre eux. E. Cesaro. Mathesis III, 142. — Interdonato ibid. 143.
17. Note de géométrie. E. Cesaro. Mathesis III, 73, 97, 121.
18. Die 16 Wendeberührungspunkte der Raumcurve vierter Ordnung erster Species. E. Lange. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 1, 65.

Vergl. Ellipsoid. Geometrie (descriptive). Geometrie (höhere). Geometrie (der Lage) Hyperboloid. Krümmung 298. Mannichfaltigkeiten 306. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

Astronomie.

19. Eine Annäherungsmethode im Problem der drei Körper. H. Gyldén. Acta mathematica I, 77.
20. Sur l'orbite que parcourt un point matériel attiré par un sphéroïde. H. Gyldén. Compt. rend. XCI, 957.
21. Sur le développement de la fonction perturbatrice dans le cas où, les excentricités étant petites, l'inclinaison mutuelle des orbites est quelconque. F. Tisserand. Compt. rend. LXXXIX, 553, 585. [Vergl. Bd. XXVIII, Nr. 436.]
22. Sur un développement particulier de la fonction perturbatrice. F. Tisserand. Compt. rend. XC, 557.
23. Sur la méthode de Cauchy pour le développement de la fonction perturbatrice. Ch. Trépied. Compt. rend. XC, 1474.
24. Sur le développement d'une fonction quelconque du rayon vecteur dans le mouvement elliptique. F. Tisserand Compt. rend. XCI, 897.
25. Sur des transcendantes qui jouent un rôle fondamental dans la théorie des perturbations planétaires F. Tisserand. Compt. rend. XC, 1021, 1093. — O. Callandreau ibid. 1154, 1201, 1540.
26. Sur des transcendantes qui jouent un rôle important dans la théorie des perturbations planétaires. G. Darboux. Compt. rend. XC, 1416, 1472.
27. Démonstration, au moyen des fonctions elliptiques, d'un théorème dans la théorie de la libration de la lune. H. Gyldén. Compt. rend. LXXXIX, 932.
28. Ueber die Berechnung der Differentialquotienten der wahren Anomalie und des Radius vector nach der Excentricität in stark excentrischen Bahnen. E Weiss. Wien. Akad.-Ber. LXXXIII, 466.
29. Theoretische Untersuchungen über die Verschiebungen der Radiationspunkte aufgelöster Meteorströme. G. v. Niessl. Wien. Akad.-Ber. LXXXIII, 96.
30. Loi concernant la distribution des astres du système solaire. L. Gaussin. Compt. rend. XC, 518, 593.
31. Sur la théorie mathématique des changements d'éclat des étoiles variables. Gylden. Compt. rend. LXXXIX, 598.
32. Sur les réfractions de Bessel. R. Radau. Compt. rend. XC, 1264.
33. Étude de la variation de la ligne de la visée. Loewy. Compt. rend. XCI, 6.
34. Das Problem der kürzesten Dämmerung. Stoll. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 150.

Vergl. Geschichte der Mathematik 224.

B.

Ballistik.

35. Beitrag zum ballistischen Problem. L. Austerlitz. Wien. Akad.-Ber. LXXXIV, 794.
36. Étude sur les lois de la résistance de l'air. E. Vallier. Journ. mathém. Sér. 3, IX, 147.

Bernoulli'sche Zahlen.

37. Démonstration du théorème de Clausen et de Staudt concernant les nombres de Bernoulli. Ed. Lucas. Mathesis III, 25.

Vergl. Symbolische Operationen.

Bestimmte Integrale.

38. Ein allgemeiner Satz über die Integrirbarkeit von Functionen integrirbarer Functionen. P. du Bois-Reymond. Mathem. Annal. XX, 122.
39. An extension of a theorem of Legendre's. J. C. Malet. Annali mat. Ser. 2, XI, 246, 312.
40. Intégration des irrationnelles du deuxième degré. N. Alexéeff. Compt. rend. LXXXIX, 403.
41. Sur une formule générale des intégrales définies. A. Dawidoff. Journ. mathém. Sér. 3, VIII, 389.
42. Sur un théorème de M. Hermite. E. Goursat. Acta mathematica I, 189.
43. Sur une intégrale définie. O. Callandreau. Compt. rend. LXXXIX, 90. [Vergl. Bd. XXVIII, Nr. 445.]
44. Sur deux limites d'une intégrale définie. Ch. Hermite. Mathesis III, 82.

45. $\int_0^{\log 2} \frac{x.e^x}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{12}$. J. Gillet. Mathesis III, 280.

Vergl. Elliptische Transcendenten. Gammafunctionen. Kugelfunctionen. Quadratur. Ultraelliptische Transcendenten.

C.

Capillarität.

46. Théorie des phénomènes capillaires. E. Roger. Compt. rend. XC, 908.

Combinatorik.

47. Permutationen mit beschränkter Stellenbesetzung. S. Kantor. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 379.
48. Sur un problème de permutations successives nommé Battement de Monge. J. Bourget. Journ. mathém. Sér. 3, VIII, 413.
49. Combinaisons avec répétition. Suarez & Gasco. Mathesis III, 197.
50. Nombre de manières de décomposer un polygone convexe en triangles par les diagonales. Gelin. Mathesis III, 108.

Vergl. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Cubatur.

51. Sur le volume de trois cônes ayant le même sommet et pour bases des courbes fermées projectives entre elles. J. Neuberg. Mathesis III, 37.

D.

Determinanten.

52. Sur une propriété de la fonction de Poisson. Ph. Gilbert. Compt. rend. XCI, 541.
53. Sur la valeur moyenne des coefficients dans le développement d'un déterminant gauche ou symétrique d'un ordre infiniment grand et sur les déterminants doublement gauches. Sylvester. Compt. rend. LXXXIX, 24, 497.

Vergl. Gleichungen 248, 249. Trigonometrie 441.

Determinanten (in geometrischer Anwendung).

54. Applications des déterminants. J. Neuberg. Mathesis III, 29.

Differentialgleichungen.

55. Exposé des méthodes en mathématiques d'après Wronski. M. E. West. Journ. mathém. Sér. 3, VIII, 19, 125; IX, 301. [Vergl. Bd. XXVIII, Nr. 186.]
56. Ueber den Despeyrous'schen Multiplicator der elliptischen Differentialgleichung. P. du Bois-Reymond. Mathem. Annal. XXI, 255.
57. Ueber den integrirenden Factor der elliptischen Differentialgleichung. R. Sturm. Mathem. Annal. XXI, 446.
58. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. H. Poincaré. Journ. mathém. Sér. 3, VIII, 251. [Vergl. Bd. XXVIII, Nr. 73.]
59. Sur la détermination d'intégrales algébriques de différentielles algébriques. Zeuthen. Compt. rend. XC, 1114.
60. Zur Form algebraischer Integrale linearer Differentialgleichungen. L. Königsberger. Mathem. Annal. XXI, 454.
61. Sur une classe très étendue d'équations différentielles linéaires à coefficients rationnels dont la solution dépend de la quadrature d'un produit algébrique irrationnel. Göran Dillner. Compt. rend. XCI, 616, 687, 721.
62. Ueber die transcendenten Integrale von Differentialgleichungen erster Ordnung mit Coefficienten zweiten Grades. A. Winckler. Wien. Akad.-Ber. LXXXIV, 940.
63. Ueber lineare homogene Differentialgleichungen, zwischen deren Integralen homogene Relationen höheren als ersten Grades bestehen. Acta mathematica I, 321.
64. Integration der Differentialgleichung $(A_1 x^2 + B_1 xy + C_1 y^2) dx + (A_2 x^2 + B_2 xy + C_2 y^2) dy + (A_3 x^2 + B_3 y^2 + C_3 xy + D_3 x + E_3 y + F_3)(x.dy - y.dx) = 0$. Wold. Heymann. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 54.

65. Zur Differentialgleichung $(a+bx+cx^2)^2 \frac{d^2v}{dx^2} + (a+bx+cx^2)(a_1+b_1x)\frac{dv}{dx} + (a_0+b_0x+c_0x^2)v = 0$. Wold. Heymann. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 241.
66. Cinq problèmes d'intégration d'équations différentielles. H. Brocard. Mathesis III, 128, 182.
67. Sur une classe d'équations différentielles linéaires. E. Picard Compt. rend. XC, 128, 293.
68. Sulle equazioni differenziali del tetraedro, dell'ottaedro e dell'icosaedro. F. Brioschi. Annali mat. Ser. 2, X, 104.
69. Sur la théorie des équations différentielles linéaires. Mittag-Leffler. Compt. rend. XC, 218.
70. Sur les équations differentielles linéaires à une variable indépendante. Appell. Compt. rend. XC, 1477.
71. Sur la transformation des équations différentielles linéaires. Appell. Compt. rend. XCI, 211.
72. Sur les équations différentielles linéaires. Appell. Compt. rend. XCI, 684.
73. Sur une classe d'équations différentielles linéaires. Appell. Compt. rend. XCI, 972.
74. Application de la théorie des sinus des ordres supérieurs à l'intégration des équations différentielles linéaires. Yvon Villarceau. Compt. rend. XC, 721, 767.
75. Sur l'intégration des équations linéaires, au moyen des sinus des ordres supérieurs. Yvon Villarceau. Compt. rend. XCI, 13.
76. Sur quelques équations différentielles linéaires. Brioschi. Compt. rend. XCI, 807.
77. Di una proprietà delle equazioni differenziali lineari del secondo ordine. F. Brioschi. Annali mat. Ser. 2, X, 1. — Hermite ibid. 101.
78. Sopra una classe di equazioni differenziali lineari del secondo ordine. F. Brioschi. Annali mat. Ser. 2, X, 4. [Vergl. Bd. XXVI, Nr. 37.]
79. Sur une classe d'équations différentielles linéaires du second ordre. Brioschi. Compt. rend. XCI, 317.
80. Sur les équations linéaires du second ordre. Mittag-Leffler. Compt. rend. XCI, 978.
81. Generalizzazione di alcuni teoremi dei sig[i] Hermite, Brioschi e Mittag-Leffler sulle equazioni differenziali lineari del secondo ordine. F. Casorati. Annali mat. Ser. 2, X, 224.
82. Sur une équation différentielle linéaire du second ordre. H. Gyldén. Compt. rend. XC, 208, 344.
83. Sur certaines équations différentielles linéaires du second ordre. E. Picard. Compt. rend. XC, 1479.
84. Sur quelques remarques relatives à l'équation de Lamé. Escary. Compt. rend. XCI, 40, 102.
85. Ueber die Integration der Hermite'schen Differentialgleichungen der dritten und vierten Ordnung, bei denen die Unendlichkeitsstellen der Integrale von der ersten Ordnung sind. Mittag-Leffler. Annali mat. Ser. 2, XI, 65. — Brioschi ibid. 81.
86. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. G. Floquet. Compt. rend. XCI, 880.
87. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. Mittag-Leffler. Compt. rend. XC, 299.
88. Sur les systèmes formés d'équations linéaires à une seule variable indépendante. G. Darboux. Compt. rend. XC, 524, 596.
89. Sur les équations linéaires simultanées et sur une classe de courbes gauches. E. Picard. Compt. rend. XC, 976, 1065, 1118..
90. Sopra un sistema di equazioni differenziali. F. Brioschi. Annali mat. Ser. 2, X, 233.
91. Intégration d'un nombre quelconque d'équations simultanées entre un même nombre de fonctions de deux variables indépendantes et leurs dérivées partielles du premier ordre. L. V. Turquan. Compt. rend. XCI, 43.
92. Ueber eine Eigenschaft der partiellen Differentialgleichungen. L. Königsberger. Mathem. Annal. XX, 587.
93. La fonction de Poisson et l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Ph. Gilbert. Compt. rend. XCI, 613. [Vergl. Nr. 52.]

94. Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. J. Collet. Compt. rend. XCI, 974.
95. Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles d'ordres supérieurs au premier. A. E. Pellet. Compt. rend. LXXXIX, 92.
96. Zur Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$. Niemöller. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 97.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 2. Elliptische Transcendenten 123, 127. Geometrie (höhere) 187. Gleichungen 243. Potential 401. Thetafunctionen 438. Umkehrungsproblem.

Differenzenrechnung.

97. Il calcolo delle differenze finite interpretato ed accresciuto di nuovi teoremi a sussidio principalmente delle odierne ricerche basate sulla variabilità complessa. F. Casorati. Annali mat. Ser. 2, X, 10.
98. Sopra un recentissimo scritto del sig. L. Stickelberger. F. Casorati. Annali mat. Ser. 2, X, 154.

E.

Elasticität.

99. Sulle equazioni generali dell'elasticità. Eug. Beltrami. Annali mat. Ser. 2, X, 188.
100. Sur des intégrations relatives à l'équilibre de l'élasticité. E. Mathieu. Compt. rend. XC, 739.
101. Ueber die Beziehungen der homogenen Deformationen fester Körper zur Reactionsfläche. Jos. Finger. Wien. Akad.-Ber. LXXXII, 234.
102. Sur l'équilibre de l'élasticité d'un prisme rectangle. E. Mathieu. Compt. rend. XC, 1272.
103. Ueber die Vertheilung der Druckkräfte in einem elastischen Kreiscylinder. H. Hertz. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 125.
104. Sur l'équilibre d'un cylindre élastique. Schiff. Journ. mathém. Sér. 3, IX, 407.

Vergl. Mechanik 236. Wärmelehre 460.

Elektrodynamik.

105. Théorie de l'électrostatique. H. Resal. Journ. mathém. Sér. 3, VIII, 217.
106. Exposé des principes de la théorie des courants électriques. H. Resal. Journ. mathém Sér. 3, IX, 25.
107. Sur la théorie des courants d'induction. Mascart. Compt. rend. XC, 981.
108. Sur une formule générale relative à l'électrisation par influence. R. Clausius. Journ. mathém. Sér. 3, VIII, 73.
109. Sur la capacité de polarisation voltaïque. R. Blondlot. Compt. rend. LXXXIX, 148.
110. Sur la détermination du niveau potentiel de l'ellipsoïde. H. Resal. Journ. mathém. Sér. 3, VIII, 55. — De Saint Germain ibid. 297.
111. Sur les lignes équipotentielles d'un plan formé de deux moitiés inégalement conductrices. A. Guébhard. Compt. rend. XC, 1124.
112. Sur le rendement économique des moteurs électriques et sur la mesure de la quantité d'énergie qui traverse un circuit électrique. M. Desprez. Compt. rend. XC, 590, 812.
113. Sur les courants alternatifs et la force électromotrice de l'arc électrique. J. Joubert. Compt. rend. XCI, 161.
114. Sur la loi des machines magnéto-électriques. J. Joubert. Compt. rend. XCI, 468, 493.
115. Ueber die Aufsuchung der Störungsstellen an nicht vollkommen isolirten Leitungen. L. Ditscheiner. Wien. Akad.-Ber. LXXXIII, 1084.

Vergl. Differentialgleichungen 96.

Ellipse.

116. Ueber eine Eigenschaft der Ellipse. O. Böklen. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 300.
117. Propriété d'une ellipse circonscrite à un triangle. Brocard. Mathesis III, 185. — Jeřábek ibid. 186. — Timmerhans ibid. 186.

118. Sur des ellipses semblables passant toutes par un même point. B. Bastin. Mathesis III, 240.
Vergl. Maxima und Minima 313, 314, 315. Normalen 346, 347, 348. Rectification 413, 414.

Ellipsoid.

119. Ueber Fadenconstructionen des Ellipsoids. O. Staude. Mathem. Annal. XX, 147.
120. Ueber geodätische Bogenstücke von algebraischer Längendifferenz auf dem Ellipsoid. O. Staude. Mathem. Annal. XX, 185.
121. Propriété de l'ellipsoide. Ph Gilbert. Mathesis III, 238.
Vergl. Elektrodynamik 110. Hydrodynamik 255.

Elliptische Transcendenten.

122. Sur quelques applications des fonctions elliptiques. Hermite. Compt. rend. LXXXIX, 1001, 1092; XC, 106, 201, 478, 683, 761. [Vergl. Bd. XXVIII, Nr. 518.]
123. Sur une application de la théorie des fonctions elliptiques. E. Picard. Compt. rend. LXXXIX, 74. [Vergl. Bd. XXVIII, Nr. 647.]
124. Sur une relation donnée par M. Cayley dans la théorie des fonctions elliptiques. Hermite. Acta mathematica I, 368.
125. Sur une représentation analytique des fonctions au moyen des transcendantes elliptiques. Hermite. Annali mat. Ser. 2, X, 137.
126. Sur une classe de deux fonctions doublement périodiques. J. Farkas. Compt. rend. XC, 1269, 1482.
127. Sulla generazione di una classe di equazioni differenziali lineari integrabili per funzioni ellittiche. F. Brioschi. Annali mat. Ser. 2, X, 74.
Vergl. Astronomie 27. Differentialgleichungen 56, 57, 85. Functionen 143. Geometrie (höhere) 187. Ultraelliptische Transcendenten 446.

F.

Formen.

128. Sur l'équivalence des formes. C. Jordan. Compt. rend. XC, 1422.
129. Sur la réduction simultanée d'une forme quadratique et d'une forme linéaire. H. Poincaré. Compt. rend. XCI, 844.
130. Ueber Relationen zwischen Classenzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante. Jos. Gierster. Mathem. Annal. XXI, 1. [Vergl. Bd. XXVI, Nr. 325.]
131. Sur quelques propriétés des formes quadratiques. Poincaré. Compt. rend. LXXXIX, 344, 897.
132. Sur les formes cubiques ternaires. H. Poincaré. Compt. rend. XC, 1336.
133. Ein Satz über lineare Identitäten zwischen Quadraten binärer Formen. Fr. Meyer. Mathem. Annal. XXI, 441.
134. Ueber ternäre biquadratische Formen. F. R. Scherrer. Annali mat. Ser. 2, X, 212.
135. Weitere Untersuchungen über die ternäre biquadratische Form $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$. Gordan. Mathem. Annal. XX, 487. [Vergl. Bd. XXVI, Nr. 329, 330; Bd. XXVIII, Nr. 216.]
Vergl. Gleichungen 246. Invariantentheorie.

Fourier'sche Reihen.

136. Recherches de M. Ul. Dini sur la série de Fourier et autres représentations analytiques des fonctions d'une variable réelle. Hermite. Compt. rend. XCI, 1018.
Vergl. Astronomie 25. Reihen 427.

Functionen.

137. Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen. H. Hankel. Mathem. Annal. XX, 63.
138. Aggiunte a recenti lavori dei sig[i] Weierstrass e Mittag-Leffler sulle funzioni di una variabile complessa. F. Casorati. Annali mat. Ser. 2, X, 261.
139. Sopra alcune condizioni caratteristiche delle funzioni di una variabile complessa. Vito Volterra. Annali mat. Ser. 2, XI, 1.
140. Sur une classe de fonctions étudiée par M. Heine. Appell. Compt. rend. LXXXIX, 841, 1031.
141. Sur une généralisation des fonctions périodiques et sur certaines équations différentielles linéaires. E. Picard. Compt. rend. LXXXIX, 140.

142. Ueber ein Theorem von Liouville, die doppelt-periodischen Functionen betreffend. H. J. Rink. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 48.
143. Geometrische Untersuchungen über den Verlauf der elliptischen Transcendenten im complexen Gebiete. O. Herrmann. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 193, 257.
144. Ueber symmetrische Riemann'sche Flächen und die Periodicitätsmoduln der zugehörigen Abel'schen Normalintegrale erster Gattung. Guido Weichold. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 321.
145. Bemerkung über den Ausdruck: „Theilung einer Strecke in unendlich kleine Theile.“ W. Veltmann. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 64.
146. Généralisation des fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Appell. Journ. mathém. Sér. 3, IX, 5
147. Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie. F. Klein. Mathem. Annal. XXI, 141.
148. Sur les fonctions uniformes d'un point analytique. Appell. Acta mathematica I, 109, 132.
149. Espressione di funzioni intere che in posti dati arbitrariamente prendono valori prestabilità. P. Cazzaniga. Annali mat. Ser. 2, X, 279.
150. Sur la théorie des sinus des ordres supérieurs. Yvon Villarceau. Compt. rend. XCI, 195. — J. Farkas ibid. 209, 278, 544.
151. Remarque relative à deux intégrales obtenues par Lamé dans la théorie analytique de la chaleur. Escary. Compt. rend. XC, 1341. [Vergl. Bd. XXVIII, Nr. 534.]
152. Sur les fonctions linéaires A. E. Pellet. Compt. rend. XC, 1111.
153. Sur les fonctions entières. E. Picard. Compt. rend. LXXXIX, 662. [Vergl. Bd. XXVIII, Nr. 525.]
154. Sur une propriété de certaines fonctions analogues aux fonctions algébriques. E. Picard. Compt. rend. LXXXIX, 1106.
155. Sur l'impossibilité de la relation algébrique $X^n+Y^n+Z^n=0$. R. Liouville. Compt. rend. LXXXIX, 1108. — A. Korkine ibid. XC, 303.
156. Sur l'approximation des fonctions circulaires au moyen de fonctions algébriques. Laguerre. Compt. rend. XC, 304.
157. Ueber eine Reihe neuer Functionen, welche die absoluten Invarianten gewisser Gruppen ganzzahliger linearer Transformationen bilden. Ad. Hurwitz. Mathem. Annal. XX, 125.
158. Ueber eindeutige Functionen mit linearen Substitutionen in sich. F. Klein. Mathem. Annal. XX, 49. [Vergl. Bd. XXVIII, Nr. 117.]
159. Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires. H. Poincaré. Mathem. Annal. XX, 52.
160. Théorie des groupes Fuchsiens. H. Poincaré. Acta mathematica I, 1.
161. Mémoire sur les fonctions Fuchsiennes. H Poincaré. Acta mathematica I, 93.
162. Beweis des Satzes, dass eine eindeutige analytische Function in unendlicher Nähe einer wesentlich singulären Stelle jedem Werthe beliebig nahe kommt. O. Hölder. Mathem. Annal. XX, 138.
163. Sur les fonctions analytiques uniformes dans le voisinage d'un point singulier essentiel. E. Picard. Compt. rend. LXXXIX, 745.
164. Sur les fonctions doublement périodiques avec des points singuliers essentiels. E. Picard. Compt. rend. LXXXIX, 852.
165. Ueber eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich. F. Schottky. Mathem. Annal. XX, 299.
166. Zur Theorie der Functionen mit mehreren, nicht vertauschbaren Perioden. O. Rausenberger. Mathem. Annal. XX, 47. [Vergl. Bd. XXVII, Nr. 358.]
167. Ueber eindeutige Functionen mit mehreren nicht vertauschbaren Perioden. O. Rausenberger. Mathem. Annal. XX, 187; XXI, 59.
168. Ueber periodische Functionen zweiter Gattung. O. Rausenberger. Mathem. Annal. XX, 550.
169. Sur une classe de groupes discontenus de substitutions linéaires et sur les fonctions de deux variables indépendantes restant invariables par ces substitutions. E. Picard. Acta mathematica I, 297.
170. Sur des fonctions de deux variables à trois ou quatre paires de périodes. Appell. Compt. rend. XC, 174.
171. Sur une classe de fonctions de deux variables indépendantes. E Picard. Compt. rend. XC, 1119.

172. Sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques. E. Picard. Compt. rend. XC, 1267.

Vergl. Bernoulli'sche Zahlen. Bestimmte Integrale. Determinanten. Differentialgleichungen. Differenzenrechnung. Elliptische Transcendenten. Fourier'sche Reihe. Gammafunctionen. Geometrie (höhere) 182—187. Imaginäres. Integration (unbestimmte). Kugelfunctionen. Mannichfaltigkeiten 305. Maxima und Minima. Potential. Rectification 411. Reihen. Substitutionen. Thetafunctionen. Ultraelliptische Transcendenten. Umkehrungsproblem.

G.

Gammafunctionen.

173. Sur des intégrales Euleriennes. L. Bourguet. Acta mathematica I, 295, 363.

Geodäsie.

174. Das Problem der vier Punkte im Sinne der neueren Geometrie. W. Binder. Wien. Akad.-Ber. LXXXIII, 659.
175. Sur la réduction des observations du pendule au niveau de la mer. Faye. Compt. rend. XC, 1443.
176. Ueber den Fehler beim Einstel'en des Fadenkreuzes in die Bildebene. W. Tinter. Wien. Akad.-Ber. LXXXIV, 1315.

Vergl. Geschichte der Mathematik 222.

Geometrie (descriptive).

177. Zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Axonometrie. C. Pelz. Wien. Akad.-Ber. LXXXIII, 875.
178. Anwendung der stereographischen Projection zur Construction der Isophoten auf Rotationsflächen. Joh. Morawetz. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 247.
179. Sur un point de l'enseignement de la géométrie descriptive. Th. Verstraeten. Mathesis III, 5.
180. Raum-Epicycloiden. J. S. Vaněček. Wien. Akad.-Ber. LXXXIII, 69.

Geometrie (höhere).

181. Interprétations géométriques de la théorie des substitutions de n lettres, particulièrement pour $n=3$, 4, 5, 6 en relation avec les groupes de l'hexagramme mystique. J. Veronese. Annali mat. Ser. 2, XI, 93, 284.
182. Ueber die algebraischen Curven, welche eine Schaar eindeutiger Transformationen in sich zulassen. M. Nöther. Mathem. Annal. XX, 59; XXI, 138.
183. Wieviele cyklische Gruppen giebt es in einer quadratischen Transformation der Ebene? S. Kantor. Annali mat. Ser. 2, X, 64.
184. Wieviele cyklische Gruppen giebt es in einer Cremona'schen Transformation der Ebene? S. Kantor. Annali mat. Ser. 2, X, 71.
185. Sur le nombre des groupes cycliques dans une transformation de l'espace. S. Kantor. Compt. rend. XC, 1156.
186. Ueber Apolarität und rationale Curven. Fr. Meyer. Mathem. Annal. XXI, 125.
187. Existe-t-il d'autres courbes algébriques que celles du genre 0 ou 1, dont les coordonnées soient susceptible de s'exprimer par des fonctions uniformes d'un paramètre à discontinuités exclusivement polaires? E. Picard. Compt. rend. XCI, 214, 724, 1058.
188. Ueber biquadratische Involutionen erster Stufe. Em. Weyr. Wien. Akad.-Ber. LXXXIII, 300.
189. Ueber Involutionen zweiter Stufe. Em. Weyr. Wien. Akad.-Ber. LXXXIII, 349.
190. Ueber cubische Involutionen. C. Le Paige. Wien. Akad.-Ber. LXXXIII, 351.
191. Ueber conjugirte Involutionen. C. Le Paige. Wien. Akad.-Ber. LXXXIV, 233.
192. Ueber ein Nullsystem zweiten Grades. Ad. Ameseder. Wien. Akad. Ber. LXXXIII, 385.
193. Ueber die Bedeutung des räumlichen Nullsystems für cubische Involutionen beider Stufen. Em. Weyr. Wien. Akad.-Ber. LXXXIV, 1264.
194. Das Problem der Configurationen. Th. Reye. Acta mathematica I, 93.
195. Die Hexaeder- und die Octaeder-Configurationen (12_6, 16_3). Th. Reye. Acta mathematica I, 97.

196. Ueber die Configuration (3, 3) mit den Indices 8, 9 und ihren Zusammenhang mit den Curven dritter Ordnung. S. Kantor. Wien. Akad.-Ber. LXXXIV, 915.
197. Die Configurationen $(3, 3)_{10}$. S. Kantor. Wien. Akad.-Ber. LXXXIV, 1291.
198. Ueber eine Configuration $(3, 3)_{10}$ und unicursale Curven vierter Ordnung. S. Kantor. Mathem. Annal. XXI, 299.
199. Détermination de courbes et de surfaces satisfaisant à des conditions de contact double. H. G. Zeuthen. Compt. rend. LXXXIX, 899, 946.
200. Ueber mehrstellige Berührungen von Curvensystemen mit Geraden. Gust. Gruss. Wien. Akad.-Ber. LXXXIV, 228.
201. Ueber das Polvierseit. A. Brill. Mathem. Annal. XX, 531.
202. Sur un groupe de théorèmes et formules de la géométrie énumérative. H. G. Zeuthen. Acta mathematica I, 171.
203. Ueber cyklisch projective Punktquadrupel in zwei collinearen Räumen. H. Schroeter. Mathem. Annal. XX, 231.
204. Ueber mehrstufige Curven- und Flächensysteme. Em. Weyr. Wien. Akad.-Ber. LXXXIV, 884.
205. Ueber metrische Beziehungen, die in einer Congruenz linearer Complexe stattfinden. C. Bobek. Wien. Akad.-Ber. LXXXIII, 885.
206. Mémoire de géométrie vectorielle sur les complexes du second ordre qui ont un centre de figure. Genty. Journ. mathém. Sér. 3, VIII, 299.
207. Produit de trois rapports anharmoniques. Bastin. Mathesis III, 226.
208. Ueber das Doppelverhältniss von vier Punktepaaren einer involutorischen Punktreihe erster Ordnung. B. Klein. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 252.
209. Ueber zwei projectivische Sätze. H. Schröter. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 178. — Quidde ebenda 192. [Vergl. Bd. XXVIII, Nr. 154.]
210. Zu H. Sturm's Abhandlung „Ueber die reciproke Verwandtschaft und damit zusammenhängende Verwandtschaften". S. Kantor. Mathem. Annal. XX, 297. [Vergl. Bd. XXVIII, Nr. 131.]
211. Beweis eines Satzes aus der Theorie der Raumcurven dritter Ordnung. Ad. Hurwitz. Mathem. Annal. XX, 135.
   Vergl. Differentialgleichungen 58. Formen 134. Gleichungen 246. Kegelschnitte. Mechanik 320.

Geometrie (kinematische).

212. Ueber die Bewegung eines starren räumlichen Systems. A. Schönflies. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 229.
213. Sur le mouvement d'une droite dans un plan. Ed. Habich. Compt. rend. LXXXIX, 405. [Vergl. Bd. XXVIII, Nr. 11.]
   Vergl. Mechanik 322.

Geometrie (der Lage).

214. Ueber jene Gebilde, welche aus kreuzförmigen Flächen durch paarweise Vereinigung ihrer Enden und gewisse in sich selbst zurückkehrende Schnitte entstehen. O. Simony. Wien. Akad.-Ber. LXXXIV, 237.

Geschichte der Mathematik.

215. Beitrag zur Geschichte der griechischen Geometrie. P. Treutlein. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, hist.-lit. Abth. 209.
216. Die Erklärung des Regenbogens bei Aristoteles. Fr. Poske. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, hist.-lit. Abth. 134.
217. Die archimedischen Näherungswerthe der irrationalen Quadratwurzeln. H. Weissenborn. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, hist.-lit. Abth. 81.
218. Ueber die Methode, nach der die alten Griechen (insbesondere Archimedes und Heron) Quadratwurzeln berechnet haben. W. Schönborn. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, hist.-lit. Abth. 169.
219. Zum fragmentum mathematicum Bobiense. Joh. Ludw. Heiberg. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, hist.-lit. Abth. 121.
220. Ueber eine Handschrift der Königl. öffentl. Bibliothek zu Dresden. M. Curtze. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, hist.-lit. Abth. 1, 78.
221. Ein Beitrag zur Lebensgeschichte des Magister Joannes de Praga. Jos. Teige. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, hist. lit. Abth 41.
222. Ueber den Vorschlag des Marino Ghetaldi, die Grösse der Erde zu bestimmen. E. Gelcich. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, hist.-lit. Abth. 130.
223. Sur l'inventeur des lunettes binoculaires. G. Govi. Compt. rend. XCI, 547.

224. Sur les hypothèses de Laplace et de Kant. Faye. Compt. rend. XC, 566, 637, 1246.
225. Discours prononcés aux funérailles de M. Chasles. J. Bertrand. Compt. rend. XCI, 1005. — Bouquet ibid. 1008. — Laussedat ibid. 1009. — Dumas ibid. 1012. — Rolland ibid. 1013.
226. Michele Chasles, cenno necrologico. F. Brioschi. Annali mat. Ser. 2, X, 158.
227. Discours prononcé aux funérailles du général Morin. Tresca. Compt. rend. XC, 234.
228. Annuncio della morte di C. W. Borchardt. F. Brioschi. Annali mat. Ser. 2, X, 79.
Vergl. Differentialgleichungen 55, 56. Differenzenrechnung 98. Mechanik 324, 329. Wärmelehre 456. Zahlentheorie 487.

Gleichungen.

229. Démonstration du théorème fondamental de l'algèbre. Dutordoir. Mathesis III, supplément 2.
230. Ueber den Fundamentalsatz der algebraischen Gleichungen. H. Hocks. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 123.
231. Sur la décomposition des polynômes. D. Carrère. Compt. rend. CX, 1329.
232. Conditions de divisibilité de $x^p+mx^{p-q}y^q+mx^{p-2q}y^{2q}+y^p$ par $(x+y)^2$. Polet & Solvay. Mathesis III, 69. — Gelin ibid. 70.
233. Sur les équations algébriques. E. West. Compt. rend. XCI, 598, 664, 718, 759.
234. Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen. Jul. König. Mathem. Annal. XXI, 424.
235. Sulla risolvente di Lagrange per le equazioni di grado primo risolvibili per radicali. L. Bianchi. Annali mat. Ser. 2, XI, 255.
236. Sur la fonction résolvante de l'équation $x^m+px+q=0$. A. Pujet. Compt. rend. XCI, 611.
237. Eine Verallgemeinerung der Cartesianischen Zeichenregel. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. LXXXIII, 321.
238. Ueber algebraische Gleichungen, welche nur reelle Wurzeln besitzen. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. LXXXIV, 1102.
239. Sur la détermination d'équations numériques ayant un nombre donné de racines imaginaires. Laguerre. Compt. rend. XC, 180.
240. Sur la théorie des équations numériques. Laguerre. Journ. mathém. Sér. 3, IX, 99.
241. Sur la séparation des racines d'une équation algébrique à coefficients numériques. Laguerre. Compt. rend. LXXXIX, 635.
242. Théorème relatif à la limite inférieure des racines d'une équation algébrique. Prévôt. Mathesis III, 198.
243. Sur les équations algébriques dont le premier membre satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre. Laguerre. Compt. rend. XC, 809.
244. Sur une application de la mécanique rationelle à la théorie des équations. F. Lucas. Compt. rend. LXXXIX, 224.
245. Soit a nombre entier, α étant une racine de $x^2-ax+1=0$, la quantité $\frac{1+\alpha^2+\alpha^4+\ldots+\alpha^{2n-2}}{\alpha^{n+1}}+a\alpha^n$ est un nombre entier. E. Cesaro. Mathesis III, 246.
246. Ueber binäre Formen und die Gleichung sechsten Grades. A. Brill. Mathem. Annal. XX 330.
247. Sur une équation du 24. degré résolue au moyen d'une certaine identité. Deblon. Mathesis III, 141. — J. Neuberg ibid. 142.
248. Zur Theorie der Discriminanten. E. Netto. Acta mathematica I, 371. [Vergl. Bd. XXVI, Nr. 378.]
249. Sur l'élimination. C. Le Paige. Compt. rend. XC, 1210.
250. Résolution de deux équations contenant $n+1$ radicaux dont chacun porte sur toute l'expression qui le suit. Polet. Mathesis I, 140, 242.
Vergl. Substitutionen. Ultraelliptische Transcendenten 448.

Graphische Auflösungen.

251. Méthodes de calcul graphique, emploi de ces méthodes pour la rédaction des projets que comporte le développement du réseau des chemins de fer français. L. Lalanne. Compt. rend. LXXXIX, 396.

H.

Hydrodynamik.

252. Fonction des vitesses; extension des théorèmes de Lagrange au cas d'un fluide imparfait. Bresse. Compt. rend. XC, 501, 857. — J. Boussinesq ibid. 736, 967.
253. Équations des petits mouvements d'un liquide pesant sous certaines conditions. J. Boussinesq. Journ. mathém. Sér. 3, IX, 273, 425.
254. Ueber die Gesetze der Bewegung und Formveränderung homogener, frei um ihre Axe rotirender cylindrischer Gleichgewichtsfiguren und die Veränderung derselben durch Expansion oder Condensation. L. Matthiessen. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 31.
255. Sopra i moti che conservano la figura ellissoidale a una massa fluida eterogenea. Enr. Betti. Annali mat. Ser. 2, X, 173.
256. Des vibrations à la surface des liquides. F. Lechat Compt. rend. LXXXIX, 299.
257. Des vibrations à la surface des liquides. F. Lechat. Compt. rend. XC, 1545.
258. Formes vibratoires des bulles de liquide glycérique. C. Decharme. Compt. rend. LXXXIX, 570.
259. Ueber die Bestimmung des Reibungs- und Gleitungscoefficienten aus ebenen Bewegungen einer Flüssigkeit. M. Margules. Wien. Akad.-Ber. LXXXIII, 588.
260. Ueber Bewegungen zäher Flüssigkeiten und über Bewegungsfiguren. M. Margules. Wien Akad.-Ber. LXXXIV, 491.
261. Ueber die Dämpfung der Schwingungen fester Körper in Flüssigkeiten. Ign. Klemenčič. Wien. Akad.-Ber. LXXXIV, 146.
262. Sur un moyen de diminuer la perte de force vive dans un ajutage divergent de grandes dimensions dont l'angle est trop ouvert et qu'on peut diviser en plusieurs par des surfaces coniques ayant le même axe. A. de Caligny. Compt. rend. LXXXIX, 471, 976.
263. Sur l'utilité des lames courbes concentriques pour amorcer alternativement les siphons au moyen d'une colonne liquide oscillante. A. de Caligny. Compt. rend. XC, 119.

Hyperboloid.

264. Ueber die Strictionslinie des Hyperboloids als Erzeugniss mehrdeutiger Gebilde. Th. Schmid. Wien. Akad.-Ber. LXXXIV, 908.
265. Question algébrique résolue par les génératrices rectilignes d'un hyperboloïde. Bastin. Mathesis III, 38.

Vergl. Oberflächen zweiter Ordnung 369.

I.

Imaginäres.

266. Sur la théorie des imaginaires. G. Teixeira. Mathesis III, supplément 1.
267. Principes d'un calcul algébrique qui contient comme espèces particulières le calcul des quantités imaginaires et des quaternions. Lipschitz. Compt. rend. XCI, 619, 660.

Vergl. Gleichungen 239. Zahlentheorie 469.

Integration (unbestimmte).

268. Sur les intégrales de fonctions algébriques. A. E. Pellet. Compt. rend. XC, 676.
269. Intégration de certaines expressions dans lesquelles entrent des radicaux de fonctions entières du troisième degré. D. Boen. Mathesis III, 158. — P. Mansion ibid. 159.
270. Intégration de différentes expressions irrationelles. Jamet. Mathesis III, 170. — Realis ibid. 172. — Pisani & D. Boen ibid 173. — S. Günther ibid. 174. — D. Boen ibid. 190.

Invariantentheorie.

271. Ueber die Hesse'sche Covariante einer binären algebraischen Form fünfter Ordnung. F. Lindemann. Mathem. Annal. XXI, 71.
272. Eine neue canonische Form von Gruppen binärer Formen. Fr. Meyer. Mathem. Annal. XXI, 434.
273. Ein neues Uebertragungsprincip für binäre Formen, deren Ordnungszahl eine nicht prime ist. Fr. Meyer. Mathem. Annal. XXI, 528.

274. Table des nombres de dérivées invariantives d'ordre et de degré donnés, appartenant à la forme binaire du dixième ordre. Sylvester. Compt. rend. LXXXIX, 395.
275. Sur le vrai nombre des covariants fondamentaux d'un système de deux cubiques. Sylvester. Compt. rend. LXXXIX, 828.
276. Sulle relazioni esistenti fra covarianti ed invarianti di una stessa forma binaria. F. Brioschi. Annali mat. Ser. 2, XI, 291.
Vergl. Functionen 157.

K.

Kegelschnitte.

277. Ueber confocale Kegelschnitte. C. Hossfeld. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 294.
278. Ein Kegelschnittbüschel mit vier reellen Grundpunkten schneidet auf einer Geraden in der Ebene desselben eine Punktinvolution aus. C. Hossfeld. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 51.
279. Ueber Strahlenbüschel zweiter Ordnung. Ad. Meyer. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 384.
280. Synthetische Untersuchung der gemischten Kegelschnittschaar $S(3l, 1p)$ mit einem imaginären Tangentenpaar. Jos. Tesař. Wien. Akad.-Ber. LXXXIV, 194.
281. Sur les coniques tangentes à deux circonférences, se coupant entre elles, et passant par leurs points communs. Timmerhans. Mathesis III, 105. — Bastin ibid. 108.
282. Vermischte Lehrsätze über die Kegelschnitte und die Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt. H. E. M. O. Zimmermann. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 56.
283. Ueber die involutorische Lage sich berührender Kegelschnitte. Em. Weyr. Wien. Akad.-Ber. LXXXIII, 63.
284. Die Ausartungen biquadratischer Involutionen und über die sieben Systeme der eine rationale Plancurve vierter Ordnung vierfach berührenden Kegelschnitte. Em. Weyr. Wien. Akad.-Ber. LXXXIII, 807.
285. Ueber die eine rationale Plancurve vierter Ordnung vierfach berührenden Kegelschnitte, welche ein einzelnes System bilden. Ad. Ameseder. Wien. Akad.-Ber LXXXIII, 829.
286. Somme de trois rapports anharmoniques. Bastin. Mathesis III, 138.
287. Der einem Dreieck umschriebene Kegelschnitt kleinsten Inhalts. M. Greiner. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 281.
288. Quadrilatères inscrits à une conique. J. Neuberg. Mathesis III, 219.
289. Sur les polygones inscrits à une conique et circonscrits à une autre conique. G. Darboux. Compt. rend. XC, 85.
290. Equation d'une conique passant par les extrémités de trois cordes dont les points milieux sont identiques. Bastin. Mathesis III, 225.
Vergl. Ellipse. Kreis. Normalen. Oberflächen 363, 364. Parabel. Trisection des Winkels.

Kreis.

291. Die Gleichung des Kreises in trimetrischen Punktcoordinaten. Ign. Dorogi. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 46.
292. Trajectoires orthogonales des circonférences $x^2+y^2-2\lambda x+a^2=0$. H. Brocard. Mathesis II, 162, 232; III, 70.
293. Quelques théorèmes de géométrie élémentaire. E. Catalan. Mathesis III, 61.
294. Problèmes sur les cercles. Barbarin. Mathesis III, 126.
295. Triangles inscrits dans un cercle ayant tous le même sommet et la somme des carrés des côtés aboutissant à ce sommet constante. De Rocquigny & Polet. Mathesis III, 110. — Derousseaux & Fauchamps ibid. 111. — Bastin ibid. 111.
296. Triangle inscrit dans un cercle donné ayant un sommet fixe et une valeur constante de $b^2+c^2-a^2$, a, b, c étant les trois côtés. Liénard. Mathesis III, 227.
Vergl. Maxima und Minima 312.

Krümmung.

297. Zur Theorie der Krümmung ebener Curven. O. Zimmermann. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 115.

298. Ein Analogon zu Gauss' Satz von der Krümmung der Flächen. R. Sturm. Mathem. Annal. XXI, 379.
Vergl. Oberflächen zweiter Ordnung 367.

Kugelfunctionen.

299. Sur la propriété des polynomes X_n de Legendre. Laguerre. Compt. rend. XCI, 849.
300. Sur le calcul numérique des intégrales définies. B. Baillaud. Compt. rend. XC, 974.

M.

Magnetismus.

301. Du magnétisme statique. H. Resal. Journ. mathém. Sér. 3, IX, 105.
302. Bestimmung magnetischer und diamagnetischer Constanten von Flüssigkeiten und Gasen in absolutem Maasse. J. Schuhmeister. Wien. Akad.-Ber. LXXXIII, 45.
303. Entwickelung einiger zur Bestimmung der Diamagnetisirungszahl nützlichen Formeln. L. Boltzmann Wien. Akad.-Ber. LXXXIII, 576.
304. Ueber die Magnetisirbarkeit des Eisens bei hohen Temperaturen. A. Wassmuth. Wien. Akad.-Ber. LXXXIII, 332.
Vergl. Potential 405.

Mannichfaltigkeiten.

305. Ueber unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten. G. Cantor. Mathem. Annal. XX, 113; XXI, 51, 545. [Vergl. Bd. XXVI, Nr. 436.]
306. Ueber Körper von vier Dimensionen. H. Durège. Wien. Akad.-Ber. LXXXIII, 1110.
307. Sopra la funzione potenziale in uno spazio di n dimensioni. Alb. Tonelli. Annali mat. Ser. 2, X, 291.
Vergl. Geometrie (höhere) 181.

Maxima und Minima.

308. Ein Beitrag zur Theorie der Maxima und Minima von Functionen. Fr. Haluschka. Wien. Akad.-Ber. LXXXIII, 1092.
309. Ueber eine Minimumsaufgabe. H. Bruns. Mathem. Annal. XX, 455.
310. Valeur maximum de $\frac{ab^3-cx^3}{ab-cx}$, a, b, c étant des constantes positives et $\frac{1}{a}<1$. Gilbert. Mathesis III, 200.
311. Limites de certaines expressions dans lesquelles entrent $\sqrt{a^2\cos\varphi^2+b^2\sin\varphi^2}$ et $\sqrt{a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2}$. Mathesis III, 211.
312. Le plus grand polygone qu'on puisse construire avec des côtés donnés est inscriptible dans une circonférence. A. Polet. Mathesis III, 112. — E. Cesaro ibid. 113.
313. Étant données deux ellipses ayant même axe, mener du même côté de cet axe, par le centre et le sommet A, deux parallèles telles que l'aire comprise entre ces droites et les arcs interceptés soit un maximum. Clevers. Mathesis III, 85.
314. Par l'un des foyers d'une ellipse, on mène une corde dont on joint les extrémités à l'autre foyer. Étudier la variation de l'aire du triangle ainsi formé. Pisani & Clevers. Mathesis III, 42. — J. Neuberg ibid. 44.
315. Ellipse éclairée par deux sources lumineuses d'intensités données placées aux foyers. Bastin. Mathesis III, 184. — J. Neuberg ibid. 185.
Vergl. Kegelschnitte 287. Mechanik 321.

Mechanik.

316. Sur l'intégration des équations differentielles du problème des n corps. Göran Dillner. Annali mat. Ser. 2, XI, 56.
317. Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten und damit verwandte Sätze der analytischen Mechanik. A. F. Sundell. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 24.
318. Sur le principe de la moindre action. J. A. Serret. Compt. rend. LXXXIX, 57.
319. Du problème inverse du mouvement d'un point matériel sur une surface de révolution. H. Resal. Compt. rend. XC, 889, 937.
320. Ueber geometrische Eigenschaften von Kräfte- und Rotationssystemen in Verbindung mit Liniencomplexen. Joh. N. Franke. Wien. Akad.-Ber. LXXXIV, 570.

321. Détermination de trois axes d'un corps solide sur lesquels les forces centrifuges exercent, par suite de la rotation, un effet maximum. E. Brassinne. Compt rend. XC, 1271.
322. Sur les différentes branches de la cinématique. H. Resal. Compt. rend. LXXXIX, 1090.
323. Sur quelques théorèmes de cinématique. H. Resal. Compt. rend. XC, 769.
324. Sur la cinématique des déformations des corps soit élastiques, soit plastiques, soit fluides. De Saint-Venant. Compt. rend. XC, 53, 209.
325. Ueber das Problem der Rotation. W. Hess. Mathem. Annal. XX, 461.
326. Sur la détermination des éléments d'un mouvement vibratoire; mesure des amplitudes, des périodes et de la phase. E. Mercadier. Compt. rend. LXXXIX, 736, 1071, 1110.
327. Ueber Momente höherer Ordnung. Ferd. Wittenbauer. Wien. Akad.-Ber. LXXXIII, 357.
328. Ueber Deviationsmomente. Ferd. Wittenbauer. Wien. Ak.-Ber. LXXXIII, 972.
329. Commentaire à la théorie mathématique du jeu de billard. H. Resal. Journ. mathém. Sér. 3, IX, 65.
330. Formules approchées relatives à l'équilibre d'une portion de chaîne ou de corde pesante, comprise entre deux appuis, et très tendue. H. Resal. Journ. mathém. Sér. 3, VIII, 383.
331. Figure de répos apparent d'une corde inextensible en mouvement dans l'espace. H. Léauté Compt. rend. LXXXIX, 778.
332. Équations des petites oscillations d'un fil inextensible en mouvement dans l'espace. H. Léauté. Compt. rend. XC, 290.
333. Détermination des tensions moyennes développées aux extrémités d'une corde pesante oscillant autour d'une position de repos apparent. H. Léauté. Compt. rend. XC, 354.
334. Sur le profil des lames du dynamomètre de Poncelet. H. Léauté. Journ. mathém. Sér. 3, IX, 245.
335. Sur un procédé permettant d'obtenir, d'un régulateur à boules quelconque, le degré d'isochronisme qu'on veut, et de maintenir ce degré d'isochronisme pour toutes les vitesses de régime. H. Léauté. Compt. rend. LXXXIX, 431, 473.
336. Sur un frein dynamométrique se réglant automatiquement. Carpentier. Compt. rend. LXXXIX, 950.
337. De la compensation des températures dans les chronomètres. Phillips. Compt. rend. XC, 483, 561, 649.
338. Études sur la chronométrie: de la compensation C. Rozé. Compt. rend. XC, 807, 858.
339. Sur les régulateurs à ailettes, construits par M. Breguet. Yvon Villarceau. Compt. rend. XC, 1515.
340. De l'influence de la température et de l'élasticité sur les câbles des ponts suspendus. H. Resal. Compt. rend. XC, 149
341. Des causes qui tendent à gauchir les poutres des ponts en fer, et des moyens de calculer ces poutres, pour résister aux efforts gauchissants. S. Périssé. Compt. rend. XC, 1413.
342. Règles pratiques pour l'établissement des transmissions télodynamiques. H. Léauté. Compt. rend. XC, 587.
343. Recherche du coefficient de régularité du mouvement dans les transmissions par câbles. H. Léauté. Compt. rend. XC, 498.

Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 10. Astronomie. Ballistik. Capillarität. Elasticität. Elektrodynamik. Geometrie (kinematische). Gleichungen 244. Graphische Auflösungen. Hydrodynamik. Magnetismus. Molecularphysik. Oberflächen 352. Optik. Pendel. Potential Schwerpunkt. Wärmelehre.

Molecularphysik.

344. Grundzüge der mathematischen Chemie. W. C. Wittwer. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 337; XXVII, 289, 329; XXVIII, 217, 352. [Vergl. Bd. XXVI, Nr. 140.]

N.

Normalen.

345. Sur les normales menées à des coniques, touchant deux droites en des points donnés, à partir du point de rencontre de leurs deux normales communes. Bastin. Mathesis III, 210.

346. Ueber die Normalen der Ellipse. C. Lauermann. Wien. Akad.-Ber. LXXXIII, 92.
347. Lieu décrit par les centres des circonférences qui passent par les points d'incidence des normales abaissées sur une ellipse d'une même point de la développée. H. Brocard. Mathesis III, 39.
348. Propriété des normales à l'ellipse. E. Servais. Mathesis III, 117.
349. Sur les normales abaissées sur une parabole donnée d'un point de la parabole même. Brocard Mathesis III, 36.

O.

Oberflächen.

350. Untersuchungen über geodätische Curven. S. Lie. Mathem. Annal. XX, 357.
351. Bemerkungen über einige Transformationen von Flächen. A. Enneper. Mathem. Annal. XXI, 267.
352. Sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles. Lecornu. Compt. rend. XCI, 809.
353. Ueber Regelflächen mit rationalen Doppelcurven. Em. Weyr. Wien. Akad.-Ber. LXXXIV, 691.
354. Ueber die geometrische Construction von Fächern zur Darstellung windschiefer Flächen. P. Schönemann. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 243.
355. La surface de l'onde considérée comme surface limite. A. Mannheim. Compt. rend. XC, 971, 1333.
356. Ueber Curven auf Rotationsflächen Biehringer. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 157. [Vergl. Bd. XXIII, Nr. 257.]
357. Ueber die Curven auf der allgemeinen Fläche dritter Ordnung. R. Sturm. Mathem. Annal. XXI, 457.
358. Zur Construction des Polarsystems einer Fläche dritter Ordnung. H. Thieme. Mathem. Annal. XX, 144. [Vergl. Bd. XXVIII, Nr. 131.]
359. Ueber eine besondere Classe von Flächen vierter Ordnung. Friedr. Schur. Mathem. Annal. XX, 254.
360. Ueber eine Fläche sechster Ordnung vom Flächengeschlecht -1. M. Nöther. Mathem. Annal. XXI, 399.
361. Des bissectrices d'un réseau de lignes tracées sur une surface quelconque. Aoust. Journ. mathém. Sér. 3, IX, 43.
362. Théorèmes de Hachette et de Chasles sur les plans tangents aux surfaces gauches. Goedseels Mathesis III, 49. — P. Mansion ibid. 52.
363. Sur le contact des coniques et des surfaces. G. Darboux. Compt. rend. XCI, 969.
364. Sur le contact des coniques et des surfaces. Moutard. Compt. rend. XCI, 1055.
365. Normalenfläche einer Developpablen längs ihres Durchschnittes mit einer krummen Fläche. G. A. v. Peschka. Wien Akad.-Ber. LXXXIII, 790.
366. Normalenfläche einer krummen Fläche längs ihres Schnittes mit einer zweiten krummen Fläche. G A v. Peschka. Wien. Akad.-Ber. LXXXIV, 30.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 4. Krümmung 298. Mechanik 319.

Oberflächen zweiter Ordnung.

367. Sur la détermination, en un point d'une surface du second ordre, des axes de l'indicatrice et des rayons de courbure principaux. A. Mannheim. Journ. mathém. Sér. 3, VIII, 167.
368. Erzeugung der abwickelbaren Flächen zweiter Ordnung durch Punkte. H. E. M. O. Zimmermann. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 255.
369. Die Strictionslinien des einmantligen Hyperboloids und hyperbolischen Paraboloids. M. Baur. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 274.
370. Ueber geodätische Polygone auf den Flächen zweiten Grades. O. Staude. Mathem. Annal. XXI, 219
371. Geodätische Linien und ihre Enveloppen auf dreiaxigen Flächen zweiten Grades. v. Braunmühl. Mathem. Annal. XX, 557.
372. Intersection d'une droite avec une surface du second degré. Legrand. Mathesis III, 177.
373. Ueber einen das System zweier Flächen zweiten Grades betreffenden Satz und einen damit verbundenen Strahlencomplex zweiten Grades. Fr. Schur. Mathem. Annal. XXI, 515.

Vergl. Ellipsoid. Hyperboloid. Paraboloid.

Optik.

374. Die Differentialgleichungen in der Dioptrik der continuirlich geschichteten kugelförmigen Krystalllinse der Fische. L. Matthiessen. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 211. [Vergl. Bd. XXVII, Nr. 206.]
375. Sur la théorie de la double réfraction circulaire. Gouy. Compt. rend. XC, 992.
376. Sur la théorie des phénomènes d'interférence où intervient la polarisation rotatoire. Gouy. Compt. rend XC, 1121.
377. Sur la propagation de la lumière. Gouy. Compt. rend. XCI, 877.
378. Sur la propagation des ondes lumineuses, en égard à la dispersion. Gouy. Journ. mathém. Sér. 3, VIII, 335.
379. Ueber den Einstellungsspielraum am Fernrohr und die Parallaxe. C. Bohn. Zeitschr. Math Phys. XXVIII, 129.
380. Ueber das Funkeln der Sterne und die Scintillation überhaupt. C. Exner. Wien. Akad.-Ber. LXXXIV, 1038.
381. Sur un nouveau spectroscope stellaire. L. Thollon. Compt. rend. LXXXIX, 749.
382. Minimum de dispersion des prismes; achromatisme de deux lentilles de même substance. Thollon. Compt. rend. LXXXIX, 93.
383. Sur la loi de repartition suivant l'altitude de la substance absorbant dans l'atmosphère les radiations solaires ultra-violettes. A. Cornu. Compt. rend. XC, 940.

Vergl. Astronomie 31—34. Geschichte der Mathematik 216, 223. Maxima und Minima 315.

P.

Parabel.

384. Lieu des foyers des paraboles qui touchent deux droites données et dont la directrice passe par un point donné. S. B. Mathesis III, 67. — Jamet ibid 68. — Bastin ibid. 68.
385. Lieu des points M tels que les tangentes menées de M à une parabole donnée determinent avec une droite donnée un triangle de surface donnée. Lienard. Mathesis III, 207. — J. Neuberg ibid. 208.
386. Sur une parabole se déplaçant parallèlement à elle même. Pisani. Mathesis III, 241. — Brocard ibid. 242.

Vergl. Normalen 349.

Paraboloid.

387. Sur un paraboloïde de révolution tangent aux trois faces d'un trièdre trirectangle. A. Pelletreau. Mathesis III, 221.

Vergl. Oberflächen zweiter Ordnung 369.

Pendel.

388. Nouvelle méthode pour déterminer la longueur du pendule simple. G. Govi. Compt. rend. XCI, 105.
389. Théorie du pendule simple, à oscillations coniques, en ayant égard à la rotation de la terre. Yvon Villarceau. Compt. rend. LXXXIX, 113.
390. Ueber das zweigliedrige Pendel. M. Luxenberg. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII. 309.
391. Ueber das physische Pendel. O. Böklen. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 304.
392. Ueber ein Analogon des Kater'schen Pendels und dessen Anwendung zu Gravitationsmessungen. Jos. Finger. Wien. Akad.-Ber. LXXXIV, 168.

Vergl. Geodäsie 175.

Philosophie der Mathematik.

393. Sur le principe de l'homogénéité. E. Catalan. Mathesis III, 33, 35. — P. Mansion ibid. 34. [Vergl. Bd. XXVIII, Nr. 3.]

Planimetrie.

394. Sur deux triangles dont l'un a les côtés parallèles aux lignes menées des sommets de l'autre à un point donné. Jeřábek, Timmerhans, Pisani. Mathesis III, 86. — E. Cesaro, J. Gilliet ibid. 87.
395. Sur une série de triangles inscrits les uns aux autres. Pisani. Mathesis III, 187.
396. Triangle dans lequel les carrés de la hauteur, de la bissectrice et de la médiane sont en progression arithmétique. Liénard & Servais. Mathesis III, 93.

397. Deux triangles dont les aires équivalent ensemble à l'aire d'un quadrilatère ayant pour côtés opposés les bases des deux triangles. Pisani. Mathesis III, 140.
398. Calculer le diamètre du cercle circonscrit à un triangle étant données le médiane, la hauteur et la bissectrice issues d'un même sommet. Prevot. Mathesis III, 243.
399. Le noeud de cravate en pentagone régulier. Ed. Lucas. Mathesis III, 54.
400. Sur deux théorèmes de géométrie. Kiehl. Mathesis III, 103.
Vergl. Combinatorik 50.

Potential.

401. Sur l'équation aux dérivées partielles du potentiel. E. Picard. Compt. rend. XC, 601.
402. Intorno ad alcuni nuovi teoremi del sig. C. Neumann sulle funzioni potenziali. Eug. Beltrami. Annali mat. Ser. 2, X, 46.
403. Un teorema relativo alla funzione potenziale. A. Tonelli. Annali mat. Ser. 2, XI, 305.
404. Sur la manière de présenter la théorie du potentiel dans l'hypothèse généralement admise de la discontinuité de la matière. J. Boussinesq. Compt. rend. XC, 792.
405. Sul potenziale magnetico. Eug. Beltrami. Annali mat. Ser. 2, X, 241.
Vergl. Differentialgleichungen 96. Elektrodynamik. Mannichfaltigkeiten 307.

Q.

Quadratur.

406. Sur les formules de quadrature à coéfficients égaux. R. Radau. Compt. rend. XC, 520.
407. Sur la formule de quadrature de Gauss. R. Radau. Compt. rend. XC, 913.
408. Sur la formule de quadrature de Gauss. O. Callandreau. Compt. rend. XC, 1067.
409. Equation et quadrature d'une courbe ayant rapport à une circonférence. P. Bastin. Mathesis III, 116. — E. Cesaro ibid. 191.
410. Quarante-six expressions de l'aire d'un triangle. J. Main. Mathesis III, 136. — E. Lucas ibid. 167.
Vergl. Kegelschnitte 287.

R.

Rectification.

411. Irrationalität der Zahl π. F. Lindemann. Mathem. Annal. XX, 213.
412. Sur la méthode des isopérimètres. Ancion. Mathesis III, 145, 161.
413. Sur certaines moyennes géométriques et sur le périmètre de l'ellipse. C. B. S. Cavallin. Mathesis III, 56.
414. Sur le périmètre de l'ellipse. Muir & E. Cesaro. Mathesis III, 102.

Reihen.

415. Ueber den Giltigkeitsbereich der Taylor'schen Reihenentwickelung. P. du Bois-Reymond. Mathem. Annal. XXI, 109, 252.
416. Grenzwerthe von Reihen an der Convergenzgrenze. O. Hölder. Mathem. Annal. XX, 535.
417. Ueber die Multiplication bedingt convergenter Reihen. Alfr. Pringsheim. Mathem. Annal. XXI, 327.
418. Sur l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ de Gauss. E. Mathieu. Journ. mathém. Sér. 3, VIII, 357.
419. Sur la série hypergéométrique et les polynômes de Jacobi. Appell. Compt. rend. LXXXIX, 31. [Vergl. Bd. XXVIII, Nr. 445.]
420. Sur les séries hypergéométriques de deux variables et sur des équations différentielles linéaires aux dérivées partielles. Appell Compt. rend. XC, 296, 731, 977; XCI, 364. — Journ. mathém. Sér. 3, VIII, 173.
421. Ueber eine eindeutige Entwickelung von Zahlen in eine unendliche Reihe. J. Lüroth. Mathem. Annal. XXI, 411.
422. Sur les développements des fonctions algébriques. David. Compt. rend. LXXXIX, 219.
423. Intorno agli sviluppi delle funzioni di una variabile reale per serie di funzioni Jacobiane. Ul. Dini. Annali mat. Ser. 2, X, 145.

424. Développement d'une fonction à une seule variable, dans un intervalle donné, suivant les valeurs moyennes de cette fonction et de ses dérivées successives dans cet intervalle. H. Léauté. Compt. rend. XC, 1404.
425. Développements en série d'une fonction holomorphe dans une aire limitée par des arcs de cercle. P. Appell. Mathem. Annal. XXI, 118.
426. Développements en série dans une aire limitée par des arcs de cercle. Appell. Acta mathematica I, 145.
427. Anwendung der Fourier'schen Reihe auf die Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen. A. Harnack. Mathem. Annal. XXI, 305.
428. Zur Theorie der Modulfunctionen O. Rausenberger. Mathem. Annal. XX, 45.
Vergl. Astronomie 21—24. Differentialgleichungen 74, 75. Fourier'sche Reihe. Functionen 150. Symbolische Operationen. Zahlentheorie 468.

S.

Schwerpunkt.

429. Sur le centre de gravité de l'aire et de l'arc de la chaînette. P. Mansion. Mathesis III, 81.

Singularitäten.

430. Sur les nouveaux points singuliers des courbes planes découverts par Joseph Plateau. P. Mansion. Mathesis III, 193.
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 8. Analytische Geometrie des Raumes 10, 18. Differentialgleichungen 59. Geometrie (höhere) 187, 199. Kegelschnitte 282.

Stereometrie.

431. Zur geometrischen Bedeutung des Sinus eines Trieders. A. Thaer. Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 249.
432. Zur Theorie der Polyeder. F. Lippich. Wien Akad.-Ber. LXXXIV, 20.
433. Théorème sur un tétraèdre inscrit à une sphère. Lienard. Mathesis III, 215.
Vergl. Cubatur 51.

Substitutionen.

434. Gruppentheoretische Studien. W. Dyck. Mathem. Annal. XX, 1
435. Ueber Gleichungen 7. Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen. Gordan. Mathem. Annal. XX, 515.
436. Sur la réduction des substitutions linéaires. C. Jordan. Compt. rend. XC, 598.
Vergl. Geometrie (höhere) 181.

Symbolische Operationen.

437. Principes du calcul symbolique. E. Cesaro. Mathesis III, 10.

T.

Thetafunctionen.

438. Intégration de certaines équations différentielles à l'aide de fonctions Θ. Appell. Compt. rend. XC, 1207.
439. Généralisation de deux théorèmes sur les fonctions Θ. Elliot. Compt. rend. XC, 352.
440. Sur le problème de l'inversion. Elliot. Compt. rend. XC, 1466.

Trigonometrie.

441. Équation ayant lieu entre les sinus de trois angles dont la somme est un multiple de π. Gillet. Mathesis III, 44.
442. Calculer le rapport des côtés d'un champ rectangulaire au moyen des angles sous lesquels on voit les quatre côtés et de l'angle des diagonales. Polet. Mathesis III, 66.
443. Trouver l'aire d'un quadrilatère convexe au moyen des côtés et de l'angle des diagonales. Polet. Mathesis III, 67.
444. Propriété du triangle sphérique rectangle. Solvay. Mathesis III, 188.
Vergl. Planimetrie 394.

Trisection des Winkels.

445. Trisection de l'angle au moyen de l'hyperbole équilatère. Delboeuf. Mathesis III, 130.

U.

Ultraelliptische Transcendenten.

446. Zur Reduction Abel'scher auf elliptische Integrale. M. Ungar. Wien. Akad.-Ber. LXXXIII, 759.

447. La relazione di Göpel per funzioni iperellitiche d'ordine qualunque. F. Brioschi. Annali mat. Ser. 2, X, 161.
448. Algebraischer Beweis des Satzes von der Anzahl der linearunabhängigen Integrale erster Gattung. Christoffel. Annali mat. Ser. 2, X, 81.
449. Die Modulargleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung für die Transformation fünften Grades. M. Krause. Math. Annal. XX, 226.
450. Ueber Multiplicatorgleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. M. Krause. Mathem. Annal. XX, 54.
451. Ueber die complexe Multiplication hyperelliptischer Functionen zweier Argumente. E. Wiltheiss. Mathem. Annal. XXI, 385.

Vergl. Functionen 144. Geometrie (höhere) 187.

Umkehrungsproblem.

452. Sur une classe de fonctions de plusieurs variables tirées de l'inversion des intégrales de solutions des équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions rationelles. L. Fuchs. Compt. rend XC, 678, 735.

Vergl. Thetafunctionen 440

W.

Wärmelehre.

453. Commentaire à la théorie analytique de la chaleur de Fourier. H. Resal. Journ. mathém. Sér. 3, VIII, 79.
454. Essai théorique sur la loi de Dulong et Petit. H. Willotte. Compt. rend. LXXXIX, 540, 568.
455. Ueber einige das Wärmegleichgewicht betreffende Sätze. L. Boltzmann. Wien. Akad.-Ber. LXXXIV, 136.
456. Méthode synthétique rapide pour établir les formules fondamentales relatives aux changements d'état. C Viry. Compt. rend. XCI, 106.
457. Ueber das Gleichgewicht eines festen elastischen Körpers von ungleichförmiger oder veränderlicher Temperatur. J. Stefan. Wien. Akad.-Ber. LXXXIII, 549.
458. Sur la chaleur spécifique et la conductibilité des corps. Morisot. Compt. rend. XC, 814.
459. Ueber verschiedene Wärmecapacitäten und andere in der Wärmelehre vorkommende Grössen. C. Bohn. Zeitschr Math. Phys. XXVIII, 83.
460. Équation générale donnant la relation qui existe pour tous les liquides entre leur température et la tension maximum de leurs vapeurs à cette température. R Pictet. Compt. rend XC, 1070.
461. Ueber die Verdampfung aus einem kreisförmig oder elliptisch begrenzten Becken J. Stefan. Wien. Akad.-Ber. LXXXIII, 943.
462. Zur Theorie der Gasreibung. L. Boltzmann. Wien Akad.-Ber. LXXXIV, 40, 1230. [Vergl. Bd. XXVII, Nr. 473.]
463. Sur la dilatation et la compressibilité des gaz sous de fortes pressions. E. H. Amagat. Compt. rend. XCI, 428.
464. Réflexions critiques sur les expériences concernant la chaleur humaine. Hirn. Compt. rend. LXXXIX, 687, 833.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

465. Étant donnés deux nombres quelconques il y a environ 61 à parier contre 39, qu'ils sont premiers entre eux E Cesaro. Mathesis III, 224.
466. Sur une question de probabilités. E. Césaro. Mathesis III, 233. [Vergl. Bd. XXVIII, Nr. 399.]
467. Zur Theorie der Leibrenten. C. J. Malmsten. Acta mathematica I, 63.

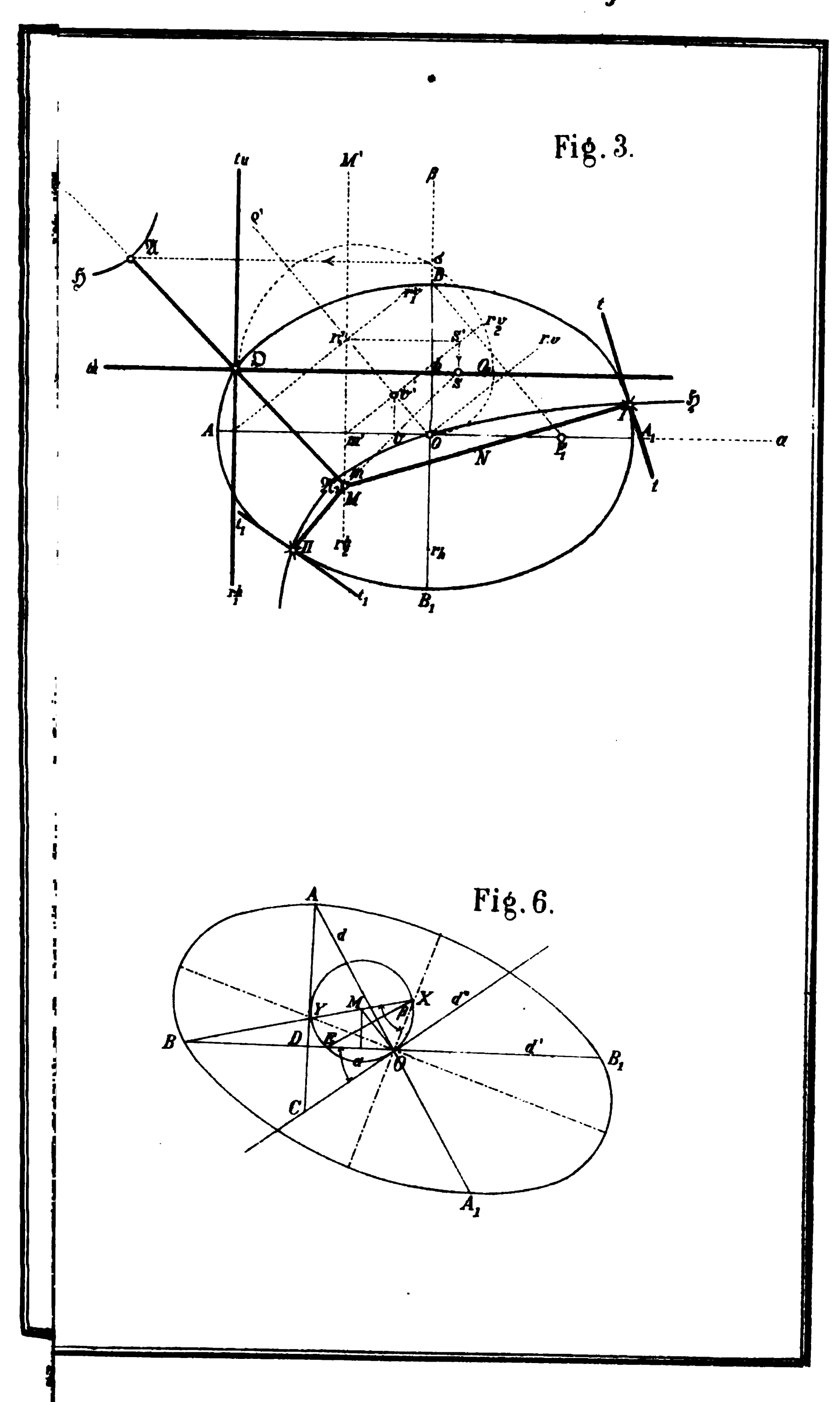
Z.

Zahlentheorie.

468. Sur des séries relatives à la théorie des nombres. Lipschitz. Compt. rend. LXXXIX, 948, 985.
469. Sur la théorie des nombres complexes idéaux. R. Dedekind Compt. rend. XC, 1205.
470. Ueber Primzahlenmengen. Meissel. Mathem. Annal. XXI, 304.

471. Beweis des Satzes, dass jede eigentlich primitive quadratische Form un lich viele Primzahlen darzustellen fähig ist. Heinr. Weber. Mat Annal. XX, 301.
472. Sur les fonctions irréductibles suivant un module premier. A. E. Pe Compt. rend. XC, 1339.
473. Sur les diviseurs des fonctions cyclotomiques. Sylvester. Compt. XC, 287, 345.
474. Démonstration d'un théorème de M. Sylvester sur les diviseurs d'une fon cyclotomique. P. Pepin. Compt. rend. XC, 526.
475. Sur les fonctions cyclotomiques. Ed. Lucas. Compt. rend. XC, 855.
476. Neue Beweismethoden für einen Doppelsatz der Theorie der Potenzreste, s über die Erweiterung des Congruenzbegriffes. Fr. Hofmann. Mat Annal. XX, 461.
477. Comment doit on prendre le nombre premier p, afin que dans l'équatio Fermat $2^{p-1}-1=pN$ le nombre N soit un carré. H Brocard. Mat III, 41. – J. Neuberg ibid. 80.
478. Zur Theorie der quadratischen Reste. E. Schering. Acta mathemat. I,
479. Sur la loi de réciprocité dans la theorie des nombres. Sylvester. Co rend. XC, 1053, 1104. — R. Dedekind ibid. XCI, 154.
480. Sur la loi de réciprocité de Legendre étendue aux nombres non premiers. Genocchi Compt. rend. XC, 300.
481. Ueber das verallgemeinerte Legendre'sche Symbol. L. Gegenbauer. W Akad.-Ber. LXXXIV, 1089.
482. Intorno ad una congruenza di modulo primo. C. M. Piuma. Annali Ser. 2, XI, 237.
483. Nombre des solutions entières non négatives de certaines équations du mier degré. E. Cesaro Mathesis III, 87. – H. Schoentjes ibid.
484. Sur les équations cubique et biquadratique. Desboves. Compt. rend. 1069.
485. La somme de deux cubes consécutifs est toujours égale à une somme nombres consécutifs Lambert. Mathesis III, 63. – De Rocqui ibid. 64. — B. Boncompagni ibid. 78.
486. Nouveaux théorèmes sur l'équation indéterminée $ax^4+by^4=z^2$. P. Pep Compt. rend. XCI, 100.
487. Sur la résolution de l'équation $x^n+y^n=z^n$ en nombres entiers. Lefébu Compt. rend. XC, 1406 — P. Pepin ibid. XCI, 366.
488. Applications de la dérivation d'Arbogast à la solution de la partition nombres et à d'autres problèmes. David. Journ. mathém. Sér. 3, VIII,
489. Zur Lehre von der Theilbarkeit der Zahlen. O. Kessler. Zeitschr. Ma Phys. XXVIII, 60.
490. Sur la partition des nombres. David. Compt. rend. XC, 1344; XCI, 621.
491. Sur le plus grand commun diviseur et le plus petit multiple commun Barrieu. Mathesis III, 217.
492. Théorèmes sur la divisibilité des nombres. Mathesis III, 104.
493. Divisibilité de certaines formes de nombres par 7, 11, 49, 9 etc. Mathesis III, 1
494. $2^{4n+2}+7^{2n+4}$ est divisible ou non par 13, suivant que n est pair ou impa De Graeve, Brocard. Mathesis III, 91. – J. Fouquet ibid. 92. E. Cesaro ibid. 92.
495. Si n est premier avec 3, le nombre $3^{2n}+3^n+1$ est divisible par 13. J. Gilliet Mathesis III, 244 - Barbarin ibid. 245.
496. Divisibilité de $\frac{n+1}{1.2..n}.1.2..a.1.2..b....1.2..l$ par $a+1, b+1, \ldots a+b+1, \ldots a+b+c+1, \ldots$ sous condition de $a+b+c+\ldots+l=n$. E. Cesaro & P. Barrieu. Mathesis III, 118.
497. Décomposition de $(1+x+x^2+\ldots+x^n)^2-x^n$ en deux facteurs. Mathesis III, 47.
498. Démonstration d'un théorème de Crelle. P. Mansion. Mathesis III, 197.
499. Un curieux théorème E. Catalan. Mathesis III, 199.

Vergl. Formen. Functionen 155.


Fig. 3.
Fig. 6.

Historisch-literarische Abtheilung.

Ueber einige, aus dem Arabischen entlehnte Sternnamen.

Von

Dr. ARMIN WITTSTEIN

in Leipzig.

Im Nachstehenden beabsichtige ich eine kurze, nur das allernöthigste Beiwerk und sprachliche Detail enthaltende Erklärung derjenigen arabischen Sternnamen zu geben, die sich, mehr oder weniger entstellt, noch bei uns im Sprachgebrauche erhalten haben und zuweilen in astronomischen Ephemeriden, neben der Bayer'schen Bezeichnung, angeführt zu werden pflegen. Sie ist an alle Leser dieser Zeitschrift gerichtet, welche mit dem Interesse an der fortschreitenden Entwickelung der Astronomie auch ein solches an der Geschichte der wohl ältesten der Wissenschaften verbinden, aber nicht selbst Gelegenheit und Musse fanden, die Bahn, auf der der menschliche Geist in seinem Ringen nach Erkenntniss und Enträthselung des κόσμος, von dem er unseren gelehrten Annalen gleichsam die Spuren eingedrückt hat, mühsam allmälig vordrang, bis zu jenen kleinen Seitenpfaden, aus allen Richtungen, zurückzuwandeln, auf denen wir — gewissermaassen ein Collectivname für ihre Vereinigung — den Anfang der Sternkunde suchen müssen. Ihnen hoffe ich mit der folgenden Zusammenstellung einen geringen Dienst zu erweisen.

Ehe ich von den hierbei benützten, gedruckten Quellen Einiges sage, habe ich vor Allem der mündlichen zu gedenken, nämlich einmal der Belehrung, die ich aus einer Unterredung mit Herrn Geh. Hofrath Prof. Dr. Krehl über das vorliegende Thema empfangen, sodann der gütigen Unterstützung, welche jener Gelehrte meinen unbedeutenden Kenntnissen im Arabischen dadurch hat angedeihen lassen, dass er sich der Mühe einer Durchsicht des linguistischen Theiles dieses Aufsatzes unterzog. Eine so seltene Liberalität, wie die, mit der Herr Geh. Hofrath Dr. Krehl die, zuweilen etwas weitgehenden Wünsche eines ihm bis dahin

völlig Fremden erfüllte, kann es mir nur zur Pflicht auferlegen, genanntem Herrn hiermit auch öffentlich den Ausdruck tief empfundenen Dankes darzubringen.

Die Abhandlung von F. W. V. Lach, „Beitrag zur orientalischen Sternkunde, der Vollständigkeit wegen, mit einer möglichst genauen Anführung aller Sternnamen verbunden (Allgemeine Bibliothek der biblischen Literatur von Johann Gottfried Eichhorn, VII. Bd.; Leipzig 1795 bis 1797. Kl. 8°.)", betitelt, und die „Untersuchungen über den Ursprung und die Bedeutung der Sternnamen. Ein Beitrag zur Geschichte des gestirnten Himmels von Ludewig Ideler (Berlin 1809, 8°, X, LXII, 452 S.)" — waren die Schriften, die in erster Linie zu Rathe gezogen werden mussten; die Folge hat gelehrt, dass sie mir fast ausschliesslich die Hilfsmittel lieferten, deren ich für meine Zwecke bedurfte.

In der Einleitung hebt Lach die Bedeutung des, im Museum des Cardinals Borgia in Velletri aufbewahrten, kufisch-arabischen Himmelsglobus für die Kenntniss der arabischen Sternbilder hervor und bespricht im Anschluss hieran Assemanni's Publication (Globus coelestis cufico-arabicus Veliterni musei Borgiani a Simone Assemanno illustratus. Patavii MDCCXC. 4°.) über dieses alte Kunstwerk. Seine Kritik ist nicht ganz frei von Tadel und, man muss es zugeben, von gerechtem. Der Globus wurde, wie eine Aufschrift auf ihm besagt, in Aegypten um das Jahr 1225 von einem gewissen Caesar, von dessen Lebensumständen nichts Näheres bekannt geworden ist, verfertigt; er ist aus gelblichem Metalle, hat einen Durchmesser von ungefähr 219 mm, trägt zwei silberne Aufschriften und enthält die Sterne, von denen die Namen der wichtigsten derselben gleichfalls in Silber ausgeführt sind, bis zur fünften Grösse in erhabener Silberarbeit. Die wenig kunstvoll entworfenen Sternbilder haben doppelte, in den Zwischenräumen mit rother Farbe ausgefüllte Umrisse und zeigen — eine alte arabische Sitte — die Eigenthümlichkeit, dass alle Figuren in einer, mit dem Gesichte von der Kugelfläche abgewandten Stellung verzeichnet sind, wodurch, gegen unsere Auffassung, stets eine Vertauschung von rechts und links hervorgerufen wird.

Ideler stützt sich hauptsächlich auf die Gestirnbeschreibung in den arabisch geschriebenen Naturwundern des Persers Zacarijjâ ben Mahmud el-Kazwini, die er, nach einem Berliner Codex, sowohl in der Uebersetzung, als auch in der Ursprache veröffentlicht. Dieser Perser, gebürtig aus Kazwin, einer etwa 18 deutsche Meilen südlich vom Kaspischen Meere gelegenen Stadt des nördlichen Persiens, des sogenannten Gebirgslandes (ḅelad el-ǵebâl), gestorben 1283, lebte gleichzeitig mit einem, um Mathematik und Astronomie sehr verdienten Gelehrten aus Ṭus, der unter seinem Beinamen, Naṣîr Eddîn, am bekanntesten ist. Neben jener Urkunde leistete Ideler auch der, im Mathematischen Salon zu Dresden aufbewahrte, arabische Himmelsglobus mit durchweg kufischer

Schrift, deren Alphabet Ideler mittheilt, wesentliche Dienste. Letzterer, eine messingene Hohlkugel von 144 mm Durchmesser, wurde im Jahre 1279 (oder 1289?) zu Maraga von Muḥammed, dem Sohne des Muwajid el-Ardi, verfertigt und mehrere Male beschrieben, zuerst 1808 von Beigel, dann 1866 von Schier und endlich 1873 (in Karten und plastischer Nachbildung seitdem im Buchhandel käuflich) von Drechsler.

In den Transscriptionen der einzelnen Sternnamen, zu denen ich nunmehr übergehe, bedeutet:

d̲ ein lispelndes *d*, ähnlich dem engl. *th* in *the*, *this*, *that*;
ǵ das italienische *g* vor *e* und *i*;
ġ ein schnarrendes gutturales *r*;
ḥ einen sehr scharfen, aber glatten Kehlhauch;
ẖ das deutsche *ch* in Rache;
ḳ ein gutturales, mit Nachdruck gesprochenes *k*;
r ein mit der Zunge ausgesprochenes *r*;
ś das deutsche *sch*;
ṭ das mit Nachdruck ausgesprochene *t* des oberen Gaumens;
z das französische *z*.

Algenib (γ Pegasi) entweder aus جناح الفرس, ǵenâḥ el-feres, Flügel des Pferdes, oder aus الجنب, el-ǵenib, *latus*, entstanden.

Achernar (α Eridani) aus آخر نهر, aẖir nahar, Ende des Flusses (ἡ ἄκρα τοῦ ποταμοῦ).

Algol (β Persei). Im Arabischen heisst Perseus der, den Kopf des Dämons, das Medusenhaupt Tragende. Aus letzterem wurde später رأس الغول, râs el-ġol, Teufelskopf.

Aldebaran (α Tauri) aus الدبران, ed-debarân, *quod pone est*. Gemeinschaftlicher Name der sechs am Vorderkopfe des Stieres kenntlichen Sterne γ, δ, θ, α, ε, τ.

Rigel (β Orionis), das einzige Wort, das sich aus dem vollen Namen رجل الجوزاء اليسرى, riǵl el-ǵauzâ el-jusra, *pes Orionis sinister*, der linke (rechte) Fuss des Orion, erhalten hat.

Beteigeuze (α Orionis) aus يد الجوزاء, jed el-ǵauzâ, *manus Orionis*, hauptsächlich durch Verwechselung von *j* mit *b* hervorgegangen.

Canopus (α Argus) heisst im Arabischen سهيل, suhêl, *facilis in deminutivo a radice* سهل, sahala, *planus*, *facilis fuit*. „Der griechische Κάνωβος, wofür sich auch, besonders bei den Römern, Canopus findet, gehörte nach Strabo, ebenso wie Πλόκαμος Βερενίκης,

Haupthaar der Berenice (Gemahlin des ägyptischen Königs Ptolemaeus Euergetes), zu denjenigen, welche damals erst *ἐχθὲς καὶ πρώην*, vor nicht langer Zeit, eingeführt waren. Eratosthenes und Hipparch gebrauchen ihn schon. Eudoxus sagt dafür *Πηδάλιον*, das Steuerruder. Ob und welchen Bezug der Name Canobus auf den Gott und die Stadt gleichen Namens in Unterägypten am westlichen Ausfluss des Nil hat, ist uns unbekannt. (Ideler.)"

Sirius (α Can. maj.) hat den Namen شِعْرَى, śi'ra; eigentlich Sirius Jemanensis, weil er den Arabern in der Gegend Südarabiens unterzugehen schien, während sie Procyon (α Can. min.) Sirius transiens, den, einer Fabel zufolge, durch die Milchstrasse fliehenden Sirius nannten. Zusammen heissen sie bei ihnen الشِّعْرَيَانِ, eś-śi'rajân, die beiden Sirii.*

Spica (α Virginis). Weil der hellste Stern in der Jungfrau an der Aehre in ihrer linken Hand steht, wird er in dem astronomischen Gedichte des Aratus (siehe die Schlussbemerkungen) und von allen Späteren *Στάχυς*, *spica* (*spicum* bei Cicero), Aehre, genannt. Bei den Alten kommt das Sternbild, ausser seinem eigentlichen Namen: *Παρθένος*, virgo, unter den mythischen, Astraea und Erigone, vor. Nach einem Mythus im Aratus nämlich lebte *Δίκη*, Justitia, gewöhnlich Astraea genannt, im goldenen Zeitalter unter den Menschen, zog sich im silbernen von ihnen zurück und verliess sie im ehernen endlich ganz, um fortan unter den Sternen ihren Wohnsitz aufzuschlagen. Bei den Arabern heisst nicht nur dieser Stern, sondern auch das ganze Bild, oder ehemals von ihm ausgefüllte Zeichen السُّنْبُلَة, es-sunbela, die Aehre, während العَذْرَآء, el-ádrâ, die Jungfrau bedeutet.

Mizar (ζ Urs. maj. pr.) stammt möglicherweise von مِئْزَر, mîzâr, Gürtel, subligaculum, her.

Wega (α Lyrae) ist das entstellte letzte Wort in النَّسْرُ الْوَاقِع, en-nasr el-wâki', der fallende Geier (oder Adler).

---

* Ideler wirft die Frage auf, ob Sirius und Śi'ra nicht aus Einer Quelle, und zwar aus einer orientalischen, geflossen sein möchten? Die Vermuthung, dass *Σείριος* (heiss, brennend, von der Sonnenhitze, als Substantiv den Hundsstern bedeutend) ein der griechischen Sprache ursprünglich fremdes Wort sei, ist schon lange vor ihm von Anderen ausgesprochen worden.

Altair (*α* Aquilae) behalten aus النسر الطائر, en-nasr et-ṭâir, der fliegende Adler. Ausser diesem und dem vorhergehenden, haben die Araber noch einen dritten, den gemeinen oder Hasenadler, عقاب, ókâb, *aquila nigra leporaria.*

Fomalhaut (*α* Piscis australis) ist wieder nur ein Theil des vollen Namens فم الحوت الجنوبي, fum el-ḥaut el-ǵenûbî, Maul des südlichen Fisches.

Markab (*α* Pegasi) hat sich ganz unverändert erhalten, denn das arabische Wort lautet ebenso مركب, markab, *ephippium vel equitandi locus.* Kann als Sattel genommen werden.

Den voraufgehenden Sternnamen füge ich noch zwei, wenigstens den Astronomen interessirende, arabische Worte hinzu, nämlich:

المقنطرات, al-muḳanṭarât, ein kleiner, dem Horizont paralleler Kreis der Himmelskugel. Das Stammwort ist ein *verbum quadriliterum*, قنطر, ḳanṭara, *opes possedit per talenta*, oder besser *coacervavit*, er hat aufgehäuft.

المنح, al-minaḥ, die Geschenke. Hiervon kann möglicherweise unser Almanach abstammen, da die orientalischen Astronomen am Neujahrstage ihre Kalender als Geschenke ausgetheilt haben sollen — allerdings eine mehrfach angefochtene Ableitung. Mit dem arabischen Worte für Kalender hat jedoch Almanach nichts zu thun.

Nur der Vollständigkeit halber gebe ich meinen Zeilen noch den folgenden kleinen Appendix mit auf den Weg:

Ἀρκτοῦρος, **Arcturus** (*α* Bootis), und *Ἀρκτοφύλαξ*, Bärenhüter, sind Synonyma, da *οὖρος* und *φύλαξ* Wächter bedeuten.

Das Sternbild des Wagenlenkers, Auriga, hiess bei den Griechen *Ἡνίοχος*, der Zügelhalter, wurde auch von den Römern so (Heniochus) genannt. Die Bezeichnung des hellsten Sternes darin mit dem Namen **Capella** (*α* Aurigae) drückt das Deminutiv von *Capra*, Ziege, Geiss, aus, unter welch' letzterer Benennung er bei **Cicero** und **Horaz** vorkommt.

Hinsichtlich des Namens **Antares** für *α* Scorpii wäre zu bemerken, dass, nach **Ideler** (und dem Lexikon), die Präposition *ἀντί* in der Zusammensetzung ein Stellvertreten, auch Gegenstück zu etwas bedeuten kann, somit *Ἀντάρης* soviel sagen will, wie: *τῷ Ἄρει* (*Ἄρης* appellativisch für Krieg, Mars) *τὴν χροιὰν ὅμοιος*, dem Mars an Farbe ähnlich Das *Ἀντάρης* beim Sophocles, das Missdeutungen hervorgerufen hat, soll *ἀντήρης*, gegenüberstehend, feindlich heissen.

Das oben angeführte, *Φαινόμενα* betitelte, astronomische Gedicht des **Aratus** ist so ziemlich die älteste Quelle, aus der wir sichere Kunde vom Zustande griechischer Gestirnbeschreibung schöpfen können, insofern es als Reproduction eines gleichnamigen Werkes von **Eudoxus** aus Cnidus gilt, dessen beide astronomische Schriften uns nur noch in wenigen Bruchstücken erhalten sind.* Der Verfasser (*Ἄρατος*), Arzt und Grammatiker, lebte ungefähr 100 Jahre nach **Eudoxus**, also etwa 270 vor Chr., am Hofe des Königs Antigonus von Macedonien und schrieb auf des Letzteren Veranlassung sein Gedicht, von dem **Ovid** sagt: *cum sole et luna semper Aratus erit.* **Cicero** übersetzte es in's Lateinische.**

Eingabe Johann Kepler's an Kaiser Rudolf II. um Ertheilung eines Generalprivilegs für den Druck seiner Werke (1606 vor März 3).

Mitgetheilt

von Dr. R. Doebner,

Archivar in Hannover.

Augustissime Romanorum imperator,
Hungariaeque et Bohemiae rex etc.

Domine clementissime: S. C. Mti Vestrae humilima cum veneratione in memoriam revoco supplicationem meam, ante multum tempus traditam: qua Sam Cam Mtem Vram subjectissime oravi: ut me Suum Mathematicum, meaque opera Mathematica, quibus perficiendis Mtis Vrae jussu incumbo (quatenus ea nihil contra Imperatoriam Majestatem, Ecclesiam Catholicam aut Bonos mores contineant) Generali aliquo Privilegio in annos aliquam multos (quod requirere

---

* Die andere hiess *Ἔνοπτρον*, Spiegel.

** Noch ein Paar Zeilen seien mir über die Etymologie von vier Worten hinzuzufügen gestattet, welche der Astronom und Geodät fast täglich im Munde führt:

Aus سَمْتُ ٱلرَّاسِ, semt ar-râs, Gegend des Kopfes oder Scheitels, ist Zenit entstanden, indem man *ni* statt *m* las und den Genitiv, ar-râs, wegliess.

أَلنَّضِير, en-nadîr, drückt eine Wechselseitigkeit im optischen Sinne aus, wie von zwei entgegengesetzten Punkten: der eine sieht den andern an. Hieraus *punctum oppositum,* Fusspunkt, Nadir.

أَلسَّمْت, as-semt: die Richtung, ist wahrscheinlich von den Spaniern in Azimut umgewandelt worden.

Unser Alhidade kommt von أَلْحِدَاد, al-ḥidâd: Grenzmesser.

videntur Tabulae Astronomicae, Ephemerides et similia) contra damnosas Typographorum imitationes et descriptiones praemunire clementissime dignaretur.

Etsi igitur S^{ae} C^{ae} M^{ti} V^{rae} nullum tempus praescribere possum: urget me tamen praesens occasio, qua Bibliopolae ad Nundinas Francofurtenses proficiscuntur: quibuscum de excudendo tractatu meo de nova stella (quem ex eo tempore, quo illa disparuit, adornavi) ut libenter contraherem, ita commode contrahere vix possum quantisper hoc S^{ae} C. M^{tis} V^{rae} privilegio non fuero munitus.

Ut igitur hoc qualecunque scriptum, quod S^{ae} C^{ae} Mtis V^{rae} honori et publicis usibus consecravi, tanto maturius prodeat, S^{am} C. M^{tem} V^{ram} quam subjectissimę oro: ut super hac mea supplicatione, pro generali privilegio instituta, clementissimam suam voluntatem declarare meque hujus suae gratiae, quae meis studiis tantopere est necessaria, denique participem facere dignetur.

S^{ae} C^{ae} Mti V^{rae} me ad omnia justissimae subjectionis obsequia, uti sum obstrictissimus, ita paratissimum et fidelissimum offero.

S^{ae} C^{ae} M^{ti} V^{rae}
subjectissimus et
fidelissimus Mathematicus
Joannes Kepplerus.

Adresse auf der Rückseite des zweiten Blattes von Kepler's Hand:

Ad Sacram Caesaream Majestatem
Joannis Keppleri Mathematici humilima supplicatio.

Dazwischen von einer Kanzleihand:

Ad cons[ilium] Aulicum.

Von derselben Kanzleihand steht oben auf der Rückseite:

3. *Marcii* 1606. *Kepplerus Joannes Mathematicus Caesaris pro impressorio operum suorum Mathematicorum quatenus nihil contineant contra Mtem Imperialem,, fidem catholicam, bonas mores.*

Darunter von einer anderen Hand:

Detur privilegium ad 15 . *annos.*

Die oben mitgetheilte Originaleingabe Kepler's an den Kaiser gelangte aus der kaiserlichen Kanzlei vermuthlich in Folge der Erstürmung der Kleinseite von Prag im Jahre 1648 (vergl. Ersch & Gruber's Encyklopädie, I. Bd. 37, S. 404) in die Hände des als Sammler bekannten schwedischen Erbkämmerers des Herzogthums Bremen, Alexander Erskin († 1656), dessen Nachlass später als sogenanntes Reichsarchiv bei der Landdrostei zu Stade verwahrt wurde und von da in das Staatsarchiv zu Hannover kam.

Recensionen.

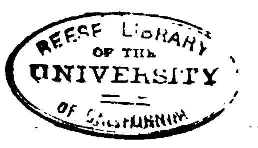
Die Berechnung irrationaler Quadratwurzeln vor der Herrschaft der Decimalbrüche. Von KARL HUNRATH. Kiel 1884, bei Lipsius & Fischer. 56 S.

Wir haben Bd. XXIX dieser Zeitschrift, hist.-lit. Abth. S. 45—47 über ein Programm des gleichen Verfassers berichtet, welches mit dem Ausziehen der Quadratwurzeln bei Griechen und Indern sich beschäftigte. In unserer heutigen Vorlage knüpft Herr Hunrath auf den ersten 26 Seiten an die Besprechung inzwischen erschienener Abhandlungen eine neue Auseinandersetzung seiner eigenen Meinung. Dann folgen in kurzer Uebersicht die Quadratwurzelausziehungen der Araber und auf diese (S. 29—36) ein Leonardo von Pisa gewidmetes Capitel, in welchem namentlich der Auszug aus der Practica geometriae von Interesse ist, der die Wurzeln von benannten Zahlen betrifft. In dem nun sich anschliessenden Capitel verfolgt der Verfasser die alten Methoden auch bei Schriftstellern bis zum XVI. Jahrhundert, wo allmälig und ziemlich gleichzeitig an verschiedenen Orten in vielleicht von einander unabhängiger Weise die Decimalbrüche sich einbürgern. Eine Nachschrift (S. 51—56) dient zur Auseinandersetzung mit einem Aufsatze von H. Heilermann in der Zeitschr. f. mathem. u. naturw. Unterricht XV, 81 flgg., welcher Hunrath erst während des Druckes dieses seines eigenen Schriftchens bekannt wurde.

CANTOR.

Die Erdkunde bei den Kirchenvätern. Vortrag, gehalten in der italienischen geographischen Gesellschaft zu Rom am 12. März 1882 von Dr. G. MARINELLI, Professor an d. Universität Padua. Deutsch von Dr. LUDWIG NEUMANN, Professor am Gymnasium Heidelberg. Mit einem Vorworte von S. GÜNTHER. VIII, 87 S. Leipzig 1884, bei B. G. Teubner.

Wenn auch der Gegenstand des Vortrags, von dessen Uebersetzung wir reden wollen, nur in entfernter Beziehung zu Titel und Richtung dieser Zeitschrift steht, wenn andererseits Referent eben jenem Gegenstande zu fern steht, um mehr als nur objectiv berichten zu können, so glauben wir doch unsere Leser auf das Schriftchen mindestens aufmerksam machen zu sollen, das in Herrn Neumann einen sprachgewandten



Uebersetzer, in Herrn Günther einen bevorwortenden und befürwortenden Fachmann gefunden hat, und welches ebenso anziehende, als belehrende Mittheilungen über drei ziemlich lose mit einander verbundene Dinge enthält. Ein erstes Capitel (S. 5—36) beschäftigt sich mit Reisen und Entdeckungen, ein zweites (S. 36—63) mit kosmographischen Vorstellungen, ein drittes (S. 63—87) mit der Kartographie der Kirchenväter. Im Grossen und Ganzen versteht der Verfasser unter Kirchenvätern die christlichen Schriftsteller bis etwa zum Jahre 1000; im dritten Capitel jedoch geht er viel tiefer, bis zur Mitte des XIV. Jahrh. hinab. Mehrfache Holzschnitte unterstützen das ohne dieselben ziemlich schwierige Verständniss jener mittelalterlichen Erdanschauungen, in die wir uns kaum mehr hineinzudenken wissen und deren zähes Leben uns dadurch nur noch eigenthümlicher vorkommt.

CANTOR.

Das Bildungswesen des Mittelalters. Scholastik, Universitäten, Humanismus. Von Dr. LORENZ VON STEIN. 2. Aufl. Stuttgart 1883, bei J. G. Cotta. XVII, 541 S.

Der uns zur Besprechung vorliegende Band gehört einem sehr umfassenden Werke über Verwaltungslehre an, dessen einzelne Theile, Abtheilungen, Hauptgebiete u. s. w. wir hier nicht zu erwähnen haben. Nicht einmal den ganzen in der Ueberschrift genannten Band dürfen wir zu unserem Berichte verwenden, wenn wir auch mit hohem Genusse ihn durchlesen haben. So gar Vieles in demselben betrifft Dinge, in denen Referent vollständig Laie ist und nur kritiklos das Gelesene zu wiederholen im Stande wäre. Wenn wir also nur „einen Theil des Theils, der früher Alles war“ besprechen dürfen, um ein eigenes Urtheil daran zu knüpfen, so ist es doch genügend, um der Zuversicht Worte zu verleihen: es werde auch in den Gebieten, die dem Verfasser als Nationalökonomen am nächsten lagen, der Fachmann ebenso geistvollen und interessanten Untersuchungen begegnen, wie in den uns vorzugsweise fesselnden Abschnitten. Ein Grundgedanke zieht sich als rother Faden durch das ganze Werk: die Völkerwanderung trennt die alte von der neueren Zeit. In ihr fand die Begegnung des germanischen Geistes mit der schon hochentwickelten hellenischen Cultur statt, eine Begegnung, die, als Ehe betrachtet, einen Sprössling gebar von wunderbarer Art: die europäische Gesittung. Mag auch das Europäerthum da und dort anders gestaltet erscheinen, mag es da und dort sich weiter entwickelt haben, ein allgemeiner Familienzug bleibt überall zu erkennen, wenn man ihn nur richtig zu suchen weiss, und diesem typischen Zuge nachzuspüren, ihn namentlich in dem Bildungswesen des Mittelalters, als welches das ganze Jahrtausend etwa von 500 bis 1500 nach Chr. Geb.

aufgefasst wird, nachzuweisen, ist die Riesenaufgabe, an deren Lösung Herr v. Stein sich gewagt hat. Er lässt vor unseren Augen die Schule entstehen in ihrer doppelten Abart, wurzelnd einestheils als Klosterschule in dem Verbande, den die Kirche für Europa darstellte, anderntheils als Kathedralschule dem Staatsgedanken Karl des Grossen entstammend. Hier wie dort ist die lateinische Sprache Schulsprache, hier wie dort bleibt das Uebergewicht dieser Sprache erhalten, auch nachdem die Gründe nicht mehr obwalten, welche ihre Einführung bedingten. Noch heute hat die katholische Kirche, hat das Gymnasium einen wesentlich lateinischsprachlichen Anstrich. Die Schule erhebt sich von den fast weniger als niedrigen Gegenständen, die ursprünglich an ihr gelehrt wurden, zu höheren. Die Latinität wird bald selbst Zweck, bald Mittel zum Zwecke. Philosophische Richtungen spalten sich von einander und aus ihrem Kampfe geht Gewinn für sie alle hervor. Die Philosophie wird, wie das Trennende, so auch das Einigende zwischen den allmälig hervortretenden Berufsgelehrten. Deren Bildungsstätte nicht weniger als deren Wirksamkeitsmittelpunkt sind die Universitäten, und diese selbst verändern im Laufe der Zeiten vielfach Charakter und Ursprung. Die ersten europäischen Universitäten in dem von Herrn v. Stein benutzten Sinne dieses Heimathnamens entstehen; es ist gleichsam eine spontane Geburt, die sich vollzieht durch Herumlagerung von Schülern um einen oder mehrere berühmte und beliebte Lehrer als Kern der Ansammlung; es ist mehr eine Universitas der Lernenden als der Lehrenden. Die späteren Universitäten werden gegründet; Rechte werden denselben verliehen, Pflichten auferlegt; sie sind Anstalten der Kirche wie des Staates; die Gemeinschaft der Lehrer neben oder über der der Lernenden giebt ihnen das unterscheidende Gepräge. Wir wissen wohl, dass wir nur einige Schlagwörter ausgesprochen haben, zu denen wir noch hinzufügen müssen, dass Herr v. Stein ganz besonderes Gewicht auf die Erklärung des sogenannten Humanismus legt, dessen Offenbarungsweise in den verschiedenen Wissenschaften eingehend geschildert worden; aber das Alles will selbst gelesen sein, und wir hoffen durch unsere Worte zur Empfehlung des Bandes mitgewirkt zu haben.

Es sei uns gestattet, einen einzigen Punkt hervorzuheben. Nicht als ob es sich um ganz besonders Wichtiges handelte; aber wir benutzen diese Gelegenheit, eine uns zur Verfügung gestellte Notiz zu veröffentlichen. S. 77 und 243 ist von dem bekannten Tagebuch des Walafried Strabo die Rede, welches in einem Einsiedler Programm abgedruckt ist. Der Verfasser des Programms, Pater Martin Marty (vergl. des Referenten Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I, 723), wurde schon seit geraumen Jahren auch für den Verfasser des Tagebuchs gehalten, dessen Inhalt er aus allgemein zugänglichen Quellen zusammengestellt habe. Gewissheit war aber darüber nicht vorhanden, bis Professor Dr.

H. Suter in Aarau sie verschaffte. Er ermittelte durch Herrn Rector Kühne in Einsiedeln, dass P. Marty sich als Bischof und apostolischer Vicar zu Yankton im Dakota-Territorium in Nordamerika befinde, und schrieb ihm an diese Adresse, worauf er folgende Antwort erhielt, welche wir, wie bemerkt, veröffentlichen dürfen:

„Verehrter Herr! Ich muss sie um Verzeihung bitten für die Mühe, die ich Ihnen verursacht habe. Der Aufsatz war für Studenten geschrieben, nicht für Gelehrte. Ich glaubte berechtigt zu sein, die in Strabo's Autobiographie gegebenen Andeutungen aus Cassiodor, Alcuin und Beda zu vervollständigen. Vielleicht könnte es anderen Männern, deren Zeit kostbar ist, zu Nutzen kommen, wenn Sie dies in einer Anmerkung irgendwo bekannt geben wollten. In der Hoffnung, dass Sie mir nicht zürnen, grüsst Ihr ergebener M. Marty. Fort Yates, Dakota-Terr., Febr. 9, 1883."

Damit wäre hoffentlich die Versuchung beseitigt, aus jenem geistvoll erfundenen Tagebuche Beweismaterial entnehmen zu wollen, welches es nicht gewähren kann.

CANTOR.

System der Chronologie, unter besonderer Berücksichtigung der jüdischen, römischen, christlichen und russischen Zeitrechnung, sowie der Osterrechnung, als Beitrag zur Culturgeschichte insbesondere für Historiker, Philologen, Theologen und Freunde der Astronomie, sowie für Gebildete aller Stände gemeinverständlich dargestellt von F. J. BROCKMANN, Oberlehrer am königl. Gymnasium zu Cleve. Stuttgart 1883, Verlag von Ferdinand Enke. VII, 112 S.

Wenn ein Gegenstand, der vor beinahe 60 Jahren einem Gelehrten vom Range Ideler's Stoff zu zwei dicken Bänden gab, heute, nachdem auch auf chronologischem Gebiete manche neue Entdeckung gelungen ist, auf 7 Druckbogen abgehandelt wird, so lässt sich zum Voraus errathen, dass Vollständigkeit nicht erreicht, ja nicht einmal erstrebt sein kann. Und so ist es auch. Herr Brockmann hat nicht für Chronologen von Fach oder für Solche, die sich dazu ausbilden wollen, geschrieben; der Leserkreis, an den er sich wendet und den er in dem ziemlich langathmigen Titel genau genug bezeichnet, ist ein viel weiterer, und sollte für ihn nicht ein Nachschlagewerk, ein vollständiges Handbuch, sondern ein leicht lesbares Büchlein geschaffen werden, das unter Umgehung der feineren Streitfragen die Dinge kennen lehrte, die zu wissen auch vielen Nichtchronologen wünschenswerth oder nothwendig ist, dann musste der Kürze, wie der Verständlichkeit mehr als nur ein Opfer gebracht werden. Referent ist selbst hinreichend Laie auf chronologischem Gebiete, um die Fasslichkeit der Brockmann'schen

Darstellung vollauf würdigen zu können. Andererseits haben uns unsere mit chronologischen Dingen sich häufig berührenden geschichtlichen Arbeiten hinreichend mit den Hauptaufgaben bekannt gemacht, über die wir bei Ideler hauptsächlich uns Rath suchen mussten, um beurtheilen zu können, wie weit das neue Schriftchen uns jenes Nachschlagen erspart haben würde. Nach beiden Richtungen können wir Herrn Brockmann's Zusammenstellung empfehlen. Sie behandelt insbesondere das Julianische Jahr und dessen Uebergang zum Gregorianischen, sowie die christliche Osterrechnung in leicht verständlicher Weise und so, dass der Leser wenigstens sieht, worauf es bei den zum Theil geschichtlich so merkwürdigen Streitigkeiten über diese Dinge wesentlich ankam. Unter den Lücken, welche nothwendig vorhanden sein müssen, ist vielleicht die gänzliche Nichtbeachtung der islamitischen Zeitrechnung bedauerlich. Auch ein alphabetisch geordnetes Inhaltsverzeichniss würde sich als willkommen erwiesen haben.

CANTOR.

Zur Erinnerung an die Gregorianische Kalenderreform (October 1582). Vortrag von GUSTAV SCHUBRING, gehalten zu Erfurt im October 1882. Halle a. S. 1883. 25 S.

Anknüpfend an die ausführlicheren Arbeiten der Herren Kaltenbrunner und Stieve, hat der Verfasser in kurzer, aber ungemein klarer und durchsichtiger Weise in einem Vortrage, zu welchem die Säcularerinnerung an die Gregorianische Kalenderreform die Veranlassung bot, gezeigt, wie die christliche Chronologie wesentlich mit der Einrichtung von in unzähligen Exemplaren verbreiteten Messbüchern und dergleichen in Zusammenhang stand, die es galt nicht auf einen Schlag unbrauchbar zu machen, während andererseits eine Uebereinstimmung des bürgerlichen mit dem astronomischen Jahre wiederhergestellt werden sollte, die allmälig verloren gegangen war. Das war die grosse Schwierigkeit, deren man vor nun 300 Jahren Herr wurde und zu deren Beseitigung man freilich, wie Herr Schubring richtig hervorhebt, auf weniger gewaltsame Weise mittels Unterdrückung der Julianischen Schalttage in einem 40jährigen Zeitraum hätte gelangen können, wenn die ebenso reformlustige, als reformbedürftige Gesinnung des XVI. Jahrhunderts das Wagniss gestattet hätte, mit Aussicht auf Erfolg den langsameren Weg allmäliger Besserung einzuschlagen.

CANTOR.

Histoire des sciences mathématiques et physiques par M. MAXIMILIEN MARIE, répétiteur de mécanique, examinateur d'admission à l'école polytechnique. Tome III: De Viète à Descartes. 230 pages. Paris. Gauthier-Villars, imprimeur-libraire. 1884.

Dieser III. Theil des Werkes, über dessen beide ersten Theile wir Bd. XXIX, hist.-lit. Abth. S. 43—45 berichtet haben, ist in einigen Beziehungen jenen vorzuziehen, in anderen gleicht er ihnen leider. Wie dort, finden sich auch hier geradezu falsche Angaben in unerlaubter Menge, sind klaffende Lücken zu beklagen, um so klaffender, als Namen aufgenommen sind, die, wenn sie fehlten, niemand in einer Geschichte der mathematischen und physikalischen Wissenschaften vermissen würde. Ungleich den ersten Theilen, sind aber doch wenigstens einige Schriftsteller so behandelt, dass man erkennt, Herr Marie hat dieselben studirt und mit Freuden studirt Er hat in ihren Geist einzudringen gesucht und aus ihnen herauszulesen — manchmal vielleicht in sie hineinzulesen — gewusst, was die geschichtliche Grösse der Verfasser ausmacht.

Vor Allen ist es Vieta, den Herr Marie dadurch, dass er ihm genau zwei Neuntel des ganzen Theiles (S. 6—19 und 27—65) widmet, auch äusserlich als den geistigen Helden darstellt, vor dessen Grösse fast alle anderen zurücktreten. Nur Galilei (S. 102—140), Kepler (S. 150 bis 166), Desargues (S. 201—225) sind mit annähernd gleicher Ausführlichkeit behandelt, eine Auswahl, mit welcher man sich im Allgemeinen einverstanden erklären kann. Das grösste Gewicht legt Herr Marie — und auch damit sind wir einverstanden — auf Vieta's Betonung des Homogeneitätsgesetzes. Vieta ist der geometrischste aller Algebristen gewesen. Sein *ducere in*, sein *applicare ad*, welches Herr Marie sehr richtig dem vorher üblichen *multiplicare* und *dividere* gegenüberstellt und für das erste Wort sogar die Neubildung *duire* im Französischen sich gestattet, sind gewiss mehr als nur neue Wörter gewesen. Es waren Begriffe, die freilich weder von Zeitgenossen, noch von Nachfolgern ge nügend gewürdigt worden sind. Ein weiteres Verdienst erkennen wir darin, dass Herr Marie dem Gedankengange nachforscht, der Vieta zur Substitution $x = \frac{p^2}{y} - y$ führt, mittels deren er die Gleichung $x^3 + 3p^2x = 2q^3$ auflöst.

In anderen Dingen weicht unsere Meinung von der des Verfassers ab. Worauf fusst z. B. dessen Behauptung (S. 59), Vieta habe Ferrari's Auflösung der biquadratischen Gleichung wahrscheinlich nicht gekannt? Wir sind der entgegengesetzten Meinung und finden gerade ein hervorragendes Verdienst Vieta's darin, dass er für quadratische, für cubische und für biquadratische Gleichungen Auflösungen suchte, welche von den landläufigen sich unterschieden und eine gewisse Gemeinschaft unter sich dadurch an den Tag legten, dass sie alle drei auf Substitutionen neuer Unbekannten beruhten. Die Zetetica unterscheiden sich nach Herrn Marie (S. 43) dadurch von den Aufgaben des Diophant, dass in ihnen von Grössen, nicht von Zahlen die Rede sei. Ein Vergleich des 6. Buches Diophant's würde ihm Aufgaben gezeigt haben,

in welchen Dreiecksflächen und Dreiecksseiten in Rechnung kommen, allerdings unter Vernachlässigung der Homogeneität. Aber gerade dadurch gewinnen jene Aufgaben für Vieta's Geistesentwickelung an Bedeutung. Sie legen nahe, wie Vieta zur Betonung des Homogeneitätsgesetzes Veranlassung fand!

In dem Abschnitte über Galilei ist die Mechanik desselben ausführlicher erörtert, was wir nur billigen können. Dass S. 125 der Saggiatore mit dem Gespräch über die Weltsysteme verwechselt ist, mag nur einer der zahlreichen Druckfehler sein, welche stehen geblieben sind und unter welchen wir uns bereit finden lassen, auch den Henri de Rançon aus Wandesburg zu zählen, den S. 75 aus Heinrich von Ranzau in Wandsbeck gemacht hat, während die Angabe S. 180, Joh. Faulhaber habe sich vorzugsweise durch seine 1913 *(sic!)* deutsch veröffentlichten Récréations mathématiques hervorgethan, uns schon etwas zweifelhafter lässt. Auch 1613 hat Faulhaber ein Werk ähnlichen Titels nicht veröffentlicht, noch in einem andern Jahre. Vielleicht ist eine Verwechslung mit Schwenter's Deliciae mathematicae vorhanden? Faulhaber's Verdienste beruhen bekanntlich auf seiner Lehre von den Polygonalzahlen, die Herr Marie nicht anführt. Doch wir kehren zu Galilei zurück, um zwei Lücken auszufüllen, welche stören. Wir meinen einmal die Erfindung der Cycloide durch Galilei, die unter seinen Leistungen nicht fehlen durfte; wir meinen zweitens sein Verhältniss zu den Indivisibilien. Herr Marie sagt (S. 134), Galilei habe diese Methode sicherlich gekannt; Cavalieri, der überdies sein Schüler war, habe dieselbe 1635 veröffentlicht. Herr Marie thut hier Galilei Unrecht. Dieser war vielmehr von selbst und früher als Cavalieri zur Beachtung der Indivisibilien gelangt, wie z. B. aus einem von Campori 1881 veröffentlichten Briefe Cavalieri's selbst an Galilei vom 4. April 1626 hervorgeht.

Kepler's Gesetze mit der auf langathmige Rechnungen gegründeten Beweisführung werden gewürdigt und in das richtige Licht gestellt. Von seiner Stereometria doliorum wird S. 159 gesagt, sie habe einen gewissen Einfluss auf die Geometrie gehabt; die von Kepler ersonnene Methode sei das Vorspiel zur Erfindung des Infinitesimalcalculs, seine Idee fruchtbar gewesen. Wir würden etwas wärmerer Ausdrücke uns bedient haben, wo wir von einem Buche sprechen, das zuerst den Gedanken des Unendlichkleinen unverhüllt verwerthete. Wir würden nicht unterlassen haben, darauf hinzuweisen, dass Kepler auch dem Tangentenproblem sich näherte, dass er die erste inverse Tangentenaufgabe löste, dass er eine näherungsweise Rectification der Ellipse gab, dass er das sogen. Kepler'sche Problem den Mathematikern unterbreitete und in ihm eine transcendente Gleichung zur Lösung stellte — lauter Dinge, nach welchen man bei Herrn Marie vergeblich sucht.

Auch in dem Abschnitte, der Desargues gewidmet ist, möchte man die Hervorhebung eines Verdienstes leicht vermissen, welches Herr Poudra in seiner Ausgabe von Desargues' Werken geradezu an die Spitze stellt; Desargues habe gewusst, dass eine nach beiden Seiten ins Unendliche verlängerte Gerade nur einen unendlich fernen Punkt besitze. Herr Marie sagt davon Nichts, aber hier ist er im Rechte. Jener Satz steht auch nicht bei Desargues und dessen Herausgeber hat hier mit allzu moderner Brille gelesen.

Wir haben somit diejenigen Dinge besprochen, bezüglich deren wir mehr, als mit den früheren Bänden, mit dem letzterschienenen uns befreundet haben. Wir müssen daneben auch auf einige der gröbsten Irrthümer und der unbegreiflichsten Lücken hinweisen, von denen wir redeten. Bei Stevin ist vom Rechnen mit Decimalbrüchen Nichts gesagt, von welchem ungeheuren Fortschritte in der Arithmetik überhaupt kein Wort sich findet. Harriot soll zuerst Gleichungen auf Null gebracht haben (S. 93), während Burgi dieses früher that. Auch die abgekürzte Multiplication hat Burgi zum Erfinder und nicht Oughtred (S. 166). Von Vernier wird (S. 182) gerühmt, er habe eine Vorrichtung erfunden, welche mit der des Nonius Verwandtschaft zeige; von dem ersten Erfinder Clavius ist keine Rede. Vieta soll (S. 24) die Entstehung der Binomialcoefficienten gelehrt haben; das that aber vor ihm Michael Stifel und nach diesem Tartaglia. Der Apollonius batavus ist nicht von Willebrod Snellius verfasst (S. 199), sondern von dessen Vater. Im Eratosthenes batavus, der wirklich von Willebrod Snellius herrührt, ist zuerst die Aufgabe des Rückwärtseinschneidens behandelt, welche später die durchaus unberechtigte Benennung als Pothenot'sche Aufgabe erhielt. Bei Herrn Marie steht davon Nichts.

Wir wollen zum Schlusse nur noch eine Lücke ausfüllen, deren Vorhandensein wir Herrn Marie nicht verübeln. Erst allerneueste Forschungen von Herrn Paul Tannery haben hier Auskunft gegeben. Der bekannte Algebraiker Albert Girard nannte sich selbst Samielois. Woher war er? Rousseau in der Patria Belgica glaubte, Girard sei aus der Grafschaft Salm im Luxemburgischen gewesen. Samiens und Samiots nennen sich die dortigen Bewohner heutigen Tages; Samielois würde eine ältere Form darstellen. Ansprechender ist die von Herrn Tannery im Bulletin des Sciences mathématiques von Darboux u. s. w. veröffentlichte Behauptung, Saint Mihiel in Lothringen sei Girard's Heimathsort gewesen, der als Druckort von Büchern durch die Genetivform Samieli bis 1630 bezeichnet wird.

Cantor.

Festschrift zur fünfzigjährigen Gedenkfeier der am 5. Mai 1834 erfolgten Eröffnung der städtischen Realschule I. Ordnung zu Leipzig, von F. Giesel. 42 S. 4°. Leipzig 1884.

Seit 50 Jahren besteht die städtische Realschule I. Ordnung zu Leipzig. Seit 10 Jahren ist sie in einem eigens erbauten Hause untergebracht. Zur doppelten Gedenkfeier fügte Herr Giesel die dritte, indem er den gegenwärtig 200 Jahre alten Aufsatz, in welchem Leibnitz der erstaunten Gelehrtenwelt die neuerfundene Differentialrechnung verkündete, abdrucken liess, eine 14 Seiten füllende Einleitung vorausschickend, 21 Seiten Anmerkungen engeren Druckes anschliessend. Dürfen wir eine vierte Gedenkfeier mit dieser Anzeige verbinden, wenn sie auch nicht, wie die anderen, runder Erinnerungszahlen sich erfreut? Es sind 26 Jahre, dass Herr Giesel durch sein heute berühmtes erstes Programm über die Geschichte der Variationsrechnung uns auch persönlich nahe trat, dass wir in einer Besprechung desselben uns des neuen historischen Mitarbeiters freuen durften. Leider hat die aufreibende, zeitraubende Schulthätigkeit unserem verehrten Freunde nicht gestattet, sich wissenschaftlichen Eigenleistungen so oft zu widmen, als es ihm, als es der Wissenschaft lieb gewesen wäre. Um so mehr freuen wir uns der neuen Gabe, die er sich von andrängenden Lehrgenossen abringen liess. In der Einleitung bietet Herr Giesel einen auf den kürzesten Raum zusammengedrängten Abriss der Entwickelungsgeschichte der Mathematik bis zum XVII. Jahrhundert, d. h. bis zu der Zeit, in welcher man anfing, sich allgemein mit den Aufgaben zu beschäftigen, deren Lösung heute mittels des Infinitesimalcalculs erhalten wird. Er zeigt dann an je einem Beispiele Fermat's Methode der grössten und kleinsten Werthe, das von Sluse angegebene Tangentenverfahren, die Quadraturen des Wallis. Hier schliesst sich, der geschichtlichen Zeitfolge entsprechend, die sämmtliche Probleme umfassende Thätigkeit Leibnitzens an, in ihren Endzielen, aber nicht in ihren Mitteln mit Newton's Fluxionsrechnung sich begegnend. Vielleicht wäre dabei zu betonen gewesen, dass die mathematischen Hauptverdienste beider grosser Männer gar nicht in diesen Erfindungen liegen, welche, von langer Zeit vorbereitet, auch weniger genialen Persönlichkeiten hätten gelingen können. Für Leibnitz ist dieser Gedanke wenn nicht durchgeführt, mindestens angedeutet in Gestalt eines Lebensbildes, in welchem dessen einzelne mathematische Leistungen hervortreten. Dass in den Anmerkungen, welche dem unveränderten Abdrucke der Abhandlung von 1684 folgen, eine Fülle von Gelehrsamkeit niedergelegt ist, wird Niemandem unvermuthet sein, der Hrn. Giesel's frühere Arbeiten kennt. Uns sind dabei nur wenige, verhältnissmässig unbedeutende Irrthümer aufgestossen. Der Algorithmus demonstratus kann nicht, wie man früher annahm, von Regiomontanus herrühren, weil er bereits in dem bekannten Basler Codex F. II, 33

vorkommt, der im XIV. Jahrhundert geschrieben ist. Nach Herrn Treutlein's anmuthender Meinung dürfte Jordanus Nemorarius der Verfasser sein. Jordanus selbst ist nicht aus der Umgegend von Mainz gebürtig, sondern aus Mitteldeutschland, wenn auch seine Heimath der Diöcese Mainz zugetheilt war. *Fuit Teutonius de Saxonia, villa quae dicitur Borcberge in dioecesa Moguntia oriundus*, erzählt der Geschichtsschreiber des Predigerordens, und dieser Ort ist das heutige Borgentreich am waldreichen Eggegebirg, wodurch der Beiname Nemorarius gerechtfertigt ist, während der Vorname Jordanus in westphälischen Geschlechtern wiederholt vorkommt. Die sogenannten inversen Tangentenaufgaben endlich gehen bis auf Keppler zurück, der eine solche in seiner lateinischen Nova stereometria doliorum (Opera ed. Frisch, IV, 598) gelöst hat, wie Referent gelegentlich bemerkte.

Cantor.

Die Basler Mathematiker Daniel Bernoulli und Leonhard Euler, hundert Jahre nach ihrem Tode gefeiert von der Naturforschenden Gesellschaft zu Basel. Anhang zu Theil VII der Verhandlungen der Naturforschenden Gesellsch. zu Basel. Basel 1884, H. Georg's Verlag. 95 S.

Daniel Bernoulli starb zu Basel am 17. März 1782, Leonhard Euler zu St. Petersburg am 18. September 1783. Die Naturforschende Gesellschaft der Vaterstadt der beiden grossen Gelehrten hatte das Recht sowohl als die Pflicht, die hundertjährige Wiederkehr dieser Daten als Erinnerungstage zu begehen. Die Bernoullifeier fand dementsprechend am Samstag, 18. März 1882, die Eulerfeier, muthmasslich weniger Gewicht auf die Wahl des Tages, als auf Vermeidung der Universitätsferien legend, am Samstag, 17. November 1883 statt. Festreden hielten bei der ersteren Gelegenheit die Herren Fr. Burckhardt und Ed. Hagenbach-Bischoff, bei der zweiten ausser den Genannten auch Herr H. Kinkelin. Sämmtliche fünf Vorträge liegen gedruckt vor uns. Wer, mit der Geschichte der Wissenschaften vertraut, diese Gelegenheitsschrift durchliest, wird wohl nicht viel Neues finden, auch kaum solches erwarten, nachdem die Einzelforschung wiederholt mit beiden hervorragenden Schweizern sich beschäftigte. Ein solcher Leser wird vielleicht auch zu bemängeln wissen, dass Bernoulli's Verdienste um die Wahrscheinlichkeitsrechnung, Euler's zahlentheoretische Leistungen ohne ein Wort der Anerkennung geblieben sind. Wohlthuend wird er aber die Wärme der Farben empfinden, in welchen beide Lebens- und Charakterbilder entworfen sind. Um eben dieses Vorzugs willen darf man das Büchelchen Denen empfehlen, welche erstmalig eine Gesammtdarstellung dessen zu lesen wünschen, was Daniel Bernoulli, was Leonhard Euler, im Lichte unserer Zeit gesehen, für die Wissenschaften bedeuten.

Cantor.

Historische Studie über die Entwickelung der Grundbegriffe der Wärmefortpflanzung von Albert Riggenbach. Wissenschaftliche Beilage zum Bericht über das Gymnasium. Schuljahr 1883—84. Basel. 39 S. 4°.

Kaum ein anderer Theil der Physik hat in dem verhältnissmässig kurzen Zeitraum etwa eines Jahrhunderts so durchaus andere Gestalt angenommen, wie die Lehre von der Wärme. Liegt in dieser Thatsache ein Grund zur Zuversicht oder zur Beunruhigung? Dürfen wir hoffen, die Wissenschaft sei heute bei richtigen Grundgedanken angelangt, oder müssen wir befürchten, das Morgen werde über das Heute in gleicher Weise zur Tagesordnung übergehen, wie das Heute über das Gestern? Geschichtliche Forschung führt den Verfasser des Basler Gymnasialprogramms dahin, diese Furcht wenigstens einigermassen zu zerstreuen, indem er zeigt, dass die Wissenschaft denn doch nicht in jähen Umschwüngen, sondern in allmäliger Fortentwickelung sich bilde, dass eine grössere Stetigkeit thatsächlich vorhanden sei, als der bemerke, der nur Anfangs- und Endzustand, nicht aber die dazwischen liegenden Gestalten beobachte. In diesem Entwickelungssinne schildert uns Herr Riggenbach auf 17 Seiten Text und ebenso vielen Seiten „Zusätze“, d. h. beweisenden Zwischenuntersuchungen für das im Text beweislos Ausgesprochene, den Gang, den die Wärmelehre von Newton, Richmann, Lambert bis auf Fourier und dessen Nachfolger genommen hat. Wir wohnen der Entdeckung des Wärmemischungsgesetzes bei, sehen dasselbe, kaum gewonnen, bedroht durch die Mischung ungleicher Stoffe, gerettet durch den Begriff der latenten Wärme. Nun erscheint Pictet's, erscheint Prévost's Lehre von der Wärmestrahlung. Vergebens bekämpft Rumford ihre stoffliche Auffassung. Seine auf Bewegungserscheinungen gegründete Erklärung ist selbst noch nicht reif, findet auch keine reifen Schüler. Damit sie Anerkennung finde, muss erst der von Huygens vermuthete, inzwischen vergessene Aether durch Thomas Young neuerdings in seine Rechte eingesetzt werden; so lange die Emanationstheorie des Lichtes sich erhält, ist eine kinetische Wärmetheorie unmöglich. Und abgesehen von der Erklärung dessen, was Wärme ist, bietet ihre Fortpflanzung noch Räthsel über Räthsel. Wärmestrahlung, Wärmeleitung sind zwei durchaus verschiedene Arten, in welchen die Temperaturen der Körper sich untereinander ausgleichen. Erst Fourier's Wärmefluss hilft über die Schwierigkeiten dieses Gegensatzes hinaus. So die rohesten Umrisse des von Herrn Riggenbach gezeichneten Entwickelungsbildes. Es darf als ein wohlgelungenes bezeichnet werden, und insbesondere die Zusätze möchten wir allgemeinerer Kenntnissnahme empfehlen. Den Schluss bildet ein ausführliches Literaturverzeichniss.

Cantor.

Das Princip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte. Ein Capitel zur Grundlegung der Erkenntnisskritik. Von Dr. HERMANN COHEN, ordentlichem Professor der Philosophie an der Universität Marburg. Berlin, Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung. 1883. VII, 162 S.

Der Versuch, an der Hand der geschichtlichen Entwickelung in die Geheimnisse der vielfach sogenannten Metaphysik des höheren Calculs einzudringen, ist zweifellos ein allseitiger Billigung würdiges Unternehmen; Philosophen, Mathematiker und alle Naturforscher, die an der Klärung der Grundbegriffe ihrer Wissenschaft Interesse haben, sind gleichmässig an dem Wunsche betheiligt, dass jener Versuch ein gelungener sein möge. In der That haben wir es auch mit einer geistvollen und anregenden Schrift zu thun, deren Lecture aber — dies zu verschweigen haben wir keine Ursache — zumal dem Mathematiker kein leichtes Stück Arbeit bietet. Während nämlich in unserer Zeit die Philosophen dann, wenn sie sich auf dem Grenzgebiete ihrer eigenen Disciplin bewegen, die ihnen vertraute und geläufige Ausdrucks- und Darstellungsweise möglichst zu vermeiden oder doch den Gewohnheiten eines grösseren Leserkreises anzupassen bestrebt zu sein pflegen, tritt in unserer Vorlage das Rüstzeug der philosophischen Arbeit unverhüllt zu Tage. Wir haben kein Recht, hieraus dem Verfasser, der in erster Linie für seine Fachgenossen schreibt, einen Vorwurf zu machen, können aber das Bedauern nicht unterdrücken, dass eben durch jene Eigenthümlichkeit das Bekanntwerden und die Verbreitung des Cohen'schen Buches in jenen Kreisen, an welche diese unsere Besprechung sich richtet, erheblich erschwert werden dürfte.

Der eigentlich historischen Untersuchung, als dem Hauptbestandtheile der Schrift, geht eine orientirende Einleitung voraus. Der Verfasser erörtert das Wesen der Logik und der Erkenntnisslehre, zwischen welchen beiden Disciplinen er eine schärfere Grenzlinie gezogen wissen will, als dies andere Methodiker, z. B. Wundt, thun möchten, ja er wünscht sogar den Terminus „Erkenntnisstheorie" aus der Wissenschaft verbannt und dafür „Erkenntnisskritik" gesetzt zu sehen. Erkenntnisskritischer Erörterung unterliegt auch der Begriff des Infinitesimalen; man habe diesen Umstand, so meint der Verfasser, über der ebenfalls nicht hinlänglich klargestellten logischen Bedeutung des fraglichen Begriffes übersehen. Es soll mithin gezeigt werden, „dass jene vermisste logische Begründung des Differentialbegriffes in einem erkenntnisskritischen Grundsatze, und zwar in dem der Kategorie der Realität entsprechenden, somit in dem Grundsatze der intensiven Grösse oder der Anticipationen enthalten sei". Als vorbereitend erscheint dem Verfasser ferner eine Auseinandersetzung mit der Kant'schen Schule betreffs des Wesens der „Anschauung"; diese ist ihm die Beziehung des Bewusstseins auf ein Gegebenes oder besser auf ein Unbekanntes als Gegebenes. Sehr im

Rechte ist der Verfasser mit seiner Behauptung, dass der Differentialbegriff in letzter Instanz den mechanischen Problemen seine Formulirung zu danken gehabt habe; nicht minder wird man seiner Ehrenrettung der Descartes'schen Philosophie gegenüber den Dühring'schen Bemängelungen nur beipflichten können. Einen Wunsch, den der Verfasser auf S. 30 ausspricht, dass nämlich die Bedeutung der Kosmologie des Giordano Bruno für die Behandlung des Infinitesimalen zum Gegenstande besonderer Forschung gewählt werden möge, kann derselbe nunmehr bereits zu den erfüllten rechnen, da inzwischen eine ausgezeichnete Arbeit von Lasswitz über die Stellung des italienischen Naturphilosophen in der Geschichte der Atomistik (in der Vierteljahrsschrift f. wiss. Phil.) erschienen ist. Mit der in ihrer Art freilich ganz wohlbegründeten und nur eben leicht zu Missverständnissen Anlass bietenden Bemerkung aber, dass der Grenzmethode „alle schöpferische Positivität abgehe", wird Herr Cohen bei den Analytikern wenig Glück machen. Der Verf. verbreitet sich dann weiter über die kinematischen Umgehungsversuche des XVII. Jahrhunderts, über das Tangentenproblem, über die Wichtigkeit des limitirenden Urtheils gerade für die vorwürfigen Fragen, über den Continuitätsbegriff, dessen Ausbildung wesentlich gefördert zu haben, er als ein Verdienst Barrow's bezeichnet. Von diesem Lehrer Newton's, für dessen gründliche Würdigung man jedenfalls dankbar sein muss, schreitet die Darstellung fort zu Galilei, der allerdings, indem er zuerst die Definition der Beschleunigung und der gleichförmig beschleunigten Bewegung gab, für die scharfe Durchdringung und Verständlichmachung des Unendlichkeitsbegriffes das Grösste geleistet hat. Dies anerkennend und betonend, fährt unser Verf. fort (S. 47): „Es ist also keineswegs die „„Muskelempfindung"", welche Galilei bei diesem Grundgedanken leitet; mit solchen sinnlichen Exemplificationen am eigenen Leibe war der dichte Schleier nicht zu lüften, der über die ganze Natur ausgebreitet ist." Ohne dass es ausdrücklich gesagt wäre, scheint uns mit dieser Stelle eine Polemik gegen die bezüglichen Aussprüche von Dühring (Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik, 2. Aufl., S. 24) und Lasswitz (Atomistik und Kriticismus, S. 65) eröffnet werden zu sollen, und zu einer solchen Polemik dünkt uns kein rechter Grund vorzuliegen. Denn es steht eben doch urkundlich fest, dass Galilei die Muskelkraft als die einzige Kraftäusserung, über welche dem Menschen eine unmittelbare Erfahrung zusteht, gewissermassen zur Norm des Kraftmaasses sich ausersehen hatte, und darin sollte man im Hinblick auf die metaphysischen Tüfteleien, in welchen sich sein Zeitalter über den Kraftbegriff zu ergehen liebte, einen ungeheuren Fortschritt erkennen. Denn dass Galilei in seinen „antropomorphen Vorstellungsweisen" nicht stecken blieb, ist ja bekannt, aber nimmer würde er, ohne dieses Vorbereitungsstadium zurückgelegt zu haben, sich zu

seinen hohen Generalisationen haben emporschwingen können. Der Verf. zieht auch die freilich recht schwankende Terminologie der Galilei'schen Dynamik als Beweis für eine gewisse Schwäche der begrifflichen Auffassung an, allein gerade diese Thatsache lässt anscheinend eine Interpretation zu unseren Gunsten zu, insofern die ursprüngliche naive Auffassung von dem grossen Naturforscher auch während seiner späteren Lebensjahre nicht vollkommen abgestreift werden konnte.

Wie man aus unserer kurzen Inhaltsanalyse ersehen haben wird, war auch schon in der „Einleitung" des geschichtlichen Materials genug vorhanden; es handelte sich da eben um die Vorgeschichte der eigentlichen Infinitesimalrechnung. Die zweite Abtheilung ist speciell der Leibniz'schen Periode und den daran sich anschliessenden Speculationen über die Principien der höheren Analysis bis herein in unser Jahrhundert gewidmet. Der Verf. ist auf das Eifrigste bestrebt, aus den Abhandlungen und noch mehr aus dem Briefwechsel von Leibniz, der uns auch in der That so manchen Einblick in sein Geistesleben zu thun gestattet, die einzelnen Phasen des gewaltigen Denkprocesses zu isoliren, welcher schliesslich zur Conception des Unendlichkleinen führte. Den eigentlichen Kern der Leibniz'schen Gedankenreihe erkennt er in dessen „Gesetz der Continuität", und zugleich vindicirt er, was wohl vielen seiner Leser neu sein wird, dem Franzosen Varignon die Ehre, die beste Benennung für das neue mysteriöse Etwas in Vorschlag gebracht zu haben, nämlich das Wort „*inépuisable*". Zur Grösse im üblichen Sinne wird für Leibniz nach des Verf. Nachweisungen das Differential dx erst dann, als er sich über die Existenz und geometrische Bedeutung der höheren Differentialquotienten Klarheit verschafft hat; „mit dieser Anerkennung des Grades ist das dx als Grösse, nämlich als diejenige neue Art von Grösse anerkannt, von der die Alten zwar die Ahnung hatten, aber keine Bestimmung zu treffen vermochten: als die im Intensiven beruhende, durch das Inextensive vermittelte Grösse". Es ist jedenfalls von hohem Interesse, durch den Verf. darüber belehrt zu werden, dass die nicht seltenen Sprünge, Willkürlichkeiten und — für den modernen Leser — Unerklärlichkeiten, mit denen wir Leibniz' Begründung des Differential- und Integralcalculs behaftet sehen, doch immerhin aus einer zielbewussten und systematischen Weltansicht entflossen sind und im Wesentlichen nur uns Epigonen, die wir im gesicherten Besitze des kostbaren Erbes uns wohlfühlen, so erscheinen, zugleich aber eine Vorstellung von der furchtbaren Schwierigkeit verleihen, welche die Durchgeistigung eines so spröden Stoffes mit sich brachte. — Zu Newton übergehend, sucht der Verfasser darzuthun, dass sowohl in der Grundanschauung, als auch in der Tendenz zwischen Ersterem und seinem deutschen Nebenbuhler eine weit grössere Harmonie obwaltete, als man gemeiniglich annimmt; beide Forscher hätten den erkenntnisskritischen

Grund des von ihnen geschaffenen Begriffes durchschaut. Nunmehr kommt Euler an die Reihe, dessen auf Selbsttäuschung beruhende Nullenrechnung — unseres Erachtens ein deutlicher Beweis für die philosophische Schwäche des auf seinem eigentlichen Gebiete Unübertreffbaren — Herr Cohen wohl etwas zu günstig beurtheilt, obgleich er die Motive von Euler's Irrthum scharfsinnig zu analysiren und als warnendes Beispiel auszunützen weiss. L'Huilier's und Lagrange's Hinneigung zur Grenzwerthrechnung findet, was uns jetzt nicht mehr Wunder nehmen kann, die Billigung des Verf. nicht, wogegen er in den etwas schwer verständlichen Aeusserungen Carnot's wenigstens die richtige Ahnung des Continuitätsgesetzes herausfühlen zu können glaubt. Auch den deutschen Jung-Leibnizianern Wolf, Baumgarten, Lambert wird ihr Recht, und sehr eingehend verweilt die Schilderung selbstverständlich bei Kant, der mit seinem Terminus der intensiven Grösse doch wahrscheinlich eben dasselbe habe ausdrücken wollen, was seine sämmtlichen Vorläufer, von Galilei an, im Sinne hatten. Die Versuche Bendavid's und E. G. Fischer's, den Begriff des Unendlichen und des Differentiales als dem menschlichen Vorstellungsvermögen direct entsprossen hinzustellen, verdienen jedenfalls die ihnen vom Verf. geschenkte Beachtung, nachdem der Specialhistoriker der deutschen Mathematik sich gar nicht um sie bekümmert hat. Auf Fischer stützte sich Fries, dem ebenso, wie seinem Schüler Apelt, ein klares Verständniss der strittigen Fragepunkte nachgerühmt wird. Endlich lässt der Verf. auch noch die neueren Vertreter der mathematisch-philosophischen Richtung Revue passiren, H. Schwarz, Schmitz-Dumont, Dühring, du Bois-Reymond und Cournot, welch' Letzterer sich am meisten dem vom Verf. selbst vertretenen Standpunkte der Erkenntnisskritik genähert habe.

Ueber den dritten Abschnitt, in welchem das mathematische Element gegen das rein philosophische sehr in den Hintergrund tritt, dürfen wir uns an diesem Orte kurz fassen. Der neuere Atomismus, wie er besonders bestimmt von Lasswitz vertreten wird, wird sich allerdings mit den hier (S. 134 flgg.) aufgestellten Behauptungen auseinanderzusetzen haben. Auch darüber, ob wirklich durch die Cohen'sche Fassung des Infinitesimalbegriffes die Frage nach dem „Ding an sich" aus der Welt geschafft werden wird, dürften die Ansichten auseinandergehen. Ueber die Polemik gegen die übliche Begründung der psychophysischen Grundgesetze massen wir uns kein giltiges Urtheil an; aber das dürfen wir aussprechen, dass der Satz (S. 159), das Verhältniss von Empfindung und Reiz könne nicht als Function im mathematischen Sinne gefasst werden, nicht das Richtige trifft. Wie es bei seiner wesentlich geschichtlichen Methode zu arbeiten vollkommen erklärlich ist, scheint dem Verf. die ungemein einschneidende Erweiterung des Functionsbegriffes entgangen zu sein, die man Dirichlet und seiner Schule verdankt. Ueber-

haupt wäre es dankbar anzuerkennen, wenn der Verf. seine Definitionen des Differentials und Integrals nun auch recht intensiv daraufhin prüfen wollte, ob sie sich auch völlig mit den grossartigen Modificationen vertragen, welche die Analysis des Unendlichen in den letzten Decennien erfahren hat. Dann erst wird er auch darauf rechnen dürfen, seine — wahrlich in harter und eindringlicher Gedankenarbeit gewonnenen — Ergebnisse von den Mathematikern allseitig gewürdigt und vielleicht angenommen zu sehen; vorläufig wird sich die philosophische Einkleidung jener Resultate wohl noch vielfach als ein Hinderniss erweisen, welches sich einem allgemeineren Bekanntwerden derselben entgegenstellt.

Ansbach. Dr. S. Günther.

Unsere Naturerkenntnis, Beiträge zu einer Theorie der Mathematik und Physik. Von Dr. K. Kroman, Docent der Philosophie a. d. Universität zu Kopenhagen. Von der K. dän. Akademie der Wissenschaften mit der goldenen Medaille gekrönte Preisschrift. Ins Deutsche übersetzt unter Mitwirkung des Verfassers von Dr. R. von Fischer-Benzon. Kopenhagen, A. F. Höst & Sohn. 1883. gr. 8°. XVII, 458 S.

Dieses Werk ist auch von deutscher mathematischer Seite her freudig zu begrüssen, da es mit einer in philosophischen Arbeiten der Neuzeit seltenen Kenntniss der mathematischen und physikalischen Forschungen geschrieben ist, die zu fertigen philosophischen Resultaten in klarer Darstellung durchgearbeitet wird. Dass aber diese Kenntniss immer noch nicht ganz vollständig ist und dass selbst diese kleine Lücke noch wesentlichen Einfluss auf die Resultate übt, wünscht Recensent im Folgenden durch Hervorheben der Differenzpunkte mit dem Verfasser aufzuzeigen.

Der Verf. analysirt die Grundverhältnisse unseres Naturerkennens und gelangt dabei, Kant gegenüber und mehr in Uebereinstimmung mit Hume, zu einer Eintheilung aller Wissenschaft, insbesondere der Mathematik und Mechanik, in zwei Hauptarten: der Formal- und Realwissenschaft, von denen die erstere selbstgeschaffene Objecte behandelt und Genauigkeit und Gewissheit liefert, die zweite vorgefundene Objecte zum Gegenstande hat, wobei nur Annäherungen und Wahrscheinlichkeiten zu erreichen sind.

Mit einer solchen Theilung sind heutzutage wohl die meisten Mathematiker einverstanden, und diese Ansicht ist auch schon häufig ausgesprochen worden (vergl. z. B. meine Recension über B. Erdmann's „Axiome der Geometrie" in dieser Zeitschrift Bd. XXIII, hist.-lit. Abth. S. 82). Dabei weist der Verf. schon in dem formalen Theile der Wissenschaft der Anschauung gegebener Raumbilder in Bezug auf das

Bilden der ersten Urtheile, der Axiome, die wesentliche Rolle zu; freilich nur der groben Induction vom „primitiven Anschauungsschritt", der unmittelbaren Beurtheilung einfacher Raumbilder, aus. Für die Geometrie und rationelle Mechanik wird dies richtig sein; aber selbst für die Logik soll die Einordnung der Arten in Gattungen beim Schliessen auf der räumlichen Grössenanschauung beruhen. Rec. möchte hier fragen, ob nicht schon der Ordnungsbegriff zur Bildung des Grössenbegriffs der Arithmetik genüge, ja, ob nicht jener Begriff sogar nothwendige Voraussetzung sei zur Auffassung der Raumgrösse?

In diesem formalen Theile der Mathematik erscheint die Stellung, welche der Verf. gegen die Metageometrie — die Nicht-Euklidische Geometrie — einnimmt, am schwächsten motivirt. Nachdem er S. 144 wenigstens die logische Berechtigung eines solchen Systems zuzugeben scheint, womit für den Mathematiker schon viel gewonnen ist, bestreitet er weiterhin doch die formale Existenzberechtigung jener Geometrie, als mit unseren unmittelbaren Anschauungen unverträglich. Die Auffassung des Verf. von der sphärischen Nicht-Euklidischen Geometrie lässt sich aus dem S. 158 stehenden Satze erkennen: „Wie werden die geradesten Linien Kreise? Dies muss nothwendig auf einem der folgenden beiden Umstände beruhen: Entweder kann man in einem solchen Raume nicht geradlinig von *A* nach *B* gehen, oder der geradlinige Weg ist nicht der kürzeste." Und seine ganze Beweisführung richtet sich nur gegen diese beiden Möglichkeiten.

Hätte der Verf. die von Cayley und F. Klein entwickelte Nicht-Euklidische Geometrie genügend gekannt, so konnte er nicht zu dem sowohl in der Frage, als in der Alternative der Antwort liegenden Missverständnisse kommen. Der Verf. beachtet nicht, dass für diese Geometrie unser Raum drei Dimensionen hat; dass dafür in diesem unserem Raume alle unsere Anschauungen bestehen bleiben; dass unter den „Geradesten" desselben genau die von Euklid betrachteten gewöhnlichen Geraden gemeint sind; dass wir hierbei insbesondere die Anschauung, dass zwischen zwei Punkten nur eine solche Gerade möglich sei, festhalten; dass diese gerade Strecke auch in dem Maassstabe der Nicht-Euklidischen Geometrie noch die kürzeste bleibt; dass endlich dieser Maassstab auch unabhängig vom Ort und constant ist — und dass trotz alledem diese Nicht-Euklidische Geometrie das Parallelenaxiom nicht enthält! Sie giebt nur die Vorstellung auf, dass man durch einen Punkt zu einer gegebenen Geraden eine und nur eine diese nicht schneidende Gerade ziehen kann, also die Vorstellung der Euklidischen Geometrie, dass die Gerade im Unendlichen geschlossen ist — was ebenso wenig in unserer Anschauung zu liegen scheint, als die Vorstellung der hyperbolischen Geometrie, dass man bei gleichmässigem Messen auf der Geraden nach entgegengesetzten Seiten hin zwei verschiedenen Grenz-

punkten zustrebt. — Ueberhaupt zeigt jene Nicht-Euklidische Geometrie, dass der Unterschied in diesen verschiedenen Systemen, in welche wir unsere Anschauungen fassen können, ausschliesslich in dem angewandten Maassstabe liegt, und dass dieser innerhalb eines jeden Systems constant ist, dagegen der eines Systems (auch der der Euklidischen Geometrie) relativ veränderlich nur in Bezug auf ein anderes System.

Was den Verf. und die Philosophen überhaupt in diesen Schlüssen irregeleitet hat, ist einmal das Wort „Krümmungsmaass", das nur eine mathematische Maasscharakteristik ist ohne allen Bezug auf die Vorstellung des „Gebogenen", und sodann die von Helmholtz auseinandergelegte bildliche Deutung der Nicht-Euklidischen Geometrie als Geometrie auf einer sphärischen bez. pseudosphärischen Fläche — ein Bild, das bekanntlich mit jener Geometrie nicht einmal vollständig stimmt, wenn man sich nicht auf einen Theil der Fläche beschränkt. Es liesse sich leicht im Einzelnen aufweisen, wie alle Schlüsse des Verf. gegen die Metageometrie auf jenem Missverständnisse des „Krümmungsmaasses" beruhen; es wird aber genügen, auf die obige unzutreffende Frage und die daran geknüpfte Alternative hingewiesen zu haben. — Endlich soll noch, S. 164 und 165 gegenüber, betont werden, dass jene verschiedenen Systeme auch nicht mehr Willkürliches in sich tragen, als das Euklidische, und dass sie ebenso vollständig durchführbar sind.

Auch mit der vom Verf. gegebenen Lösung der Frage in der realen Mathematik: „wie so die formale Geometrie in unserem Raume allgemeine Giltigkeit habe", sind wir nicht einverstanden. Kann es befriedigen, wenn der Verf. antwortet: „dass dies eben nur insofern geschehe, als die natürlichen Objecte den Gedankenobjecten entsprechen" — also, wie der Verf. erläutert, dass unsere Geometrie für ein Dreieck auf der Erdoberfläche eben nur soweit gelte, als man von den Bergen etc. absehen könne? Will jene Frage nicht vielmehr eine Erklärung dafür, dass man von vornherein annehme, die Euklidische Geometrie werde sich um so genauer bestätigen, je genauere Messungen in unserem Maasse man anstellt?

In Bezug auf die Auffassung der rationellen und realen Mechanik sind ganz analoge Bemerkungen zu machen. Die rationelle, zunächst für eine selbstgeschaffene Natur giltige Mechanik baut der Verf. aus einigen Hauptprincipien auf — dem Galilei'schen Trägheitsgesetz, dem Gesetz von der gegenseitigen Unabhängigkeit der Kräfte und dem der Gleichheit von Druck und Gegendruck —, Principien, die aus dem Causalsatz (der nur eine andere Form des formalen Identitätssatzes sein soll) und einigen, aus einfacher unmittelbarer Erfahrung geschöpften physischen Definitionen abgeleitet sein sollen.

Dieser Auffassung könnte sich Rec. vollständig anschliessen, wenn nur das willkürliche Element, das in den verschiedenen möglichen

Definitionen liegt, betont worden wäre. Diese Willkürlichkeit ist aber gerade das entscheidende Moment für die Zweitheilung der Mechanik und das Verhältniss der beiden Theile zu einander. Sie zeigt sich schon in der ersten Anwendung des Causalsatzes, dass die Dinge ein „constantes Verhalten" haben; denn für die unmittelbare Erfahrung ist nicht klar, an welcher Stelle der Begriff „Aenderung" anfängt, ob bei der Abweichung des Punktes vom Orte oder von der Kreisbahn etc. Man kann also die Definition von „Kraft" bedeutend abändern in andere berechtigte Voraussetzungen für die Naturerklärung, und erhält doch Systeme, welche unsere Erfahrungen umfassen. Freilich nur durch Zurückführung auf eine grössere Zahl von Principien, also auf complicirtere Weise; aber dieser relative Vorzug unseres Systems kann doch nicht genügen, dasselbe als (auch nur relativ) nothwendig hinzustellen. — Diese Abänderungsfähigkeit des Systems, welches alle Naturerscheinungen umfassen soll, ist sowohl in dem Verfahren Kirchhoff's ausgesprochen, der nach und nach passende Abstractionen aus der Erfahrung in ein möglichst einfaches System verarbeitet, als in der Schell'schen Darstellung, der nur mit weniger Schritten zu seinen obersten Sätzen der rationellen Mechanik, mit Betonung der Willkürlichkeit der Definition, übergeht. — Ich erinnere ferner an die an das Gesetz der Trägheit angeknüpften Betrachtungen: dasselbe bezieht sich in der rationellen Mechanik auf die absoluten Bewegungen der Körper; da uns aber nur relative Bewegungen zur Erscheinung kommen, so kann es durch Erfahrung, weder durch augenblickliche, noch durch beliebig fortgesetzte, überhaupt nicht als „nothwendig" erkannt werden. Hat ja infolge dessen Mach (Die Mechanik in ihrer Entwickelung, Leipzig, Brockhaus 1883) dieses Princip durch die Annahme zu ersetzen gesucht, dass alle Körper etwa proportional ihrer Entfernung aufeinander wirken.

Wir möchten somit den Hauptsätzen der rationellen Mechanik weder die Stellung von nothwendigen Principien, noch die von nur durch Erfahrung zu bestätigenden Hypothesen zuweisen; möchten sie vielmehr, da sie wohl Voraussetzungen für die Naturauffassung und -erklärung sind, aber nicht unabänderliche, allein mögliche, einfach als Theorien bezeichnen.

Von den Resultaten des Verf. bleibt das eine, in welchem er mit B. Erdmann übereinstimmt: dass die Existenz der Mathematik und die Untersuchungen über die Axiome nichts über die Frage der Apriorität der Raumanschauung lehren, jedenfalls bestehen. Wenn sein Werk aber auch in der ganzen Materie, welche es behandelt, nicht das letzte Wort gesprochen hat, so glauben wir doch demselben das Lob aussprechen zu dürfen, dass es geeignet scheint, die Verständigung zwischen mathematischer und philosophischer Forschung wesentlich zu fördern.

Erlangen, März 1884. M. Noether.

Ueber die Anwendbarkeit der mathematischen Methode auf die Philosophie. Ein Vortrag von Präsident a. D. v. KIRCHMANN, nebst der dabei stattgehabten Discussion. Neue Folge, 4. Heft der Philos. Vorträge, herausgeg. von der Philosophischen Gesellschaft zu Berlin. Halle, C. E. M. Pfeffer. 1883. 66 S. 8°.

Der Vortrag wirft die Frage auf, weshalb die Anwendung der geometrischen Methode auf die Philosophie nicht hat gelingen wollen und nicht gelingen kann. Dies soll (S. 12 flgg.) auf drei der Geometrie wesentlich eigenthümlichen Umständen beruhen:

1. dass dieselbe allein im Stande ist, ihre obersten Grundsätze, mit denen sie beginnt, unmittelbar und für alle Einzelfälle giltig unzweifelhaft zu beweisen;
2. dass die Subsumtion der neueren besonderen Gestalten unter die vorhergehenden bei ihr in höchster Gewissheit durch Anschauung dargelegt werden kann;
3. dass die unendliche Menge der Einzelfälle, die ein geometrischer Begriff befasst, in der Geometrie übersehen und so der an einer einzelnen bestimmten Gestalt geführte Beweis damit zur vollen Giltigkeit für alle unter den Begriff fallenden Gestalten erhoben werden kann.

Da diese drei Umstände, sagt der Vortrag, bei der Philosophie nicht vorhanden sind, ist die geometrische Methode auf sie nicht anwendbar und deshalb auch die gleiche Gewissheit, wie in der Geometrie, bei ihr nicht zu erreichen. Und in Bezug auf 1. wird (S. 12) ausgeführt, dass unter jenem obersten Lehrsatz der sogleich nach den Erklärungen kommende erste Congruenzsatz gemeint sei, der durch das im Vorstellen sich vollziehende Uebereinanderlegen zweier Dreiecke bewiesen werden soll.

Hiermit steht das vom Vortragenden in seiner Replik S. 56 Vorgebrachte im Widerspruch; denn daselbst wird die Gewissheit der Geometrie auf nicht weiter zu beweisende Grundbegriffe und Axiome, welche den Lehrsätzen vorausgehen, gestützt; und gerade in der Existenz jener wird der Unterschied der Mathematik von der Philosophie gefunden. Dass zudem jener im Vorstellen zu vollziehende Process des Uebereinanderlegens überhaupt noch gar keine Definition für die Gleichheit liefert, wird nicht beachtet.

Bei dieser schwankenden Grundlage scheint es nicht nöthig, auf den vom Vortragenden besonders urgirten dritten der drei Umstände näher einzugehen; nur sei hervorgehoben, dass hierbei der Erfahrung, der sinnlichen Anschauung eine wesentliche Rolle zugeschrieben wird. Noch muss von mathematischer Seite her dagegen aufgetreten werden, dass der Vortragende die neueren Aufstellungen in Bezug auf das Parallelenaxiom etc. als Einbrüche der Philosophie in das mathematische Gebiet und als witzige Spiele des Denkens bezeichnen zu können glaubt — ein

völliges Verkennen der Aufgabe der Mathematik, ihre Elemente auf Zusammenhang und Abhängigkeit von allgemeineren Voraussetzungen hin zu analysiren.

Erlangen, März 1884. M. NOETHER.

Logik. Eine Untersuchung der Principien der Erkenntniss und der Methoden wissenschaftlicher Forschung von WILHELM WUNDT. Zwei Bände. II. Band. Methodenlehre. Stuttgart 1883, bei Ferdinand Enke. XIII, 620 S. Zweiter Abschnitt. Von der Logik der Mathematik. S. 74 bis 219.

Wir haben in der Ueberschrift genau den noch nicht ein Viertel des Bandes einnehmenden Abschnitt genannt, über den wir berichten. Diese räumlich eingeschränkte Behandlung der Mathematik zeigt uns klar, was der Titel des Werkes von vornherein vermuthen lässt, dass nicht ein Buch des Mathematikers für den Mathematiker, sondern des Philosophen für den Philosophen uns vorliegt, allerdings eines solchen Philosophen, der den Weg zur Psychologie von der Physiologie aus, den Weg zur Kenntniss der Methoden von der eigenen Erfindung fruchtbarer Forschungsmittel aus, den Weg zur Logik von eingehenden mathematischen Studien aus kennen lernte. Diese Eigenthümlichkeit des Verfassers hat in Verbindung mit dem Bildungsbereiche der Leser, an die er sich vorzugsweise wendet, und durch welchen er sich selbst begrenzt fühlt, dem gross angelegten Werke seinen Stempel aufgedrückt. Wenn der Mathematiker es mit der Loupe ängstlich durchmustern wollte, ob nicht da und dort eine Bezeichnung, eine Benennung unrichtig gebraucht wurde, wenn der Historiker jedesmal, wo er auf den Namen Descartes stösst, die Frage aufwerfen wollte, ob wirklich Alles von diesem herrühre, was ihm da zugeschrieben wird, gewiss, es würde nicht schwer sein, ein Sündenregister zusammenzustellen. Aber solche Splitterrichterei wäre hier nicht am Platze. Der Philosoph, der auch nur soviel Mathematik weiss, als Herr Wundt ihn kennen lehrt, wird, die kleinen Irrthümer, welche er mitlernt, inbegriffen, doch eine nur seltene Spielart seiner Gattung sein, und dass er sich so auszubilden den Trieb empfand, ist gerade das hohe Verdienst des geist- und kenntnissvollen Verfassers. Freuen wir uns daher ohne engherziges Bekritteln dessen, was der philosophische Leser der Logik an mathematischen Kenntnissen sich daraus aneignen kann, und reden wir vorzugsweise von dem, was den mathematischen Leser darin anmuthet. Wir werden dabei allerdings auch hier mehr bei Einzelheiten, als bei Schilderung des Ideenganges im Ganzen verweilen.

Ist die Mathematik Geisteswissenschaft, ist sie Erfahrungswissenschaft? Diese Frage ist vielfach gestellt worden. Herr du Bois-Reymond hat bekanntlich beiden Auffassungen gleiches Recht zugesprochen,

nachdem er dem Vertreter des Idealismus und dem des Empirismus in seiner „Allgemeinen Functionentheorie“ zu ausgiebigem Wechselgespräche das Wort verlieh. Herr Wundt sucht erstlich statt der beiden von Herrn du Bois-Reymond gebrauchten Benennungen die des Nominalismus und des Realismus, deren er schon in den „Philosophischen Studien“ I, 105 sich bedient hatte, bevor die Allg. Functionenth. erschien, als zutreffender zu vertheidigen, worin wir ihm beipflichten, und beantwortet dann die Hauptfrage mit doppeltem Nein. Nicht in dem menschlichen Geiste als solchem entspringen die mathematischen Begriffe, nicht Abspiegelungen gegebener Objecte sind sie; die Objecte und die durch dieselben ermöglichten Abstractionen geben erst vereinigt jene Begriffe. Hierin erkennen wir die gleiche Gesinnung, die wir schon 1855 in der Vorrede zu unseren „Grundzügen einer Elementararithmetik“ ausgesprochen haben, wenn wir auch weder damals, noch heute die Abstraction so weit ausdehnen, wie Herr Wundt, welcher schliesst, „dass mathematische Begriffe zu Stande kommen, indem wir von allen denjenigen Elementen der Vorstellung abstrahiren, die in dem Object ihre Quelle haben“ (S. 108). So entsteht freilich auch für uns der erste Begriff der Zahl, aber die Determinirung des Begriffes, wie die inversen Operationen der Arithmetik sie nothwendig machen, greift doch wieder auf die Objecte als Quelle zurück.

Natürlich ist Herr Wundt auch auf die hier angeführte spätere Determinirung des Zahlbegriffes eingegangen und scheidet ihr entsprechend (S. 119) Zahlarten und Zahlsysteme aus. Die Zahlarten sind die der ganzen, der gebrochenen, der stetig aufeinander folgenden Zahlen. Durch sie ändert sich die innere Constitution des Zahlbegriffes. Die Zahlsysteme beziehen sich auf die äussere Form des Zahlbegriffes, auf die Richtung; durch ihre Veränderung entstehen positive, negative, complexe Zahlen. Die laute Betonung des hier obwaltenden Gegensatzes, wir nennen ihn den Gegensatz der Quantität und der Qualität, ist sehr nach unserem Geschmack, nicht so die Wahl jener Namen. Zahlsysteme würden wir, schon wegen des allzu verwandt lautenden Zahlensystems, am liebsten ganz vermieden wissen und das Wort Zahlarten gerade dafür gebraucht sehen; in ihm tritt namentlich die Verschiedenartigkeit der Zahlen hervor, welche in der Richtung ein Bild, keinen Entstehungsgrund besitzt. Für die quantitative Unterscheidung dürfte aber das Wort Zahlenschichtung sich rechtfertigen lassen.

Herr G. Cantor hat bei seinen feinen Untersuchungen über Mannichfaltigkeiten das eigentlich Unendliche von dem uneigentlich Unendlichen unterschieden, wie Hegel der wahren Unendlichkeit die schlechte Unendlichkeit gegenüberstellte. Hier hat Herr Wundt (S. 128) nun, wie wir glauben, sehr zutreffende Namen in Vorschlag gebracht. Das aus der endlichen Grösse durch unbegrenztes Wachsthum hervorgehende

Unendliche nennt er das Endlose oder Infinite; der fertige Begriff der Unendlichkeit, der von Anfang an das Merkmal der Begrenztheit, welches den endlichen Grössen zukommt, nicht besitzt, heisst ihm das Ueberendliche oder Transfinite.

Wenn von mit einander in Verbindung stehenden Grössen eine sich verändert, so können, den Fall periodischer Functionen ausgenommen, nicht alle anderen unverändert bleiben. Wir halten diesen Satz für ein Erfahrungsaxiom. Herr Wundt nennt ihn (S. 137) das Princip der correspondirenden Veränderungen und stellt ihm das Princip der Variation der Beziehungen an die Seite, wonach, um es mathematisch auszusprechen, einer Variabeln nicht sofort andere und andere Werthe beigelegt zu werden brauchen, sondern man berechtigt ist, die Variable vorher als irgend eine Function irgend einer oder auch mehrerer neuer Variabeln zu betrachten. Auf der Anwendung beider Principien gemeinschaftlich beruhen alle Methoden der Gleichungsauflösungen.

Die Addition, die Multiplication sind synthetische, die Subtraction und Division sind analytische Operationen. Jene gehen diesen voraus. Warum geht aber die analytische Differentiation der synthetischen Integration voraus? Herr Wundt sieht (S. 209) den Grund davon „in dem Problem der stetigen Aenderung, von welchem die Infinitesimalmethode ausgehe; indem ihre nächste Aufgabe darin bestehe, diesen Begriff der stetigen Aenderung zu fixiren, könne sie hierzu nur durch ein analytisches Verfahren gelangen, welches auf diese Weise zur Grundlage aller weiteren Methoden werde".

Wir haben hier weitaus nicht alle Stellen erwähnt, bei welchen wir während des Lesens mit besonderem Vergnügen verweilten. Soll doch auch unser Bericht keineswegs ein Kennenlernen des Buches durch eigene Anschauung ersetzen, sondern nur dazu auffordern!

CANTOR.

Neue Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Statistik, insbesondere bei der Vertheilung der Ehen nach dem Lebensalter der Ehegatten, von LUIGI PEROZZO. Deutsch bearbeitet von OSCAR ELB. Dresden 1883, Verlag von E. L. Knecht. 4°. 13 S. Text, 6 Tabellen, IX Figurentafeln.

Der Verfasser hat sich zu seinen Untersuchungen der Civilstandsregister des Königreichs Italien für die Jahre 1878 und 1879 bedient, deren Angaben abgeschlossener Ehen er theils in einer Ebene, theils, wozu Zeuner 1869 den Anstoss gegeben zu haben scheint, im Raume graphisch darzustellen wusste. Die so erhaltene Fläche beruht auf folgenden Annahmen: In der Grundebene sind auf zwei zu einander senkrechten Coordinatenaxen die verschiedenen Lebensalter von Männern und

Frauen in gleichen Entfernungen aufgetragen; auf jedem Punkte der Ebene, welcher die Abschliessung einer Ehe zwischen Gatten von dem Alter der in diesem Punkte sich schneidenden Coordinaten bezeichnet, ist wieder nach einem constanten Maassstabe die Zahl der so abgeschlossenen Ehen als z-Coordinate senkrecht aufgerichtet. Wir haben hier die Frage nicht zu erörtern, ob es gestattet sei, schon die Daten zweier Jahre in einem einzigen Lande zu Folgerungen auszubeuten. Uns interessiren, wie billig, nur die Folgerungen selbst, also im gegebenen Falle die Gestalt der gewonnenen Oberfläche als geometrischem Orte der Endpunkte der in erwähnter Weise hergestellten z-Coordinaten. Sie hat einen höchsten Punkt etwa dort, wo die mittleren Alter der beiden Ehegatten sich vereinigen; nach der jugendlichen Seite ist ein steiler Abfall, etwas weniger steil senkt sich die Oberfläche gegen die Seite des höheren Alters. Querschnitte parallel zur xy-Ebene zeigen sich als ziemlich ellipsenförmige Curven, während Schnitte durch die grösste z-Ordinate geführt eine bedeutende Aehnlichkeit mit der bekannten Wahrscheinlichkeitscurve darbieten.

CANTOR.

Esercizii sulle equazioni differenziali esposti dall'ingegnere GIULIO TOMASELLI con introduzione di FRANCESCO BRIOSCHI. Napoli, Milano, Pisa 1883. Ulrico Hoepli editore-librajo. XI, 364 pag.

In den verschiedensten Sprachen ist kein Mangel an Uebungsbüchern zum Einarbeiten in die einzelnen Theile der Mathematik, und insbesondere für die Differential- und Integralrechnung hat das Bedürfniss solche Aufgabensammlungen vielfach herstellen lassen. Wir geben zu, dass das Hauptgewicht meistentheils nicht auf Aufgaben gelegt wird, bei welchen die Integration von Differentialgleichungen in Frage kommt; aber doch sind in Schlömilch's Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis 84 Seiten diesen Capiteln gewidmet, und selbstverständlich gehören alle die zahlreichen Uebungsbeispiele in Boole's Differential Equations demselben Gebiete an. Das schliesst natürlich nicht aus, dass neue Sammlungen entstehen können und jede in ihrer Heimath ein Publicum findet. Wir wissen nicht, ob die italienische Literatur bereits ein ähnliches Werk in sich schloss; aber jedenfalls unterscheidet das Tomaselli'sche Uebungsbuch sich in einem massgebenden Gesichtspunkte von den beiden zum Vergleiche genannten Schriften deutscher und englischer Sprache. Dort sind nach Angabe der Methoden und Ausrechnung einiger Musterbeispiele so und so viele Aufgaben der Selbstthätigkeit des Lesers soweit überlassen, dass ihm nur das Endergebniss noch mitgetheilt wird, welches zu erreichen er sich anstrengen soll. Herr Tomaselli stellt diese Anforderung nicht an seine Leser. Er giebt nur ausgeführte Aufgaben, theils den Boole'schen Uebungen entnommen,

theils in Frankreich als Prüfungsaufgaben praktisch verwerthet, theils von Herrn Tomaselli selbst erfunden. Jede einzelne Aufgabe ist in mustergiltiger Weise discutirt, so dass auch bei einem Minimum von geistiger Anstrengung eine Lücke im allseitigen Verständnisse des Gebotenen nicht leicht eintreten kann. Ob dem Leser — sofern wir einen Schüler als solchen uns denken — damit eine wesentliche Förderung gewährt wird? Nur die Erfahrung kann auf eine so allgemein gestellte Frage antworten. Wir persönlich wären geneigt, das Buch lieber als allerdings zu bequemes und zu breitspuriges Hilfsbuch für einen Lehrer zu empfehlen, der Zeit bei der Vorbereitung zu Unterrichtsstunden über die Anfangsgründe der Integration von Differentialgleichungen ersparen will.

Cantor.

Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire ou commentaire sur les XXXII premières propositions des éléments d'Euclide par J. Hoüel, professeur de mathématiques à la faculté des sciences de Bordeaux. II. édition. Paris 1883, chez Gauthier-Villars. VI, 91 pag.

Die Geometrie Euklid's beherrscht nahezu 2100 Jahre lang in ungestörter Alleinherrschaft das Reich der Mathematik. Mochte da oder dort ein aufrührerischer Unterthan gegen die Anordnung der Sätze, gegen einzelne Vorschriften — insbesondere gegen die Zumuthung, das 11. Axiom unbewiesen anzuerkennen — Bedenken tragen, zum Ausspruche solcher Bedenken kam es in den seltensten Fällen. An der Wende unseres Jahrhunderts, zu einer Zeit, als alle Monarchien Europas von Frankreich aus mehr oder weniger erschüttert wurden, wagte es ein Franzose, Adrien Marie Legendre, ein wirklich neues System der Geometrie aufzubauen. Selten oder nie hat ein Lehrbuch eines gleichen Erfolges sich zu erfreuen gehabt. Würde man alle die Elementargeometrien, welche in allen Sprachen erschienen und fast als Uebersetzungen von Legendre's Werk anzusehen sind, als Auflagen jenes Werkes mitzählen, so würden diese Auflagen nach Hunderten sich beziffern. Und dennoch blieb die mathematische Welt nicht bei Legendre's Methoden. Deutschland schuf eine neue Elementargeometrie, welche, wenn man sie nach einer Persönlichkeit benennen will, die Grassmann'sche heissen mag und welche bahnbrechend fortschreitet, die Mittelschule an Begriffe zu gewöhnen, die vor Kurzem noch nur den Männern ernster Wissenschaft angehörten. Frankreich, viel conservativer als es selbst glaubt, behielt im Grossen und Ganzen seinen Legendre bei, der in der einen Stadt so, in der andern so hiess. Vor 20 Jahren etwa unternahm es Herr Hoüel, seinem Adoptivvaterlande

den Dienst zu erweisen, nachdrücklich gegen die Legendre'sche Methode sich auszusprechen und, das Sprichwort „*il faut reculer pour mieux sauter*“ beherzigend, ging er bis auf Euklid zurück, von dort aus seinen Anlauf zum Weitsprunge nehmend. Gegenwärtig ist die kleine Arbeit zum zweiten Male aufgelegt, und die Möglichkeit einer neuen Auflage zeigt, dass, wenn in Frankreich der Umschwung in der Behandlung der Elementargeometrie noch nicht eingetreten ist, die Geister doch zu diesem Umschwunge sich vorbereiten. Herr Hoüel hat seine Abhandlung in drei Abtheilungen gegliedert. Die erste Abtheilung besteht aus einer Uebersetzung der 32 ersten Sätze des I. Buches der Euklidischen Elemente Die zweite Abtheilung kann etwa als moderne Ueberarbeitung des in der ersten gebotenen Stoffes bezeichnet werden; der Gang, die rein geometrische Beweismethode sind Euklidisch; Euklidisch insbesondere ist die Scheidung der Sätze, die nicht von dem Parallelenaxiom beeinflusst sind, von denen, bei welchen solches der Fall ist; modern ist, wie manche Einzelheit, wie die fortwährende Anwendung von Ortsveränderung einzelner Figurentheile, so namentlich auch der Wortlaut des Parallelenaxioms: „Durch einen gegebenen Punkt lässt sich zu einer gegebenen Geraden nur eine Parallele ziehen.“ Endlich als dritte Abtheilung, als Anhang, hat Herr Hoüel einige besondere Auseinandersetzungen zur Philosophie der Geometrie vereinigt. Der Lehrer wird in dieser letzten Abtheilung manchen Gedanken finden, von welchem er bei seinem Unterrichte Gebrauch machen kann, selbst wenn er nicht mit allen Ansichten des Verfassers einverstanden ist, um wieviel mehr, wenn er, wie Referent es mit Vergnügen ausspricht, im Ganzen und im Einzelnen sich zu den gleichen Gesinnungen einer nicht aprioristischen, sondern erfahrungsmässigen Raumlehre bekennt.

CANTOR.

Analytische Geometrie der Kegelschnitte nach elementarer Methode für höhere Schulen. Von W. FUHRMANN, Oberlehrer am Realgymnasium auf der Burg in Königsberg i. Pr. Mit 27 Figuren im Text und 2 Tafeln. VII, 144 S. Berlin 1884, Winckelmann & Söhne.

Man wird — so sagt der Verfasser in seinem Vorworte — einen Unterschied zwischen Werken, die dem Fortschritt, und denen, die der Verbreitung dienen sollen, zugestehen. Er macht für sein Werk keinerlei Anspruch, der ersten, sondern nur der zweiten Gruppe anzugehören. In dieser Einschränkung verdient es volle Empfehlung. Uns wenigstens ist noch keine analytische Geometrie der Kegelschnitte zu Händen gekommen, welche so bündig abgefasst und, ohne jemals den elementaren Standpunkt zu verlassen, den Schüler so weit führte, wie diese hier. Der Verfasser

hat sich in der Hauptsache an Joachimsthal's Analytische Geometrie der Ebene angeschlossen, und Kenner jenes vorzüglichen Buches, was wohl soviel heissen dürfte als jeder deutsche Mathematiker, werden ihm darin Recht geben. Er hat aber aus dem bei Joachimsthal verarbeiteten Stoffe eine Auswahl getroffen, die sich nur auf das Leichtere beschränkte, und auch darin wird man ihm beipflichten; denn für Schulen ist selbst Joachimsthal noch etwas zu schwer. Herr Fuhrmann hat gezeigt, dass die von ihm getroffene Beschränkung doch genügt, den Schüler mit einigen der modernen Methoden, mit Gleichungssymbolen und dem Rechnen mit denselben, mit der geometrischen Anwendung von Determinanten, in einer Anmerkung wenigstens (auf S. 117) mit Liniencoordinaten und einer beträchtlichen Anzahl von Sätzen bekannt zu machen, die in denen vom Pascal'schen und Brianchon'schen Sechsecke gipfeln. Ein Anhang enthält die erforderlichen Sätze aus der Determinantenlehre in wünschenswerther Kürze.

Cantor.

Leitfaden für den geometrischen Unterricht. Zum Gebrauche an höheren Unterrichtsanstalten bearbeitet von Dr. R. Heger. Dritter Theil: Stereometrie.

Bei Besprechung der beiden ersten Theile des vorliegenden Werkes haben wir bereits ausgeführt, dass wir den Standpunkt des Herrn Verfassers nicht völlig zu dem unsrigen machen können. Wir haben unumwunden erklärt, dass die Lösung von Aufgaben nach unserer Auffassung im mathematischen Unterrichte bei Weitem die Hauptsache ist. Daher können wir uns für ein Lehrbuch, welches vorwiegend die Darlegung der Lehrsätze enthält, nicht erwärmen. Zu diesem principiellen Bedenken kam noch eine Kleinigkeit, die wir ausdrücklich als Geschmackssache bezeichnet haben. Wir meinen die Vorliebe für mathematische Formeln mit ausgeschriebenen Wörtern, welche Referent ebenso lebhaft — und vergeblich — aus der Welt wünscht, wie beispielsweise das „e" aus dem durch die Neuorthographie verunzierten Worte „multiplizieren".

Wir wollen beide Bedenken Herrn H. gegenüber hiermit zum letzten Male geäussert haben.

Das vorliegende Büchlein ist 149 Seiten stark. Es zerfällt in 13 Paragraphen, von denen die letzten vier als „Anhang" bezeichnet sind.

Der erste Paragraph führt die Ueberschrift: „Einleitung. Durchschnitt einer Ebene mit Geraden und Ebenen." Der erste Satz desselben enthält klar und bündig die Definition und das Axiom der Ebene. Er lautet: „Wenn eine Gerade sich so bewegt, dass sie durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade trifft, so ist ihre Bahn eine

Fläche, welche Ebene genannt wird. Wenn eine Gerade mit einer Ebene zwei Punkte gemein hat, so fällt sie ganz in die Ebene.“ Der Verf. wendet sich darauf zu der Schnittlinie zweier Ebenen (6), zur parallelen Geraden (7), zu zwei Geraden, die einer dritten parallel sind (8). Alsdann werden parallele Ebenen von einer dritten Ebene u. s. w. geschnitten. Man sieht, dass in manchen Stücken vom Herkommen abgewichen wird. Wir halten diese Abweichungen für glückliche. Schon im ersten Paragraphen wird es dem Verfasser möglich, das geradlinige Paraboloid und Hyperboloid zu charakterisiren.

Im zweiten Paragraphen wird der Flächenwinkel, werden die Normalen zur Ebene behandelt. Gleiche Flächenwinkel sind congruent, woraus folgt, dass sie gleiche Normalschnitte haben. Ebenso wird in Nr. 4 gefolgert, dass Winkel, deren Schenkel gleichsinnig parallel sind, einander gleichen. Auf analoge Betrachtungen werden auch die Beweise der Sätze für die Normalen der Ebene gegründet. Ref. vermag hierin dem Verf. nicht so unbedingt zuzustimmen, da die hergebrachte Darstellung gewisse didaktische Vortheile zu haben scheint. Zu Ende des zweiten Paragraphen werden die einfachsten drei Rotationskörper besprochen. An dieser Stelle hätten die erst S. 98 erfolgenden Festsetzungen über den begrenzten Kegel und Cylinder schon ausgesprochen werden können, da der gewöhnliche und vielfach auch der wissenschaftliche Sprachgebrauch nur die letzteren meint. Es ist gewiss zu beklagen, dass diejenige Einigkeit, welche bezüglich der Begriffe Gerade und Strecke bereits erreicht ist, an dieser Stelle noch vermisst wird.

Der dritte Paragraph enthält die Lehre von der Normalprojection, untersucht die Grösse der Winkel, welche eine Gerade mit den durch ihren Fusspunkt gehenden Geraden einer Ebene bildet, gelangt zur Definition des Ebenenbüschels und schliesst mit einigen hübschen Anwendungen auf Paraboloid und Hyperboloid.

Der folgende, vierte Paragraph hat einen reichen Inhalt. Man untersucht zwei Gerade im Raume, die Lage zweier Kugeln, die dem Tetraeder um- und eingeschriebenen Kugeln, woran sich naheliegende Untersuchungen über die Kantenwinkel einer dreiseitigen Ecke anschliessen. Ziemlich breit und ermüdend wirken die Erörterungen von Nr. 15, 16, 17. Die Bestimmung des Schwerpunkts des Tetraeders, Betrachtungen von Sinusverhältnissen, von Ebenen, welche drei Kugeln berühren, endlich der Satz über die vier Höhen eines Tetraeders bilden den interessanten und ansprechend dargelegten Stoff dieser Abtheilung.

Der fünfte und sechste Paragraph behandeln das sphärische Dreieck, und zwar unter möglichster Einschränkung der Rechnung, ferner den Inhalt der Körper. Hierbei fällt uns die exacte, aber unnöthigerweise zweimal auftretende Behandlung des Princips der gleichen Pa-

rallelschnitte auf. Den Schluss bildet die Darlegung der Oberflächenbestimmung bei den drei runden Körpern.

Im Anhang werden zunächst die quadratische Punkt- und Strahleninvolution, dann die Uebertragung von Kreissätzen auf den Kegel und die Kegelschnitte behandelt. Wie das Vorwort bemerkt, soll die Behandlung der letzteren möglichst an die projectivischen Methoden der Geometrie angeschlossen werden. Es kann dem Verfasser zugegeben werden, dass er seine Aufgabe im Ganzen glücklich gelöst hat, wenn wir auch mit gewissen didaktischen Bedenken nicht zurückhalten wollen.

Druckfehler sind uns aufgefallen S. 9 Z. 22 v. o., S. 95 Z. 11 v. o. und S. 109 Z. 19 v. o. S. 97 unten hätte der Ausdruck Z. 4 v. u. wohl besser gefasst sein können.

Die Figuren sind durchweg mit lobenswerther Exactheit gezeichnet.

Coesfeld. K. Schwering.

Leitfaden für den geometrischen Unterricht. Zum Gebrauche an höheren Unterrichtsanstalten bearbeitet von Dr. R. Heger. Vierter Theil: Analytische Geometrie der Ebene.

Das vorliegende Büchlein zählt 91 Seiten und zerfällt inhaltlich in 13 Paragraphen.

Der erste behandelt die Coordinaten eines Punktes. Hier finden wir unter Anderem die Theilung einer Strecke nach bestimmtem Verhältniss und eine Anwendung auf die Umkehrung des Ceva'schen Satzes, die uns trotz der Vorbereitung durch den Schwerpunktssatz an dieser Stelle ein wenig verfrüht erscheinen will. Gelegentlich der Formeln $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $\sin\varphi = \frac{y}{r}$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$ wird bemerkt: „Nachdem man über den positiven Sinn der Geraden OP entschieden hat, weiss man, ob für r der positive oder negative Werth der Quadratwurzel zu nehmen ist.“ r bedeutet die Strecke OP. Wir meinen, es ist besser und vor Allem verständlicher, die positive oder negative Richtung der Geraden OP einstweilen ausser Spiel zu lassen und für $r = \sqrt{x^2+y^2}$ den positiven Werth festzusetzen.

Es folgt die Gleichung der Geraden, welche in der Form $y = mx + b$, dann $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$ und dann in der eigentlichen Normalform geschrieben wird. Dieser Inhalt wird an Beispielen und durch geometrische Betrachtungen deutlich und lebendig dargestellt. Ausser den parallelen Geraden, der Normalen wird die unendlich ferne Gerade besprochen und sogar die Methode der Symbole $T \equiv ax + by + c$ in passender Weise eingeführt.

Die letztere Methode führt im dritten Paragraphen die Herrschaft. Er ist dem Büschel gewidmet, behandelt die Sätze aus der Transversalentheorie, insbesondere merkwürdige Punkte des Dreiecks und das vollständige Vierseit.

Der vierte und fünfte Paragraph sind dem Kreise gewidmet. Herr H. geht mit Recht von den zwei Hauptformen der Kreisgleichung aus, erkennt alsdann ihre wesentliche Eigenschaft, und geht so zur Tangente, zur Potenz und durch die harmonische Eigenschaft zur Polare über. Das Kreisbüschel findet eine recht gründliche Behandlung, wobei die Verwendung der Symbole förderlich ist.

Die vier folgenden Paragraphen behandeln die Kegelschnitte. Ihre gemeinsame Definition, wie das ja auch wohl das Natürlichste ist, liefert die Directrixeigenschaft. Alsdann werden die drei verschiedenen Kegelschnitte getrennt behandelt. Wir heben daraus die geschickte Verwendung der Reihenentwickelung S. 43 hervor. Es wird durch dieselbe ein sicherer Boden für das Verhalten der Parabel zunächst und der Curven überhaupt im Unendlichen gewonnen. Es giebt Lehrbücher, welche entweder auf die Sache nicht eingehen, oder im Vertrauen auf den gläubigen Sinn des Studirenden gerade bei dieser Gelegenheit mit Vorliebe den Sitz der Pythia besteigen.

Die letzten Paragraphen behandeln die allgemeine Gleichung zweiten Grades und anhangsweise die Betrachtung der schiefwinkligen und Polarcoordinaten.

Fassen wir unser Urtheil zusammen, so enthält das Büchlein einen zweckmässig gewählten Stoff in klarer Darstellung, die den wissenschaftlichen und didaktischen Anforderungen Genüge leistet.

Coesfeld. K. Schwering.

Bibliographie

vom 16. Juli bis 30. September 1884.

Periodische Schriften.

Monatsberichte der königl. preuss. Akademie der Wissensch. Register zu den Jahrg. 1874—1881. Berlin, Dümmler. 3 Mk.

Abhandlungen der mathem.-physikal. Classe der königl. bayer. Akademie der Wissensch. 15. Bd. 1. Abth. München, Franz. 9 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissensch. in Wien. Abth. II. 88. Bd. 3.—5. Heft. Wien, Gerold. 8 Mk.

Nautisches Jahrbuch für das Jahr 1887, herausgeg. vom Reichsamt d. I., redig. v. Tietjen. Berlin, Heymann. 1 Mk. 50 Pf.

Astronomische Beobachtungen auf d. königl. Sternwarte zu Berlin, herausgegeben von W. Förster. 5. Bd. Berlin, Dümmler. 20 Mk.

Beobachtungen der meteorologischen Stationen im Königreich Bayern, herausgegeben von W. v. Bezold und C. Lang. 6. Jahrg. (1884) 1. Heft. München, Ackermann. pro compl. 18 Mk.

Physikalisches Jahrbuch, herausgeg. vom Breslauer physikal. Verein. 1. Heft. Breslau, Kern. 1 Mk. 50 Pf.

Mémoires de l'Académie imp. des sciences de Petersbourg. 7. Série. Tome 32, Nr. 3—5. Leipzig, Voss. 3 Mk. 30 Pf.

Journal für die reine und angewandte Mathematik (begr. v. Crelle), herausgeg. v. L. Kronecker und K. Weierstrass. 97. Bd. 1. Heft. Berlin, G. Reimer. pro compl. 12 Mk.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica. Ed. R. v. Hanstein. 33. Jahrg. 2. Heft, Juli bis Decbr. 1883. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 2 Mk.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Franz, J., Festrede zu Bessel's hundertjährigem Geburtstage. Berlin, Friedländer. 1 Mk.

Weyr, E., Ueber die Geometrie der alten Aegypter. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

Reine Mathematik.

Rex, W., Vierstellige Logarithmentafeln. Stuttgart, Metzler. 1 Mk. 20 Pf.

Piltz, A., Ueber die Häufigkeit der Primzahlen in arithmetischen Progressionen und verwandte Gesetze. (Dissert.) Jena, Neuenhahn. 2 Mk.

Gegenbauer, L., Zahlentheoretische Relationen. (Akad.) Wien, Gerold. 25 Pf.

——, Ueber einige zahlentheoretische Functionen. Ebendas. 80 Pf.

Schumacher, J., Zur Theorie der biquadratischen Gleichungen. Frauenstein, Stifel. 1 Mk. 20 Pf.

Gegenbauer, L., Zur Theorie der Function $C_n^\nu(x)$. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk. 40 Pf.

Sersawy, V., Die Integration der partiellen Differentialgleichungen; allgem. Integrationsmethode. (Akad.) Ebendas. 5 Mk. 20 Pf.

Winckler, A., Ueber eine Methode zur Integration der nicht linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen. Ebendas. 25 Pf.

Biermann, O., Beitrag zur Theorie der eindeutigen Functionen mehrer Veränderlichen. (Akad.) Ebendas. 40 Pf.

Mildner, R., Beitrag zur Ausmittelung bestimmter Integrale. (Akad.) Ebendas. 1 Mk. 20 Pf.

Killing, W., Erweiterung des Raumbegriffs. Braunsberg, Huye. 1 Mk. 60 Pf.

Alth, R. v., Ueber das absolute Maasssystem und die Theorie der Dimensionen. Wien, Hölder. 1 Mk.

Klein, F., Ueber das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades. Leipzig, Teubner. 8 Mk.

Peschka, A. v., Darstellende und projective Geometrie. 3. Bd. Wien, Gerold. 24 Mk.

Angewandte Mathematik.

Brathuhn, O., Lehrbuch der Markscheidekunst. Leipzig, Veit & Comp. 8 Mk.

Hartl, H., Anleitung zum trigonometrischen Höhenmessen. 2. Aufl. Wien, Lechner. 3 Mk. 60 Pf.

Förster, W., Ortszeit und Weltzeit. Ein Wort zur Orientirung und Verständigung. Berlin, Möser. 1 Mk.

Kraft, F., Sammlung von Problemen der analytischen Mechanik. 1. u. 2. Lief. Stuttgart, Metzler. 4 Mk.

Backlund, A., Zur Entwickelung der Störungsfunction. (Akad.) Leipzig, Voss. 1 Mk.

Israel-Holzwart, H., Neue Wege zur Berechnung der Planetenbahnen aus drei Beobachtungen. Halle, Schmidt. 60 Pf.

Seydler, A., Ueber einige Formeln der Integrale des Zwei- und Dreikörperproblems. (Akad.) Wien, Gerold. 45 Pf.

Odstrcil, J., Ueber den Mechanismus der Gravitation und des Beharrungsvermögens. (Akad.) Ebendas. 20 Pf.

Pick, A., Die elementaren Grundlagen der astronomischen Geographie. Leipzig, Klinkhardt. 2 Mk. 40 Pf.

Backlund, A., Untersuchungen über die Bewegung des Encke'schen Kometen 1871—1881. (Akad.) Leipzig, Voss. 1 Mk. 50 Pf.

Januschke, H., Das Princip der Erhaltung der Energie als Grundlage der elementaren Dynamik. Troppau, Zenker. 1 Mk. 60 Pf.

Ginzel, K., Astronomische Untersuchungen über Finsternisse. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk. 40 Pf.

Hepperger, J. v., Ueber Lage und Gestalt von Isochronen in Kometenschweifen. Ebendas. 20 Pf.

Physik und Meteorologie.

Lommel, E., Die Beugungserscheinungen einer kreisrunden Oeffnung und eines kreisrunden Schirmchens, theoretisch und experimentell bearbeitet. (Akad.) München, Franz. 4 Mk. 50 Pf.

Verdet, E., Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichts; deutsch v. K. Exner. 2. Bd., 1. Abth. Braunschweig, Vieweg. 4 Mk. 80 Pf.

Pitsch, H., Beweis des Fermat'schen Satzes für die Lichtbewegung in doppelt brechenden Medien. (Akad.) Wien, Gerold. 25 Pf.

Boltzmann, L., Ueber die Möglichkeit der Begründung einer kinetischen Gastheorie auf anziehende Kräfte allein. (Akad.) Wien, Gerold. 25 Pf.

Quincke, G., Ueber elektrische und magnetische Druckkräfte. Heidelberg, Winter. 40 Pf.

Kllemenčič, J., Untersuchungen über das Verhältniss zwischen den elektrostatischen und elektromagnetischen Maasssystemen. (Akad.) Wien, Gerold. 80 Pf.

Koláček, F., Ueber eine Methode zur Bestimmung des elektrischen Leitungsvermögens von Flüssigkeiten. Ebendas. 25 Pf.

Berichtigungen.

Heft 4 S. 246 Z. 18 v. u. ist hinter „man“ hinzuzufügen „von $A'B'C'$“, Z. 17 v. u. ist „von“ zu ersetzen durch „aus“, Z. 11 v. u. statt „bemerkten“ ist zu lesen „bemerken“.


REESE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF CALIFORNIA


REESE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF CALIFORN

Historisch-literarische Abtheilung.

Recensionen.

Entgegnung.

Auf S. 121 dieses Bandes erwidert Herr Reiff auf die Recension einer seiner Arbeiten durch Herrn Kurz und zieht dabei mich, gelinde gesagt unnöthigerweise, in die Discussion mit hinein. Ich bin daher genöthigt, den Lesern dieser Zeitschrift darzulegen, worin meine Behauptung, die ich privatim Herrn Kurz mitgetheilt habe, bestand, und kann es ruhig ihrem Urtheil anheimstellen, ob „meine Formeln falsch sind“.

Herr Reiff schreibt auf S. 16 der fraglichen Schrift:

„Die neue Lage des Linienelementes (mit den Richtungscosinussen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$) bildet mit der ursprünglichen Lage desselben (α, β, γ) einen Winkel $\varepsilon\, dt$, dessen Projectionen auf die Coordinatenebenen yz, zx, xy der Reihe nach $\vartheta\, dt$, $\iota\, dt$, $\varkappa\, dt$ sein mögen. Nun ist, wenn $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ die Coss. einer auf α, β, γ und $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ senkrechten Richtung bedeuten (da $\varepsilon\, dt$, $\vartheta\, dt$, $\iota\, dt$, $\varkappa\, dt$ unendlich klein sind):

$$\varepsilon\, dt\, \alpha_2 = \vartheta\, dt, \quad \varepsilon\, dt\, \beta_2 = \iota\, dt, \quad \varepsilon\, dt\, \gamma_2 = \varkappa\, dt.“$$

Diese Gleichungen sind offenbar falsch, da die Projectionen des Winkels $\varepsilon\, dt$ nicht durch Multiplication mit den Richtungscosinussen der Normalen erhalten werden, wie Herr Reiff nunmehr, im vorletzten Alinea seiner Erwiderung, selbst andeutet. Mehr habe ich aber nicht behauptet.

Augsburg, den 6. October 1884. Braun.

Dieser Entgegnung füge ich, der zweite Unterzeichnete, noch Folgendes bei.

Auf S. 18 der genannten Schrift sagt Herr Reiff unmittelbar nach den Gleichungen N:

„$\vartheta\, dt$, $\iota\, dt$, $\varkappa\, dt$ sind die Projectionen des $\varepsilon\, dt$ auf die Coordinatenebenen, daher sind $\vartheta, \iota, \varkappa$ die Componenten der Winkelgeschwindigkeiten des Radiusvectors $\alpha\beta\gamma$.“ (Hierbei hat Herr Reiff selbst diese zwei Worte gesperrt drucken lassen; beim zweiten Worte soll der Singular stehen.) Man sieht daraus und aus der vorigen Erklärung von Braun, dass Herr Reiff selber die Verwechselung begangen hat, gegen

die er in seiner „Erwiderung“ eifert. Jedoch das Urtheil über den Ton dieser Erwiderung überlasse ich dem Unparteiischen.

Nur „sachlich“ (wie es auch meine Recension lediglich gewesen ist) will ich noch zum letzten Alinea der „Erwiderung“ erklären, dass

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

allerdings eine Specialität ist und dass ich noch Anderes dazu hätte folgern sollen, nämlich

$$\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

worauf Herr Reiff erst auf S. 33 seiner Schrift und nur im Vorbeigehen zu sprechen kommt mit den Worten:

„Dabei wird aber eine Art der Flüssigkeitsbewegung übergangen etc.“

Ort und Datum wie vorher. Kurz.

Die modernen Theorien der Chemie und ihre Bedeutung für die chemische Mechanik. Von Lothar Meyer. Breslau. 4 Aufl. 1881—83 und 5. Aufl. 1884.

Wenn man die Entwickelung der Chemie in den letzten Jahrzehnten genauer verfolgt, so lassen sich drei verschiedene Richtungen deutlich unterscheiden, nach welchen auf der Bahn der Wissenschaft fortgeschritten wird. Der eine Theil der Chemiker, und zwar der überwiegende, sucht durch immer vollkommenere Ausbildung der chemischen Synthese und Analyse, durch die Auffindung neuer Methoden, durch die Darstellung neuer Substanzen und ganzer Körperclassen das thatsächliche Material zu vermehren; er ist bestrebt, durch genaues Studium der Spaltungsproducte und durch die künstliche Darstellung complicirter Verbindungen aus einfacheren Aufschluss über die Constitution einer chemischen Verbindung, d. h. über die Gruppirungsweise der einzelnen Atome zu erhalten. Ein anderer Theil, an Zahl bedeutend geringer, aber in seinen Erfolgen gegen den andern nicht zurückstehend, wendet sich dagegen mehr den physikalischen Eigenschaften der chemischen Verbindungen zu und ist bestrebt, eine genaue Beziehung dieser Eigenschaften zu der chemischen Zusammensetzung aufzufinden und dadurch ebenfalls eine Beurtheilung der chemischen Constitution, des Wesens und der Zusammenfügungsweise der Atome zu gewinnen. Noch eine dritte Richtung macht sich allmälig immer mehr und mehr geltend. Während von den zuerst Genannten hauptsächlich nur das Endproduct einer chemischen Reaction ins Auge gefasst wird, die daneben herlaufenden Erscheinungen nur oberflächlich oder gar nicht berührt werden; während dort der Einfluss der Masse, der Zeit, der Wärme und anderer Energien nur insofern

in Betracht kommt, als davon die geringere oder grössere Ausbeute abhängig ist; während mit anderen Worten jene beiden Richtungen sich nur mit den Gleichgewichtszuständen der fertigen Verbindung, mit der Statik der Atome beschäftigen, ist es die letztere Richtung, welche gerade diesen Nebenerscheinungen ihr Hauptaugenmerk schenkt, den Verlauf und den Mechanismus einer Reaction genauer verfolgt und dadurch die dynamischen Gesetze der Atombewegung näher zu ergründen sucht. Es ist keine Frage, dass auch die chemische Affinität, wie andere Energien, in einer eigenthümlichen Bewegung der Atome besteht, und dass es daher wohl die letztere Richtung ist, auf welcher in der Zukunft die entscheidenden Resultate gefunden werden, welche die Ursache der chemischen Erscheinungen unserem Verständniss näher bringen wird.

Wenn nun hier auch zugegeben werden muss, dass der synthetischen Chemie noch viele wichtige Fragen zu lösen übrig bleiben und dass mit ihrer Hilfe noch unabsehbare Schätze interessanter Thatsachen und Beziehungen ans Licht gezogen werden dürften, und wenn daher auch vorläufig angenommen werden kann, dass die Chemie in den nächsten Jahrzehnten noch vorzugsweise in dieser synthetischen Richtung bearbeitet werden wird, so scheint doch auch der Zeitpunkt nicht mehr fern zu liegen, in welchem zur Verallgemeinerung und Begründung der chemischen Theorien eine genauere Kenntniss physikalischer und mechanischer Lehren immer mehr und mehr nothwendig werden wird. Das schon von Berthollet angestrebte, aber bei dem Mangel an positiven Thatsachen und exacten Untersuchungsmethoden nicht erreichte Ziel, die Chemie als eine Mechanik der Atome aufzufassen und in diesem Sinne zu bearbeiten, scheint in nicht mehr allzu ferner Zeit seiner Verwirklichung entgegenzugehen. Diesen Eindruck erhalten wir wenigstens, wenn wir den Inhalt des Meyer'schen Buches genauer studiren. Sind auch die bis jetzt aufgefundenen Resultate noch unvollständig, zum Theil zerstreut und zusammenhangslos, so lassen sich doch schon die Umrisse erkennen, welche das künftige Gebäude einer chemischen Mechanik einnehmen wird, und es muss als ein nicht hoch genug anzurechnendes Verdienst des Verfassers angesehen werden, dass er trotz des unfertigen Zustandes des neuen Gebietes sich nicht gescheut hat, den Rahmen zu skizziren, in welchen die künftigen Entdeckungen einst eingefügt werden können. Es wird ihm namentlich der gar zu leicht in Schematismus verfallende Chemiker zu grossem Danke verpflichtet sein, dass er das Interesse an diesen Dingen immer mehr erweckt und diesem die erweiterten Bestrebungen seiner Wissenschaft in einer objectiven, einfachen und leicht fasslichen Form vor Augen führt. Aber auch dem Physiker und Mathematiker scheint dieses Werk unentbehrlich zu sein. Kann doch die heutige Physik der chemischen Vorstellungen über die Zusammensetzung der Materie nicht mehr entbehren, wie wir dies, abgesehen von thermischen und

elektrischen Erscheinungen, deren Zusammenhang mit chemischen Ursachen längst nachgewiesen ist, bei der kinetischen Theorie der Gase und bei dem mit Erfolg gemachten Versuche, die Adhäsions- und Cohäsionserscheinungen auf chemische Affinitätsäusserungen zurückzuführen, sehen.

Die „Modernen Theorien" erscheinen in vierter und fast innerhalb Jahresfrist in fünfter Auflage, eingetheilt in drei Bücher: „Die Atome", „Die Statik der Atome" und „Die Dynamik der Atome". Die beiden ersten Bücher repräsentiren im Wesentlichen den Inhalt der früheren Auflagen, nur natürlich ergänzt und berichtigt nach den neuesten Entdeckungen, während das letzte Buch durchaus Neues enthält.

Im ersten Buche: „Die Atome", finden wir die Begründung der atomistischen Hypothese, die Bestimmung der Atomgewichte aus der Dichte der Gase, einschliesslich der Avogadro'schen Hypothese und eines kurzen Abrisses der kinetischen Theorie der Gase, ferner die Bestimmung der Atomgewichte mittels der Wärmecapacität der Elemente im starren Zustande (Dulong-Petit'sches Gesetz) und mittels des von Mitscherlich entdeckten Isomorphismus. Der letzte Abschnitt ist dem Wesen der chemischen Atome gewidmet. Er erwähnt hier der Versuche zur Ermittelung der absoluten Grösse der Atome, der Prout'schen Hypothese und deren theilweise Widerlegung durch die exacten Atomgewichtsbestimmungen von Stas und Marignac, der Regelmässigkeiten in den Zahlenwerthen der Atomgewichte und bringt schliesslich eine ausführliche Darstellung des periodischen Gesetzes der Elemente, an dessen Auffindung dem Verfasser und dem Russen Mendelejew der hauptsächlichste Antheil zukommt.

Das zweite Buch: „Die Statik der Atome", bespricht im ersten Abschnitte die Combinationsformen der Atome, im zweiten das Gesetz der Atomverkettung und die physikalischen und chemischen Hilfsmittel zur Feststellung derselben. Der dritte Abschnitt handelt von dem Moleculargewicht und der Atomverkettung von Stoffen, auf welche Avogadro's Hypothese nicht anwendbar ist; der vierte endlich von dem chemischen Werth oder dem Sättigungsvermögen der Atome. Hier werden die für den Chemiker besonders interessanten und wichtigen Fragen erörtert, ob der chemische Werth eines Atoms ein variabler oder constanter ist, ob die Affinitäten eines und desselben Atoms gleichartig sind oder nicht. Es wird auf die Abhängigkeit der chemischen Valenz von der Grösse des Atomgewichts hingewiesen und schliesslich die Unerlässlichkeit der Annahme von Molecularverbindungen betont.

Der interessanteste Theil ist aber das neu hinzugefügte dritte Buch: „Die Dynamik der Atome". Im ersten Abschnitt werden der chemische Umsatz, seine Ursachen und Formen im Allgemeinen besprochen, auf die Schwierigkeit einer scharfen Trennung der Atom- und Molecularmechanik, eines chemischen und physikalischen Vorgangs hingewiesen

und die älteren Versuche zur Messung der Affinität erwähnt. Der zweite Abschnitt handelt von dem chemischen Umsatz durch mechanische Erschütterung, vom labilen und stabilen Gleichgewicht der Molekeln und Atome und von dem Uebergang der einen Gleichgewichtslage in die andere, welche häufig, wenn gasförmige Zersetzungsproducte auftreten, von einer Explosion begleitet ist. Der dritte, grössere Abschnitt behandelt die Wärme als Ursache und Folge des chemischen Umsatzes. Hier werden zunächst die Erscheinungen der Dissociation besprochen und der dabei stattfindende Vorgang theoretisch untersucht. Wenn auch die bis zum Eintritt der Dissociation den Molekeln mitzutheilende Energie als ein Maass für die Stärke der Affinitäten betrachtet werden kann, und daher der Ermittelung der Zersetzungstemperatur eine grosse theoretische Wichtigkeit zukommt, so lässt sich damit noch keineswegs die Affinitätsgrösse der Atome bestimmen, weil in den wenigsten Fällen die Verbindung in die isolirten Atome zerfällt, sondern sich gegenseitig nur zu einfacheren Molekeln umsetzt. Eine gesonderte Ermittelung der beiden Vorgänge, der Dissociation im engeren Sinne und der ihr ähnlichen Umsetzung wird vielleicht nie möglich sein. Aus reiner Dissociation mit erst bei der Abkühlung nachfolgendem Umsatze erklären sich vielleicht auch die lange räthselhaft gebliebenen Erscheinungen, dass eine chemische Verbindung bei mässiger Erhöhung der Temperatur zerfällt, bei einer viel höheren aber sich wieder bildet. Daran reihen sich die Wärmewirkungen bei chemischen Processen. Nach der Hypothese, unbefriedigte Affinität sei potentielle Energie, kann die beim chemischen Umsatz erzeugte Wärme als ein Maass der Anziehung der Atome betrachtet werden. Da es aber bis jetzt nicht gelungen ist, weder die Verbindungen aus isolirten Atomen darzustellen, noch in solche zu zerlegen, so können wir auch nicht angeben, wie gross der Gesammtaufwand an potentieller Energie ist, welcher bei der Bildung aus isolirten Atomen in Wärme umgesetzt wird. Es ist bis jetzt nur möglich, den Unterschied verschiedener Affinitäten durch die zu beobachtende Wärmetönung zu messen, und dies wird noch dadurch erschwert, als wir den Antheil der Disgregation an derselben nicht oder nur angenähert zu schätzen im Stande sind. Er kommt dann auf die interessanten Beobachtungen von Thomsen über die Neutralisationswärmen von Basen und Säuren und auf die zu ganz ähnlichen Ergebnissen führenden volumchemischen Versuche von Ostwald zu sprechen, aus denen hervorgeht, dass die die Salzbildung begleitenden Vorgänge, die Wärmetönung, die Aenderung des Volumens, der Lichtbrechung u. s. w. nicht die Wirkung einer Wechselbeziehung der sich verbindenden Stoffe, also nicht der Affinität sein können, sondern dass man die Sache so auffassen muss, dass jedes Element im isolirten Zustande, und ebenso jede Säure, jede Base ein bestimmtes Quantum Energie enthält, welches beim Eintritt in eine Verbindung verfügbar und theils zur Aen-

derung der Disgregation verbraucht, theils als Wärme entwickelt wird. Diese Energie wird von der Affinität nicht erzeugt, sondern nur ausgelöst. Damit ist aber auch die Frage nach dem Zusammenhange der die chemischen Umsetzungen begleitenden Wärmetönungen mit der Affinität der Atome zu einander vorsichtiger zu beantworten, als dies bisher geschehen ist. Verfasser wendet sich gegen die Ansicht, dass immer diejenigen Verbindungen sich bilden, deren Entstehung mit der grössten Wärmeentwickelung verbunden ist, und besonders gegen den Berthelot'schen Grundsatz der grössten Arbeit (Principe du travail maximum), indem er zeigt, dass die demselben zu Grunde gelegte Vorstellung, die Atome und Molekeln seien ruhende Massentheilchen, nicht dem wirklichen Verhalten der Elemente und ihrer Verbindung entspreche, und dass auch die Beobachtungen, die Vermuthung, stärkere Affinität entwickle immer die grössere Wärme, nicht überall bestätigen.

In sehr ausführlicher Weise ist in dem folgenden Capitel die chemische Massenwirkung berücksichtigt. Von der Analogie zwischen der Wirkung der Masse (d. h. Anzahl der Atome und Molekeln) und der Wärme (Intensität der Atom- und Molecularbewegung) ausgehend wird zuerst die alte Berthollet'sche Lehre von der Massenwirkung, dann die neuere Guldberg und Waage'sche Theorie ausführlich entwickelt und deren Anwendbarkeit zunächst auf die umkehrbaren Processe (Esterbildung, Neutralisation verschiedener Basen und Säuren) nachgewiesen. Daran reiht sich die Bestimmung der Verwandtschaftscoefficienten und die Feststellung des Begriffes Avidität und deren Ermittelung aus den Aenderungen des Volumens und des Lichtbrechungsvermögens von Salzlösungen, sowie die Beziehung der Avidität zu den die Neutralisation begleitenden Raumänderungen und Wärmetönungen. Dann werden die Massenwirkung der Gase und Berthollet's Lehre vom Einflusse des Aggregatzustandes, Guldberg und Waage's Theorie für zwei unlösliche Stoffe und die Unzulänglichkeit derselben für den Fall, dass nur ein Stoff unlöslich ist, die Berechtigung der Theorie und die Ostwald'schen Versuche zur Prüfung derselben erwähnt und zuletzt die Wichtigkeit weiterer Erforschung der Massenwirkung in umkehrbaren und nicht umkehrbaren Vorgängen betont.

Ein neues, nur kurzes Capitel ist dem chemischen Umsatz durch Licht gewidmet. Bei dem Mangel an genaueren Messungen wird hier nur auf die Analogie der Lichtwirkung mit der Dissociation, auf den Einfluss der Farbe und auf die als Induction bezeichnete allmälige Steigerung der Lichtwirkung hingewiesen.

Ausführlicher ist dagegen wieder in dem nächsten Capitel der chemische Umsatz als Ursache und Folge der Elektricität behandelt. Hier begegnen wir bekannten Thatsachen der Elektricitätslehre, jedoch, indem die Abhängigkeit der Erscheinungen von der stofflichen Natur der

betheiligten Körper als Hauptsache behandelt wird, in einer besonders für die Zwecke des Chemikers brauchbaren neuen Form. Zuerst werden die Beziehungen zwischen Affinität und Elektricität, die Volta'sche Contacttheorie und die Berzelius'sche elektrochemische Theorie mit den Spannungsreihen der Elemente und Elementfamilien erörtert. Daran knüpft sich die Frage nach dem Wesen der Elektricität und deren Auftreten durch die Störung des elektrischen Gleichgewichts entweder durch Wärme (Thermostrom), oder durch chemische Umsetzung (galvanischer Strom), sowie deren Verschwinden durch den Gleichgewichtszustand der Polarisation. Daran reihen sich die bekannten Gesetze zur Ermittelung der Stromintensität und der elektromotorischen Kraft, und die Beziehung der letzteren zur Summe der Wärmetönungen. Dann wird der Vorgang der Elektrolyse näher entwickelt, der Unterschied zwischen metallischem Leiter, Elektrolyt und Nichtleiter, sowie die Abhängigkeit der Elektrolysirbarkeit von der chemischen Zusammensetzung betont und darauf hingewiesen, dass nur die vier Salzbilder, Sauerstoff und Schwefel elektrolysirbare Verbindungen geben, während Stoffe, welche keines dieser sechs Elemente enthalten, durch den Strom nicht zerlegt werden, sondern entweder Leiter erster Classe oder Nichtleiter seien. Hierauf folgt eine übersichtliche Zusammenstellung des Verhaltens der wichtigsten Verbindungen, welche die sechs Elektrolyte bildenden Elemente mit anderen eingehen, nach den natürlichen Familien geordnet. An die Erklärung des Unterschieds der beiden Arten elektrischer Leitung, im Wesentlichen darin bestehend, dass in metallischen Leitern die Elektricität von einem Massentheilchen auf das andere fortschreitet, während die Theilchen an ihrer Stelle bleiben, im Elektrolyten aber dieselben zugleich mit der Elektricität sich fortbewegen, schliessen sich die darauf zurückzuführenden Beobachtungen, wie die Wanderung der Ionen und ihre Geschwindigkeit, die Bewegung der Lösungsmittel, die Mitführung indifferenter Paarlinge durch das Anion und Kation an. Daraus folgt aber auch eine Widerlegung der veralteten Vorstellung vom elektrolytischen Vorgang, derselbe bestehe in einer Ueberwindung der Affinität durch die Elektricität, was in noch vollständigerer Weise und von Grund aus durch die von Clausius gegebene kinetische Erklärung im Innern des Elektrolyten geschehen ist. Mit der Bestätigung dieser kinetischen Auffassung durch den Zusammenhang der Leitungsfähigkeit mit der Beweglichkeit der Molekeln (Diffusionsgeschwindigkeit), und mit dem Vorgange bei der Elektrolyse von Gemischen, sowie mit der Verdunkelung dieser Vorgänge durch secundäre Wirkungen schliesst dieses interessante Capitel ab.

Der letzte Abschnitt handelt von der Stabilität der chemischen Verbindungen und deren Abhängigkeit von der Natur, dem Gewicht und der Zahl der Atome, von der Wirkung der Substitution, und schliesst mit der Aufforderung, durch eine möglichst auf quantitative Messungen

gestützte Vergleichung analoger Gruppen von Verbindungen, durch Feststellung der Unterschiede und Aehnlichkeiten allmälig das Material zu einer vergleichenden Affinitätslehre anzusammeln.

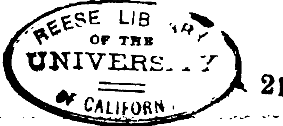
Dies ist in kurzen Zügen der reiche Inhalt des Meyer'schen Buches. Es ist kein Zweifel, dass dasselbe, das schon in seinen früheren Auflagen dem Chemiker und Physiker ein geschätzter anregender Berather gewesen ist, in seiner neuen, erweiterten Form in noch höherem Grade ein solcher sein wird.

Stuttgart. HELL.

Grundzüge der Elementarmechanik. Von Dr. WERNICKE. Braunschweig, Schwetschke. 1883. 445 S.

Das Werk soll dem formalen Abschluss des gesammten mathematisch-naturwissenschaftlichen Schulunterrichts dienen, enthält also nicht blos das, was gewöhnlich unter Mechanik verstanden ist, sondern eine Zusammenfassung und Eintheilung der möglichen und wirklichen Bewegungen im Raume. Die letzteren geben das Gebiet der Physik. Die Grundzüge der Elementarmechanik sind als Einleitung in die Physik darzustellen. Das Charakteristische der Physik ist Beobachtung und Messung nach den Einheiten der Länge, der Zeit und der Masse. Das Gebiet der Physik wird den Sinnesgebieten entsprechend eingetheilt nach den Tast-, Wärme-, Geruchs-, Geschmacks-, Licht- und Tonempfindungen. Dazu kommt die Elektricität, die „vorerst noch als Specialgebiet zu behandeln" ist, bis sie in die allgemeine Theorie der physischen Bewegungen eingefügt wird. Die drei Gebiete der Tast-, Geruchs- und Geschmacksempfindungen sind nicht ausgebildet, also bleiben nur Elektrik, Calorik, Akustik und Optik. An die Physik schliesst sich die Chemie an, die Lehre von den stofflichen Beziehungen von Empfindungsgruppen und die Gebiete der speciellen Physik, Physiologie, Psychophysik, Naturlehre u. s. w.

Es folgt nun die physikalische Mechanik; zuerst Sätze über Sinn und Richtung, über Bestimmung der Lage von Punkten und Punktsystemen (Coordinaten), dann über Strecken und deren Addition nach Grassmann, Momente von Punktsystemen, Drehmomente und Trägheitsmomente. Als zweiter Theil der physikalischen Mechanik reiht sich die Phoronomie an, zunächst die Bewegung eines Punktes bei gegebener Bahn. Es wird mit besonderer Ausführlichkeit und Deutlichkeit die Beziehung von Lage und Zeit behandelt, der Begriff der Geschwindigkeit und der Beschleunigungen verschiedener Ordnung ohne Voraussetzung der Differential- und Integralrechnung dargelegt und an einzelnen Beispielen erläutert. Die Zusammensetzung und Zerlegung von Be-



wegungen gründet sich auf die Zusammensetzung von Strecken. Die Wurfbewegung und die Schwerkraft werden eingehend behandelt. Dann folgt die Bestimmung der Bewegung durch die Projection, wozu als Beispiel die Schwingungsbewegung, insbesondere das Pendel dient, und die Polarmethode mit der Newton'schen Centralbewegung als Beispiel.

Nach der Bewegung des Punktes kommen die Punktsysteme der Physik zur Betrachtung, die allgemeinste Bewegung eines unveränderlichen Systemes, Translation und Rotation, Schraubenbewegung; elastische Systeme, Wellenbewegung; und schliesslich das dissolute System, für welches als Beispiele der Springbrunnen und die Theorie des Schiessens gewählt sind.

Der dritte Abschnitt der physikalischen Mechanik, die Dynamik der Physik, nimmt die Masse hinzu, behandelt die Energie und Bewegungsgrösse, die Kräfte, das Princip von d'Alembert, das der virtuellen Verschiebungen u. s. w. Es wird die Art der Messung von Länge, Zeit, Masse und Dichte dargelegt und dann die Systeme der physikalischen Dynamik betrachtet, der starre Körper und die Elasticitätsconstanten, die Flüssigkeiten mit den Capillarerscheinungen und dem Archimedischen Princip, die Gase mit dem Luftdruck und dem Boyle'schen Gesetz. Zum Schlusse kommt eine kurze Darstellung der atomistischen Hypothese.

Damit ist die reiche Fülle des gebotenen Stoffes kurz aufgeführt. Man sieht, es handelt sich darum, alles an richtiger Stelle einzufügen und damit Klarheit in den Zuhammenhang des Ganzen zu bringen. Jedem Lehrer der Mechanik und Physik wird Stoff genug gegeben, um sich nach allen Seiten hin zu orientiren. Man kann mit manchem nicht einverstanden sein, z. B. mit der Eintheilung des Gebietes der Physik, mit der scharfen Abweisung der Atomistik, die überhaupt in Physik und Mechanik eine unbedeutende Rolle spielt; aber mit Genuss und Gewinn wird man immer das Werk studiren. Freilich bei dem heutigen Stande des naturwissenschaftlichen Unterrichtes kann der Inhalt eines solchen Werkes von den Schülern einer Mittelschule gewiss nicht verarbeitet werden. Wir betrachten es nur als Hilfsmittel für den strebsamen Lehrer.

P. Zech.

Die Mechanik in ihrer Entwickelung. Von Dr. Mach. Leipzig, Brockhaus. 1883. 480 S.

Es ist dies ein Band der „internationalen wissenschaftlichen Bibliothek“, in welchem der Verfasser darlegen will, wie der Inhalt der Mechanik sich aus der Untersuchung einer Reihe sehr einfacher mechanischer Vorzüge herausgebildet hat. Zu Befriedigung seiner Bedürfnisse macht der Mensch Erfahrungen, die er gedankenlos zunächst verwendet,

bis einzelne Stände zu Befriedigung bestimmter Bedürfnisse sich herausbilden und durch Lehre und Tradition ihre Erfahrungen den folgenden Generationen mittheilen. Dadurch entsteht ein Anlass zum Nachdenken und Untersuchen, das sich vom nächsten Zweck, Befriedigung leiblicher Bedürfnisse, ganz loslösen und zur eigentlichen Wissenschaft werden kann. Der Verfasser sucht die Richtigkeit dieser seiner Ansicht über die Natur aller Wissenschaften als einer Oekonomie des Denkens an den Principien der Mechanik durchzuführen. Es geschieht dies beim Hebel, bei der schiefen Ebene, dem Parallelogramm der Kräfte und dem Princip der virtuellen Verschiebungen. „Dem Bedürfniss, die Erfahrungen des Handwerkes in mittheilbare Form zu bringen und dieselben über die Grenzen des Standes und des Handwerkes hinaus zu verbreiten, verdankt die Wissenschaft ihren Ursprung. Aus ökonomischen Gründen werden Thatsachen und Regeln zusammengefasst und auf einen Ausdruck gebracht." Die Betrachtung der flüssigen Körper hat nicht viele neue Gesichtspunkte geliefert, doch hat sich dabei zuerst die Vorstellung eines physikalisch-mechanischen Continuums gebildet. Es hat sich dadurch eine viel freiere und reichere mathematische Anschauung entwickelt, als dies durch Betrachtung selbst eines Systemes von mehreren starren Körpern möglich war. Aehnliches lässt sich von den Gasen sagen.

Der Verfasser behandelt dann die Entwickelung der Principien der Dynamik, die Entdeckungen Galilei's über die Fallgesetze, die Leistungen von Huyghens im Gebiete des Pendels und die Arbeiten Newton's, welcher durch die Entdeckung der allgemeinen Gravitation den Gesichtskreis der mechanischen Physik beträchtlich erweitert und die Aufstellung der heutigen Principien der Mechanik zu einem Abschluss gebracht hat, nach welchem nichts wesentlich Neues mehr ausgesprochen wurde. Dabei giebt es Gelegenheit, sich über die Begriffe von Zeit und Raum auszusprechen und über die Art, wie die Grundbegriffe der Mechanik aneinander zu reihen sind. Der Verfasser sagt, man habe von dem Erfahrungssatz auszugehen, dass gegenüberstehende Körper entgegengesetzte Beschleunigungen nach der Richtung ihrer Verbindungslinie bestimmen; das negative umgekehrte Verhältniss der gegenseitigen Beschleunigungen giebt das Massenverhältniss, das vom physikalischen Zustande unabhängig ist. Ferner zeigt die Erfahrung, dass die Beschleunigungen eines Körpers durch mehrere andere unter sich unabhängig sind. Endlich ist unter bewegender Kraft das Product aus Masse und Beschleunigung zu verstehen. „Diese Sätze erfüllen die Forderung der Einfachheit und Sparsamkeit, welche man an dieselben aus ökonomisch-wissenschaftlichen Gründen stellen muss."

In einem dritten Capitel wird die weitere Verwendung der Principien und die deductive Entwickelung der Mechanik behandelt. Es

handelt sich zunächst um besondere Regeln, welche dazu dienen, bestimmte Aufgaben nach der Schablone zu behandeln, ohne in die Einzelheiten näher einzugehen: die Erhaltung der Bewegungsgrösse in einem nicht von aussen beeinflussten System, von Newton gefunden; der Satz von der Erhaltung der Flächen von Euler und Bernouilly; die Lehre vom Stosse, besonders von Huyghens ausgebildet; d'Alembert's Satz und der Satz der lebendigen Kräfte, das Princip des kleinsten Zwanges und der kleinsten Wirkung und endlich der Hamilton'sche Satz. Es wird hierbei an verschiedenen Beispielen gezeigt, dass mit allen diesen Sätzen nichts Neues in die Mechanik eingeführt wird, sondern dass sie nur das Bekannte in anderer Form geben, dieselben Thatsachen von verschiedener Seite betrachten.

Das vierte Capitel ist der formellen Entwickelung der Mechanik gewidmet. Nachdem die Grundsätze der Mechanik festgestellt waren, konnte die Entwickelung neuer Sätze aus ihnen auf deductivem Wege stattfinden, wie im dritten Capitel gezeigt wird. Eine folgende Periode in der Entwickelung der Wissenschaft ist dann das Bestreben, alles Errungene in ein System zu bringen, so dass jedes Einzelne auf möglichst einfachem Wege gefunden werden kann. Nachdem der Einfluss der isoperimetrischen Probleme und der Variationsrechnung und dann die theologischen und teleologischen Gesichtspunkte in der Mechanik beleuchtet sind, geht der Verfasser zur analytischen Mechanik über, wie sie Lagrange ausgebaut hat als „eine grossartige Leistung in Bezug auf die Oekonomie des Denkens". Neue principielle Aufklärungen giebt die analytische Mechanik nicht, als ihr Ziel ist die einfachste praktische Bewältigung der Aufgaben zu betrachten. Von besonderem Interesse sind die Ansichten, welche der Verfasser in einem folgenden Abschnitt über die Oekonomie der Wissenschaft äussert.

In einem letzten Capitel werden die Beziehungen der Mechanik zu anderen Wissensgebieten kurz behandelt, zur Physik und zur Physiologie.

Für Denjenigen, der mit der Mechanik einigermassen vertraut ist, ist es ein wahrer Genuss, die consequente Durchführung der Anschauung des Verfassers und sein Talent, die verschiedenen Betrachtungsweisen der Mechanik an einfachen Beispielen zu vergleichen, im Einzelnen zu verfolgen. Ein populäres Werk im gewöhnlichen Sinn dieses Wortes ist es nicht, wie die anderen Bände der internationalen wissenschaftlichen Bibliothek; es verlangt mathematische Kenntnisse in ziemlichem Umfang, aber um so grösser ist der Gewinn für den Leser, dem solche Kenntnisse zu Gebote stehen.

P. Zech.

Lehrbuch der Spectralanalyse. Von Dr. KAYSER. Berlin, Springer. 1883. (358 S.)

Obgleich die Spectralanalyse noch manche dunkle Punkte enthält, insbesondere in der Erklärung der mehrfachen Spectra der Elemente, so ist es doch wünschenswerth, von der grossen Fülle von Thatsachen, die vielfach zerstreut publicirt sind, eine wissenschaftliche Zusammenstellung zu erhalten, wie sie hier der Verfasser giebt. Im ersten Abschnitt wird die Emission des Lichtes behandelt, die verschiedenen Wirkungen der Aetherwellen, die verschiedenen Spectra und ihre Darstellung. Die in steter Bewegung befindlichen Molekeln geben durch ihre lebendige Kraft die Temperatur des Körpers, die Schwingungen der Atome in den Molekeln wirken auf den Aether und erzeugen Licht. Diese Annahme wird consequent durchgeführt. Steigt die Temperatur, so werden die Molekulargeschwindigkeiten grösser, also auch infolge der zahlreicheren Stösse die Atom- und Aetherschwingungen. Bei grösserer Steigerung der Temperatur tritt Dissociation, Zerlegung der Molekel ein und damit Aenderung der Art der Lichtschwingung. Aber auch Elektricität ohne Temperaturerhöhung kann Lichtwirkung hervorbringen, sie wirkt zunächst auf den Aether, welcher die Atome umgiebt, und setzt durch jene diese in Bewegung. Es lassen sich bis jetzt alle Erscheinungen der Spectralanalyse durch diese Annahme erklären.

Es folgt die Brechung des Lichtes und die Betrachtung der Spectralapparate, dann die Beugung und die Gitter, die Untersuchung des ultrarothen und ultravioletten Lichtes, endlich die Geschichte und Gesetze der Spectralanalyse, die verschiedenen Arten der Spectra und die kurzen und langen Linien Lockyer's.

Der zweite Abschnitt beschäftigt sich mit der Absorption und hier zunächst mit dem Verhältniss der Emission und Absorption, mit dem Gesetze von Kirchhoff, welches Grundlage der ganzen Spectralanalyse geworden ist. An seiner Hand wird die Bedeutung der Absorptionsspectra, das Sonnenspectrum und die Constitution der Sonne betrachtet. Mit der Anwendung der Spectralanalyse auf die Himmelskörper, den Anschauungen Lockyer's über Dissociation der Elemente und der quantitativen Spectralanalyse nach Vierordt schliesst dieser Abschnitt.

Der letzte Abschnitt giebt eine Uebersicht über die bisher gemessenen Spectra in Wellenlängen nebst den Literaturangaben, nach den chemischen Elementen geordnet. Als Tafeln sind beigegeben: das normale Sonnenspectrum von Angstrom, der ultraviolette Theil nach Cornu und der ultrarothe nach Abney.

Wir danken dem Verfasser, dass er ein Werk geschaffen hat, das in allen Fragen der Spectralanalyse sichere und klare Auskunft ertheilt, und empfehlen dasselbe auf's Angelegentlichste Jedermann, der mit Spectralanalyse zu thun hat.

P. ZECH.

Einleitung in die theoretische Physik. Von Dr. F. Neumann, herausgegeben von Dr. Pape. Leipzig, Teubner. 1883. (291 S.)

Die zweite Publication von Vorträgen Neumann's an der Universität Königsberg, welche von Schülern desselben gesammelt werden sollen. Die erste, welche den Magnetismus enthielt, wurde im 27. Jahrgange dieser Zeitschrift (S. 217) angezeigt. Der vorliegende Band enthält die Lehre von der Schwere und die Theorie des Pendels, die Hydrostatik und Aerostatik, den Satz von der Erhaltung der Kraft, die Hydrodynamik und Aerodynamik. Wenn die Publicationen rasch sich folgen, werden wir endlich ein vollständiges Lehrbuch der mathematischen Physik erhalten. P. Zech.

Kinematik des Strahles. Von Wittenbauer. Graz, bei Leuschner. 1883. (105 S.)

Bei der Bewegung in der Ebene wird gewöhnlich der Punkt als das bewegliche Element betrachtet. Der Verfasser sucht die Gerade als solches einzuführen, er erhält eine Reihe von Sätzen, welche denen des Punktes dual entsprechen. Man erhält auf diese Weise eine Ergänzung der sonst nur in der ersten Form gegebenen Sätze der Mechanik in der Ebene. So entspricht der Centralbewegung die Linearbewegung des Strahles, wobei sämmtliche Beschleunigungsdrehpunkte in einer Geraden liegen; bei einem Strahlensystem liegen die Krümmungsmittelpunkte der von sämmtlichen Strahlen des Systemes beschriebenen Bahnen in jedem Moment der Bewegung auf einem Kreise und eine grosse Zahl anderer Sätze ergiebt sich, die den bekannten Sätzen über Momentanaxe, Beschleunigungscentrum u. s. w. entsprechen. P. Zech.

Theoretische Untersuchungen über die regelmässigen Abweichungen der Geschosse und die vortheilhafteste Gestalt der Züge. Von Carl Cranz. Inauguraldissertation. Stuttgart, Metzler. 1883. (70 S.)

Zweck der vorliegenden Arbeit ist, Gleichungen für die Translation des Schwerpunktes eines Geschosses und der Rotation der Geschossaxe um den Schwerpunkt festzustellen, die Gleichungen zu integriren und die Resultate zu deuten. Die Integration geschieht, indem kleine Grössen vernachlässigt und die Gleichungen für Translation unabhängig von denen der Rotation integrirt werden. Als Resultat ergiebt sich, dass der Schwerpunkt eine doppelt gekrümmte Curve beschreibt, deren Horizontalprojection sich von der durch die Geschützaxe gelegten

Verticalebene rasch entfernt. Die Geschossaxe beschreibt in regelmässigen Perioden einen Kegel, dessen Spitze der Schwerpunkt und dessen Leitlinie eine Rosette mit drei sich stetig erweiternden Blättern ist. Für die vortheilhaftesten Züge werden verschiedene Voraussetzungen betrachtet, geringste Abweichung der Geschossaxe von der Flugbahn, Maximum der Austrittsgeschwindigkeit, Gleichheit der Reibung in den Zügen und grösster Vortheil in der allmäligen Pulverentwickelung.

P. Zech.

Handbuch der statischen Elektricität. Von Mascart. Deutsch von Wallentin. I. Band, I. Abth. Wien, Pichler. 1883. (539 S.)

Im Gegensatz zu der Darstellung der Werke von Maxwell und von Wiedemann über Elektricität, bei welcher eine Trennung von statischer und dynamischer Elekricität als nicht mehr haltbar betrachtet wird, hat Mascart einen „Traité d'électricité statique“ geschrieben, in welcher er sich, wie Ries in seinem Lehrbuch der Reibungselektricität, auf diese beschränkt. Es werden von Mascart besonders die älteren Untersuchungen berücksichtigt, um den geschichtlichen Entwickelungsgang der Elektricitätslehre darzustellen. Die erste Abtheilung des ersten Bandes (zwei Bände sollen es werden) giebt die Gesetze der elektrischen Wirkungen, der Zerstreuung, der Anordnung auf Leitern, der Influenz, des Potentiales und der aus den allgemeinen Theoremen sich ergebenden Vertheilung der Elektricität auf Leitern. Zusätze zu dem Original aus den Werken von Maxwell, Clausius und W. Thomson finden sich besonders beim Potential. Die Ausstattung des Werkes ist vorzüglich. Eine nähere Besprechung behalten wir uns vor, bis der erste Band vollständig vorliegt.

P. Zech.

Licht und Wärme. Von E. Gerland. Leipzig und Prag, 1883. (305 S.)

Ein Band aus dem „Wissen der Gegenwart, deutsche Universalbibliothek für Gebildete“. Es giebt eine populäre Darstellung der Lehre vom Licht und von der Wärme mit vielen Illustrationen, gut gewählten Beispielen und, was bei solchen Werken besonders zu rühmen ist, grosse wissenschaftliche Correctheit.

P. Zech.

Der Kreislauf im Kosmos. Von Joseph Epping. Freiburg i. B., 1882. (103 S.)

Der Verfasser wendet sich gegen den atheistischen Naturalismus und benützt dazu die Theorie vom endlichen Stillstand aller Naturprocesse. Der ewige Kreislauf sei damit verneint, es müsse also die Welt einen Anfang gehabt haben, ein Schöpfer sei nothwendig an-

zunehmen. Auch die Kant Laplace'sche Theorie der Entstehung des Sonnensystemes könne nicht helfen. Es wird dann die Methode der Gegner hervorgehoben. „Gut verstand es D. Strauss, die Lehren der christlichen Religion zu verdrehen und dann, so zugestutzt, mit Hohn und Spott zu überschütten.“ Insbesondere wird die Methode des Freiherrn du Prel in seinem „Kampf ums Dasein“ angegriffen. Weiter wird die Kant-Laplace'sche Theorie im Einzelnen betrachtet und kritisirt und dadurch „wirksamer gestützt“, dass die Gravitation als Hauptagens gegenüber der sonst betonten Rotation festgestellt wird. Endlich wird der Weltenuntergang und der Stillstand der Weltenuhr auseinandergesetzt. „Wie man auch das Ding anfassen mag, nirgends findet sich ein fester Halt; es ist nur ein morsches Brett, das beim ersten Auftreten zerknickt, ein Strohhalm, der kaum angefasst, zerreisst.“ Die Abhandlung ist eine Ergänzung zu den „Stimmen aus Maria-Laach“, eine Streitschrift der katholischen Theologie gegen die Naturwissenschaft.

P. Zech.

Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes. Von Verdet. Deutsch von Dr. Exner. Braunschweig, Vieweg. 1881, 1883.

Im letzten literarischen Bericht wurde das Erscheinen der ersten Abtheilung des ersten Bandes angezeigt. Jetzt ist der erste Band vollständig. Das Werk von Verdet schliesst mit dem Jahr 1865 ab, der Uebersetzer fügt in seiner Bibliographie noch mehr als 50 Abhandlungen und Werke hinzu, so dass vieles Neuere in der Uebersetzung zu finden ist. Gleichwohl ist der Umfang des Bandes um beinahe 100 Seiten geringer, als der des Originales. Es ist keine eigentliche Uebertragung, sondern eine Bearbeitung mit starken Verkürzungen und Zusammenziehungen, und das nicht immer zum Vortheil der Uebersetzung. Man vergleiche z. B. die Darstellung über die Wirkung einer Elementarwelle (Nr. 57) mit Verdet's Auseinandersetzung, so wird man finden, dass die Klarheit des Ganzen entschieden durch die Zusammenziehung leidet. Ueber die Aenderungen gegenüber dem Original, soweit es sich um Neues handelt, ist in dem Vorwort genauer Nachweis gegeben.

Der vorliegende erste Band enthält die geometrische Optik in sehr reducirter Form, die Entwickelung der Undulationstheorie, Interferenz und Beugung, dann die Theorie der Doppelbrechung nach Fresnel und Cauchy und die Lichtbewegung in einaxigen und zweiaxigen Krystallen. Der folgende zweite Band wird im Allgemeinen die Farbenerscheinungen darstellen, als Folge der Einwirkung der Körpermolekel auf den Aether.

P. Zech.

J. G. Munker, Professor a. D., **Die Grundgesetze der Elektrodynamik, synthetisch hergeleitet und experimenteal geprüft.** Mit Holzschn. Nürnberg, H. Ballhorn. 1883. 1 Mark. (27 S. und 2 S. Vorwort.)*

Im Vorworte erklärt der Verfasser, „leicht und sicher“ gefunden zu haben, dass die Einwände von Grassmann und Stefan gegen die Ampère'schen Gesetze „völlig unbegründet“ sind. „Ich fand aber auch einen unanfechtbaren Beweis, dass der Satz Ampère's, nach welchem die Wirkung irgend eines geschlossenen Stromes auf ein beliebiges Stromelement senkrecht zu letzterem gerichtet sein muss, „„offenbar““ falsch ist, („„sein muss““ steht im Texte), dass also auch die Formel Ampère's, weil sie zum Theil durch diesen Satz bestimmt wird, nicht richtig sein kann.“

Sein (Munker's) elektrodynamisches Grundgesetz dagegen harmonire vollkommen („was ich besonders hoch anschlage“) „mit dem Resultate, welches Ohm für die Wechselwirkung zweier aufeinanderfolgender Elemente eines Stromes erhielt“.

Welches soll dies Resultat sein? Seite 26 steht als VII. und letztes Capitel dasjenige mit dem Titel „Ohm über die Fernwirkung zwischen galvanischen Strömen“ und wird § 106 seines Compendiums der Physik citirt. Ich schlug das letztere sogleich auf, um so mehr, weil Munker's VII. Capitel nur 20 Zeilen umfasst, und fand darin den Ausspruch Ohm's: „Ich unterbrach meine hierauf bezüglichen Arbeiten mit dem Vorsatze, sie bei grösserer Musse wieder aufzunehmen, ohne zu ahnen, dass eine dämonische Verkettung von Umständen mich für immer davon abhalten werde.“ Die Vorrede zu Ohm's Compendium ist mit Ostern 1854 datirt, und am 6. Juli desselben Jahres starb sein Verfasser.** Am Schlusse von § 106 sucht Ohm noch Andere zur Aufnahme dieses Gegenstandes zu animiren. Jedoch wollen wir nun nach dieser Vorbereitung auf die Kapitel I bis VII noch eingehen!

I enthält „Grundsätze“, deren erste fünf in der bekannten Formel von Ampère enthalten sind. Aber der 6. bis zum 9. incl. sind unnöthig, weil gerade so selbstverständlich als wie der Satz, dass gleiche Ursachen gleiche Wirkungen hervorbringen.

II. „Richtung der Fernwirkung zwischen elektrischen Stromelementen.“ Aus Grundsätzen über Symmetrie (10 und 11) erschliesst Munker den Satz 12: „Die Wirkung zweier Ströme, die in derselben geraden Linie liegen, fällt in diese“, und die Sätze 13 bis 15. Dieser Satz 12 stimmt mit Ampère's und nicht mit Grassmann's Annahme***, was Munker

* S. 65 der hist.-lit. Abtheilung dieses Bandes der Zeitschrift schon in Kürze angezeigt.

** Vergl. die Gedächtnissrede auf Ohm von Director Dr. C. M. v. Bauernfeind. München, F. Straub. 1882.

*** Pogg. Annalen Bd. 64 (1845) S. 1 flg.

nicht erwähnt; dagegen setzt er zu seinem Satze 17 die Anmerkung, dass durch diesen die Ansicht Grassmann's widerlegt sei. Dies ist irrthümlich, da der Satz 17 auch aus Grassmann's Ansicht hervorginge. Satz 19 ist bedeutungslos, aber nicht nach der Ansicht Munker's, welche sogleich in

III eine „Berichtigung eines Ampère'schen Satzes" anstrebt. Dieses wenig mehr als eine Seite umfassende Kapitel schliesst mit den Worten: „Näheres darüber werde ich später folgen lassen." Darin hat III mit dem obenerwähnten VII eine zweifache Aehnlichkeit, die mich weiteren Berichtes über III überhebt.

IV „Grösse der Wirkung zwischen zwei unendlich kleinen Stromelementen". Satz 20 ist die Reproduction des Ampère'schen, nach welchem diese Wirkung bei rechtwinkliger Lage der beiden Stromelemente AB und CD Null sein soll, wenn die Mitte von A mit CD in derselben Ebene liegt. Da nun Stefan diesen Satz nebst Begründung gewiss kannte und Munker's Begründung die nämliche ist wie bei Ampère*, so können unmöglich „dadurch die entgegenstehenden Bedenken Stefan's** gehoben erscheinen", wie Munker in der Anmerkung S. 9 sagt.

S. 10 liest man den befremdenden Satz

$$21)\qquad w = c \cdot \frac{i\,i'\,ds\,ds'}{r}$$

für die Wirkung von zwei parallelen Elementen, welche senkrecht gegenüberliegen. Die vorausgehende Entwickelung desselben ist originell, aber willkürlich und unzulässig, wie auch ihr Resultat. Die zweite Potenz von r kommt erst S. 14 wieder zum Vorschein und da erst widmet ihr Munker die wenigen Worte, dass sich „die Formel für lineare Stromelemente von derjenigen für körperliche nur dadurch unterscheide, das erstere r, letztere r^2 im Nenner hat". Die Munker'sche Entwickelung dazu steht S. 11. Und S. 15 folgt

$$26)\qquad W = -\tfrac{3}{4}\,\frac{J.\,J'\,ds\,ds'}{r^2}\,(\cos\varepsilon - \cos\vartheta\,\cos\vartheta')$$

als Munker's elektrodynamisches Grundgesetz. (Die grossen Buchstaben für die Intensitäten deuten auf das körperliche oder cylindrische Element, während die kleinen des lineare Element betreffen).

Aus dieser Formel folgt für zwei Elemente in derselben Geraden die Wirkung Null, während Ampère, dessen Formel den bekannten

---

* S. z. B. F. Neumann's Vorlesungen über elektrische Ströme, herausgegeben von Vandermüll. Leipzig, Teubner. 1884. 96 S.

** Mir ist zur Zeit nur Stefan's neuere Abhandlung in Wiedemann's Annalen Bd. 12 (1881) zugänglich, in welcher Stefan seine älteren Abhandlungen citirt und theilweise reproducirt. Letztere Abhandlung ist in den Berichten der Wiener Akad. Bd. 59, 2. Abth. (1869) enthalten.

Factor $(\cos \varepsilon - \frac{3}{2} \cos \vartheta \cos \vartheta')$ enthält, im letzteren Falle eine abstossende Wirkung folgert und auch experimentell bewiesen haben will. Auf diesen Unterschied macht Munker schon gleich nach der Gleichung 21 aufmerksam, aber da in wenig hervorstechender Weise, indem er Weiteres hierüber auf VI aufspart. Bei dem obenangeführten Satz 12, der eher auf Ampère's Anschauung hinweist als auf eine Nullwirkung, ist von dieser gar nichts gesagt.

In V bespricht Verfasser „W. Weber's experimentelle Prüfung des elektrodynamischen Grundgesetzes" (von Ampère); aber ohne brauchbares Resultat. Denn während Weber zur numerischen Berechnung seines Versuches nach Ampère's Gleichung schreitet, erklärt Munker, dass zu solcher Berechnung nach seiner Gleichung „seine Sehkraft für mmer viel zu sehr geschwächt sei". Ich verweise deshalb auf das zu III und VII von mir Bemerkte.

VI. „Versuche über die gegenseitige Wirkung von Stromtheilen, die in einer geraden Linie liegen." (S. 22—26). Diese vier Versuche Munker's beweisen im besten Falle wiederum, dass man die Fortbewegung der Ampère'schen Drahtbügels auf dem Quecksilber als giltigen Beleg für den betreffenden theoretischen Satz Ampère's anzuzweifeln vollen Grund hatte.* Zu vergl. das oben bei IV Gesagte. Statt einer abstossenden Kraft (Ampère) fand Munker in seinem vierten Versuche (ohne Quecksilber) eine „nicht verkennbare Anziehung". Nach seiner Theorie muss aber Nullwirkung herauskommen und Munker deutet jene Anziehung als eine durch Nebenumstände hervorgebrachte. Wenn solche mächtig genug sind, so können sie auch die Ampère'sche Abstossung (wenn diese existirte) übertrumpfen. Man sieht daraus den zweifelhaften Werth solcher Versuche.

Da das letzte Capitel VII schon oben besprochen wurde, so bin ich am Ende meiner Besprechung dieses misslungenen Unternehmens, ein neues elektrodynamisches Grundgesetz aufzustellen (für die ponderomotorische Wirkung des elektrischen Stromes; die elektromotorische Wirkung, meist Induction genannt, vervollständigt erst den Begriff der Elektrodynamik, mit welchem Namen allerdings bisher meist noch der engere Begriff der ponderomotorischen Wirkung genannt wird). Dieses Unternehmen ist auch, wie gesagt und bekannt, einem Ampère nicht in vollkommen einwurfsfreier Weise gelungen.

KURZ.

Lehrbuch der Geophysik und physikalischen Geographie. Von Dr. S. GÜNTHER. Zwei Bände. I. Band mit 77 in den Text gedruckten Abbild. Stuttgart, Verlag von Ferd. Enke. 1884. 8°. X, 418 S.

* S. z B. Wiedemann's Lehre vom Galvanismus etc. 2. Aufl. II. Bd. 1. Abth. S. 10 (1874). Die 3. Auflage steht mir dermalen noch nicht zu Gebote.

Der Verfasser erklärt es gleich in den ersten Zeilen seines Vorwortes selbst als ein Wagniss, ein Lehrbuch der terrestrischen Physik gerade jetzt zu veröffentlichen, wo eine Reihe neuester Werke bekannter Schriftsteller ètwaigen Bedürfnissen der deutschen Leserwelt so ausgiebig Rechnung trägt. Aber bei Beginn der Ausarbeitung war von eben jenen Werken noch wenig veröffentlicht, und dann schien auch ein neues kein Ueberfluss, wenn sein Plan durch das Bestreben bestimmt war, bei möglichst systematischem Aufbau der einzelnen Lehren zugleich der mathematischen Entwickelung einen grösseren Spielraum zu gewähren und dabei auch auf die geschichtliche Entstehung und Ausbildung unseres Wissens umfassend Bedacht zu nehmen.

Sehen wir zu, wie der Verfasser seinen Plan ausgeführt hat.

Bei oberflächlichem Durchblättern des mässig starken Bandes fallen sofort zwei Eigenthümlichkeiten ins Auge: die Menge der je am Ende der einzelnen Kapitel gegebenen Citate und die consequente Rücksichtnahme auf die geschichtliche Entwickelung der jeweils darzustellenden Lehren.

Mehr als 2000 genaue Verweisungen geben, ohne die Uebersicht des Ganzen zu stören, Zeugniss von den eingehenden Vorstudien des Verfassers und ermöglichen es dem Leser in bequemster und ausreichendster Weise, sich betreffs dessen, was über jede der zur Besprechung kommenden Fragen bis jetzt geleistet ist, genauer zu unterrichten. Dass ein Mann wie Günther, welcher unter Denjenigen, die um mathematisch-historische Forschungen sich bemühen, seit Jahren in erster Reihe steht und zumal bei der Naturforscherversammlung zu Graz (1875) ebenso lebhaft wie gut für die didaktische Bedeutung historischer Aufklärung selbst auf mathematischem Gebiet eingetreten ist, dass Günther gerade bei dem vorliegenden Stoff seinen Neigungen folgen und seine durch besondere Veröffentlichungen erwiesenen geschichtlichen Specialstudien auf geographischem Gebiete verwerthen würde, war zu erwarten, und man sieht sich in seiner Erwartung nicht getäuscht.

Wenn jene ersterwähnte Eigenthümlichkeit dem „Lehrbuch" oft fast mehr den Charakter eines „Handbuches" zu geben scheint, so bringt es die zweite dahin, dass man in diesem Lehrbuch zugleich auch je für die Gegenstände der einzelnen Kapitel die geschichtliche Entwickelung derselben vom ersten Auftreten der betreffenden Fragestellung an bis auf die Gegenwart mit besitzt. Man ersieht hieraus schon, welche reiche Fülle an Stoff die 400 Seiten des vorliegenden Bandes gewähren.

Eine „geschichtlich-literarische Einleitung" (S. 1—36) versucht sich an der schwierigen Aufgabe, auf so wenigen Seiten einen Ueberblick zu geben über die Gesammtleistungen auf dem Gebiete der Geophysik, wie sie seit den Zeiten der altgriechischen Dichter und Denker bis zur Gegenwart zu Tage gefördert wurden, zu skizziren, wie

Hand in Hand mit der Entwickelung von Mathematik und Physik und Geologie neue und neue Fragen auftreten und wie diese in stetem Wechselspiel neuer Hypothesen ihre wirkliche oder gar zu oft nur vermeintliche Lösung finden. Wenn sich auch diese Skizze hie und da, besonders gegen das Ende, einem Verzeichniss von Büchertiteln in bedenklicher Weise nähert, so kann sie doch, zumal sie nur eine orientirende Einführung sein soll, im Ganzen als gelungen bezeichnet werden.

Was dann die systematische Gliederung des zur Darstellung kommenden reichen Stoffes anbelangt, so behandelt die erste Abtheilung (S. 36—129) die kosmische Stellung unseres Erdkörpers, führt dabei aber die physische Astronomie nur in dem engen Rahmen vor, welchen die ausschliessliche Rücksichtnahme auf terristrische Fragen gebietet.

Im Einzelnen wird hier zuerst (1. Kapitel) die mit physikalischen Sätzen zum Theil recht willkürlich verfahrende Kant'sche Weltbildungshypothese dargestellt, sowie ihre Neuaufstellung und Fortbildung durch Laplace; sofort werden aber auch die entgegenstehenden Einwände vorgeführt und die Folgerungen besprochen, zu welchen jene Nebularhypothese zumal bei Berücksichtigung der thermodynamischen Verhältnisse führt, insbesondere die Ansichten über das Endschicksal der Weltsysteme. — Wegen der unmittelbaren und so vielseitigen Bedeutung der Sonne für die Probleme der tellurischen Physik und wegen der so mannigfachen Analogien planetarischer Erscheinungen mit irdischen werden hierauf (2. Capitel) in kurzen, aber genügenden Strichen, im Wesentlichen der Zeitfolge nach, theilweise mit gegenseitiger Abwägung ihrer Richtigkeit alle die so mannichfaltigen Ansichten vorgeführt, welche über Natur und Temperatur der Sonne, über Planeten und Planetoiden, über Kometen und deren Beziehung zu den Meteoriten, über den Weltraum und seine Erfüllung aufgestellt worden sind, und es mag besondere Erwähnung finden, dass der Verfasser, was das Wesen der Sonnenflecken betrifft, zwischen der Kirchhoff'schen Wolken-, der Zöllner'schen Schlacken- und der Reye'schen Trombentheorie keine bevorzugende Auswahl trifft, wohl aber der Annahme einer äusserst fein differentiirten Materie im Weltraume das Wort redet und des Letzteren absoluten Temperatur-Nullpunkt (mit Häussler) zu -162^0 festlegt. Mit vollem Recht finden hierauf (3. Capitel) die astronomischen Nachbarn der Erde, zumal der Mars, und ihr Trabant, unser Mond, eine verhältnissmässig eingehendere Betrachtung; den Abschluss macht die interessante Lehre vom Mondvulkanismus.

Die zweite Abtheilung (S. 129—300) bespricht die allgemeinen mathematischen und physikalischen Verhältnisse der Erde, also ihre Oberflächenform und ihre Bewegung im Raume. Ausgehend (1. Capitel) von der allmäligen Entwickelung der Sphäricitätslehre, wobei die kritische Sonde an die sogenannten Beweise von der Kugelgestalt gelegt wird,

führt der Verfasser weiter vor die Darlegung der Methoden, welche zur Kenntniss der wirklichen Erdgestalt führen können und wirklich führen, also hauptsächlich die der Gradmessung und ihre Geschichte, und im Anschlusse hieran (2. und 3. Capitel) giebt er eine sehr dankenswerthe Darstellung der allmäligen Herausbildung der Lehre vom Geoid. Das 4. Capitel, von der Erdbewegung im Raume handelnd, giebt die betreffenden Theorien der Mechanik im besten Sinne popularisirt: die Paragraphen vom Foucault'schen Pendelversuch, von den Weltsystemen und von den für die Geophysik so wichtigen Störungserscheinungen werden viele dankbare Leser finden, nicht minder auch das 5. Capitel, welches „die Graphik im Dienste der physischen Erdkunde" bespricht.

Eine dritte Abtheilung (S. 300 bis Schluss) behandelt, von den Wärmeverhältnissen in den Tiefen der Erde ausgehend, die Geophysik im engeren Sinne und das Wesentliche der dynamischen Geologie, also insbesondere die vulkanischen Erscheinungen und die Erdbeben, dies Alles geschichtlich entwickelnd. Dass gerade die letzterwähnte Betrachtungsweise grosse Vortheile und lebhafte Anregung gewähren kann, wird Jeder zugeben; dass beide erzielt werden, ist der schönen Darstellung des Verfassers zu danken. Was die letztere im Allgemeinen betrifft, so wurden zwei Eigenthümlichkeiten derselben oben schon hervorgehoben; auch die Erwähnung einer dritten darf nicht vergessen werden, da sie dem Werke zum Vorzug gereicht, die an passenden Stellen durchgeführte Benützung mathematischer Betrachtung nämlich. Nirgendwo drängt sich diese unnöthig in den Vordergrund; wo sie auftritt, hält sie sich gleichweit entfernt von allzu grosser Breite und Ausführlichkeit, wie von einer nur dem Eingeweihten verständlichen Skizzenhaftigkeit.

Mit den skizzirten drei Abtheilungen ist der Rahmen der vorliegenden ersten Bandes ausgefüllt. Weitere sechs Abtheilungen, welche den Inhalt des zweiten Bandes füllen sollen, werden bezüglich zur Besprechung bringen die magnetischen und elektrischen Erdkräfte, die Atmosphärologie, die Oceanographie, die aus dem Kampfe zwischen Meer und Festland sich ergebenden Oberflächenveränderungen, die Eigenschaften der eigentlichen Erdfeste und ihrer Süsswasserbedeckung und schliesslich in Kürze die physische Geographie der Organismen.

Wir sind gespannt darauf, wie dieses so ungemein reiche Material verarbeitet sein wird. Wenn, wie nicht anders zu erwarten, dieser zweite Band hält, was der erste verspricht, insbesondere wenn er nicht, wie man aus einer Andeutung des Vorwortes vermuthen, vielmehr befürchten möchte, in allzu grosser Kürze und zu sehr nur das Wesentlichste andeutend gearbeitet sein wird, so wird unsere Literatur um ein recht hübsches, dankens- und empfehlenswerthes Werk reicher sein.

Druck und Ausstattung sind schön — vollständiges Sach- und Namenregister sehr angenehm.

P. Treutlein.

Lehrbuch der Elementargeometrie. Von J. Henrici, Professor am Gymnasium zu Heidelberg, und P. Treutlein, Professor am Gymnasium zu Karlsruhe. Dritter Theil: Lage und Grösse der stereometrischen Gebilde. Abbildung der Figuren einer Ebene auf eine zweite (Kegelschnitte); Pensum der Prima. Mit 134 Figuren in Zinkographie. Leipzig, bei B. G. Teubner. 1883. VIII, 194 S.

Wir verweisen zurück auf die historisch-literarische Abtheilung von Bd. XXVII S. 139, von Bd. XXVIII S. 68, wo wir über den I. und II. Theil des Lehrbuches uns äusserten, das jetzt in durch seinen III. Theil vollendeter Gestalt uns vorliegt. Ein von dem, was man sonst Lehrbuch der Elementargeometrie nannte und vielfach noch nennt, so durchaus verschiedenes Werk will als ein Ganzes betrachtet sein, ob es im kunstreich ausgeführten Aufbau auch das hält, was das Programm der Verfasser am Anfange versprach. Diese Frage muss entschiedene Bejahung finden. Man wird nicht leicht eine Schulgeometrie uns nennen, welche in gleich folgerichtiger Weise, stets mit denselben Begriffen, unter welchen der der Projection obenansteht, arbeitend, auf 588 Seiten, deren vierter Theil etwa Uebungsaufgaben gewidmet ist, ein solches Gebiet umfasst und den aufmerksamen Schüler beherrschen lehrt. Geht doch insbesondere der neueste stereometrische Theil so tief in die projectivische Entstehung räumlicher Gebilde ein, dass er auch dem der Mittelschule entwachsenen Leser als zu Wiederholungen geeignet empfohlen werden darf. Ja, man wird gerade bei solchem etwas rascheren Lesen ein Vergnügen empfinden, das der Gymnasialschüler freilich im Allgemeinen ebenso wenig kennt, wie den Genuss, den ein rasches Lesen der Homerischen Gesänge bereitet. Der Gymnasialschüler soll das Lehrbuch gar nicht in solcher Weise kennen lernen, soll nicht nach der strengen Zahlenfolge der Paragraphen in die Geometrie eingeführt werden. Nicht umsonst ist jedes Bändchen zum Unterricht in zwei Jahreskursen bestimmt, und ein guter Lehrer wird auch über diese Benutzungszeit noch hinausgehen, wird Manches aus dem I., dem II. Bändchen erst in Prima vortragen, wenn auch der gedruckte Leitfaden den Gegenstand mit dem für Secunda oder gar für Tertia bestimmten Lehrstoffe vereinigen musste. Die Verfasser selbst verfahren bei ihrem Unterrichte nach dem eben angedeuteten Plane, verzichten beispielsweise darauf, bei der ersten Begründung der geometrischen Proportionenlehre auf solche Proportionen einzugehen, die rational sich nicht in Zahlen darstellen lassen, um erst später darauf zurückzukommen. Das gleiche Recht, mit Auswahl, vor- und rückgreifend, den Unterricht zu leiten, darf und muss jeder Lehrer für sich in Anspruch nehmen. Bei Ausnutzung desselben wird gewiss bald das gegenwärtig noch verbreitete Vorurtheil schwinden, als sei die neue Methode überhaupt nicht schulfähig und darum die Henrici-Treutlein'sche Geometrie kein Schulbuch. Referent ist vom Gegentheil überzeugt.

Cantor.

Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Von Dr. Adolf Hochheim, Professor. Heft II: Die Kegelschnitte. Abtheilung I. A. Aufgaben, 75 S.; B. Auflösungen, 93 S. Leipzig 1883, bei B. G. Teubner.

Wir haben im XXVII. Bande dieser Zeitschrift, hist.-lit. Abtheilg. S. 219—220, das erste Heft des Hochheim'schen Buches unseren Lesern anempfohlen. Das zweite Heft macht es uns leicht, in dem gleichen Sinne das Urtheil abzugeben. Der Verfasser erklärt in einem Vorworte, hier nur die einfacheren Aufgaben zusammengestellt zu haben, welche etwa dem Standpunkte der Mittelschule entsprechen, während er für eine später folgende Veröffentlichung Aufgaben für Studirende sich aufspare, in denen projectivische Geometrie und Anwendung homogener Coordinaten vorausgesetzt werde. Insofern ist also ein gewisser Gegensatz gegen das erste Heft vorhanden, welches für die Gerade, den Punkt und den Kreis beiden genannten Leserclassen gerecht zu werden sich bestrebt. Man muss aber darum nicht glauben, das jetzige Heft sei des Gebrauches durch Studirende unwerth. Auch ihnen werden nicht wenige von den Kegelschnittaufgaben der ersten Abtheilung recht harte Nüsse zu knacken geben, an denen sie die Stärke ihrer Werkzeuge auf die Probe stellen können, sei es was den Ansatz der Aufgabe, sei es was ihre algebraische Behandlung und Vermeidung von der Aufgabe fremden Wurzelwerthen betrifft. Die Anordnung der Aufgaben nach vier Capiteln mit den Ueberschriften: Parabel, Ellipse, Hyperbel, Curven zweiten Grades, möchten wir nicht gerade loben. Sie hat ja ihr Bequemes für den Lehrer, der diese oder jene Aufgabe sich aussuchen will; aber einestheils hätten wir abwechselnde Aufgaben von ansteigender Schwierigkeit über die einzelnen Curven für didaktisch richtiger gehalten, anderntheils jedenfalls ein Capitel vermischter Aufgaben gewünscht, damit der die Sammlung durcharbeitende Leser nicht aus der örtlichen Stellung der einzelnen Aufgabe schon wisse, worauf er bei der Lösung hinzusteuern habe. Diesem Capitel vermischter Aufgaben hätten füglich die Nrn. 95—113, 293—317, 477—498 (Parabel, Ellipse, Hyperbel als geometrischer Ort) in richtiger Abwechselung zugewiesen werden können. Vielleicht zeigt der Verfasser bei Ausarbeitung des noch ausstehenden Heftes, das einen lehrerlos arbeitenden Leser als Regel voraussetzen wird, sich geneigt, dieser Bemerkungen zu gedenken.

Cantor.

Analytische Geometrie des Raumes. I. Theil: Die allgemeine Theorie der Flächen und Curven, die Eigenschaften der Flächen zweiten Grades. II. Theil: Disquisitiones generales circa superficies curvas von C. F. Gauss, ins Deutsche übertragen mit Anwendungen und Zusätzen. Die Fresnel'sche Wellenfläche. Von Dr. Otto Böklen,

Rector der k. Realanstalt in Reutlingen. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten und 4 lithographirten Tafeln. 2. Aufl. VIII, 336 S. Stuttgart 1884, Verlag von Albert Koch.

Die bahnbrechenden Untersuchungen Monge's über Raumcurven und Oberflächen, welche ein erstes Lehrbuch für dieses Gebiet der Geometrie darstellen, sind etwa 80 Jahre alt; die von Monge eingeschlagene Bahn wieder verlassen zu haben, ist das Verdienst der berühmten, etwa 20 Jahre jüngeren Abhandlung von Gauss. Die Neuzeit hat, wie naturgemäss, der beiden Wege sich bedient, welche von jenen Pfadfindern eröffnet worden sind, und die Güte eines Lehrbuches bemessen wir persönlich wenigstens auch darnach, wie weit es dem Verfasser gelungen ist, die zum Ziele führenden Methoden zu verschmelzen, den Leser bald die eine, bald die andere üben zu lassen, ihm an einzelnen Aufgaben zu zeigen, wie so und auch so verfahren werden kann, und je nach dem Verfahren diese oder jene Seite der Aufgabe zu besonderer Geltung kommt. Der Verfasser des uns vorliegenden Buches ist anderer Ansicht gewesen. In den 197 ersten Seiten giebt er, man kann wohl sagen, eine durch Aufnahme neuerer Sätze bereicherte Ausgabe von Monge, dessen Bezeichnungen er getreulich festhält; S. 198—232 folgt die Uebersetzung der Gauss'schen Flächenuntersuchungen, in welcher die sämmtlichen Bezeichnungen der Urschrift gleichfalls beibehalten sind; die noch übrigen 100 Seiten sind eigenen Untersuchungen des Verfassers gewidmet, wie sie früher bereits in Zeitschriften Abdruck fanden. Wir können dieser Anordnung einen Geschmack nicht abgewinnen und wissen auch nicht recht, welchem Leserkreise gegenüber sie sich als zweckmässig erweisen soll? Freilich streifen wir damit die andere Frage, für wie geartete Leser das Böklen'sche Buch überhaupt geschrieben ist? Der Leser soll bereits in der analytischen Geometrie des Raumes einigermassen bewandert sein; er soll wenigstens die Formeln, welche auf Gerade und auf Ebenen sich beziehen, kennen, denn die „kurze Demonstration“ der am Anfang zusammengestellten 42 Gleichungen, welche Seite 4—7 sich ihnen anschliesst, wird nur als Beihilfe zur Erinnerung an schon Gewusstes betrachtet werden können. Der Leser soll ausserdem die analytische Geometrie der Ebene unter Anwendung der Anfangsgründe der Differentialrechnung beherrschen, der Leser soll endlich in der Differentialrechnung ziemlich zu Hause sein. Gegen diese sämmtlichen Anforderungen haben wir nicht das Mindeste einzuwenden; aber ist es denkbar, dass 1884 ein Leser in Deutschland diesen Anforderungen genügt, ohne Determinanten, ohne die Bezeichnung partieller Differentialquotienten durch geschwungene ∂ zu kennen? Und wenn er sie kennt, wird er auf diese allgemein verbreiteten Symbole zu Gunsten unübersichtlicher und undurchsichtiger Schreibweisen verzichten, wie es Herr Böklen ihm zumuthet, der Determinanten erst S. 211 in der An-

merkung, dann S. 307 anwendet, ein ∂ überhaupt nie benutzt? Dafür kommt S. 8 und häufiger das Zerrbild eines umgekehrten m (also w) zur Bezeichnung von $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 . \partial y}$ vor, von dem wir nur wissen möchten, wie der Leser es aussprechen soll? Auch anderen Ortes ist die Sprache mehrfach recht absonderlich. Gegen die gewundenen Curven hätten wir im Ganzen keine Einsprache zu erheben, wenn nur gleichzeitig erwähnt würde, dass und warum sie sonst allgemein Curven doppelter Krümmung heissen. Weniger ohrenerfreulich sind schon die entwickelbaren Flächen, aber gar abelianische Differentialgleichungen (S. 161) ertragen zu sollen, geht etwas zu weit. Der Verfasser verwirft vielleicht unsere Einwendungen als kleinlich, als die Form allein betreffend, während er verlange nach dem Inhalt beurtheilt zu werden. Als ob bei einem Lehrbuche nicht die Form selbst Inhalt wäre! Dass ein so guter Geometer, als welcher Herr Böklen sich mehrfach in eigenen Untersuchungen bewährt hat, nicht geradezu Falsches bringen wird, gegen welches man sich verwahren müsste, ist von vornherein anzunehmen, wiewohl auch hier — um nur Eines hervorzuheben — die Frage gestattet ist, was denn eine Berührungsebene an eine Oberfläche eigentlich ist, deren Gleichung S. 7 abgeleitet wird, ohne dass eine Definition vorherginge, ohne dass bewiesen würde, dass eine solche Ebene überhaupt stattfindet. Also gerade die Form dürfen und müssen wir als Hauptsache betrachten und mit ihr können wir uns bei der 2. Auflage so wenig befreunden, als es bei der 1. Auflage der Fall war; wir können es um so weniger, als dazwischen das zweimalige Erscheinen der Joachimsthal'schen Vorlesungen fällt, unerreicht für solche Leser, die nicht Vieles, aber viel lernen wollen, während als Nachschlagewerk von unerschöpflichem Inhalt Salmon-Fiedler gleich unerreicht vorhanden ist. Wir sagen: die 2. Auflage des Böklen'schen Buches; aber hat wirklich der volle Verkauf der ersten Auflage unser Urtheil zum Voraus Lügen gestraft? Die Vorrede sagt: der erste Theil dieses Werkes erscheint hier nahezu in derselben Weise, wie in der 1. Auflage. Wir fügen hinzu: die 192 ersten Seiten der neuen Auflage stimmen Zeile für Zeile einschliesslich der Druckfehler mit der ersten Auflage überein, dann beginnt statt der noch übrigen anderthalb Druckbogen der ersten Auflage anderer Text, anderer Druck, anderes Papier. Schlussfolgerungen sind leicht zu ziehen.

Cantor.

Theorie und Anwendung der Liniencoordinaten in der analytischen Geometrie der Ebene. Von Dr. Karl Schwering, Oberlehrer in Coesfeld. Mit in den Text gedruckten Figuren und 2 Figurentafeln. Leipzig 1884, B. G. Teubner. V, 96 S.

Dass die Ableitung der Liniencoordinaten, welche seither in den Lehrbüchern in Gebrauch war und welche darauf hinausläuft, in der homogen gemachten Gleichung der Geraden die Variabeln als Coefficienten, die Coefficienten als neue Variabeln aufzufassen, lediglich an das Schlussvermögen der Schüler sich richtet, ohne ihnen eine greifbare Versinnlichung des Verlangten unmittelbar zu bieten, ist ein Missstand, welchen gewiss schon mancher Mathematiker empfunden hat. Herr Schwering hat 1876 im XXI. Bande dieser Zeitschrift S. 278 - 286 eine Abhandlung „Ueber ein besonderes Liniencoordinatensystem" veröffentlicht, welche in dieser Beziehung Abhilfe schaffen sollte. Einzelnen Lesern hat schon jene Abhandlung Veranlassung gegeben, auf dem gewiesenen Wege weiter fortzugehen, und was die Abhandlung theilweise leistete, das wird voraussichtlich dem vor uns liegenden Büchlein in erweitertem Massstabe gelingen, wie es selbst als Erweiterung und als ausführlichere Entwickelung des geistreichen Gedankens von 1876 bezeichnet werden kann. Dieser Grundgedanke ist folgender: Ein Paar gerader Parallelen, Axen genannt, bilden mit einem auf ihnen senkrechten Mittellothe von der gegebenen Länge e das Coordinatensystem. Man kann es etwa betrachten als ein Fundamentaldreieck, dessen eine Ecke in die Unendlichkeit gerückt ist dadurch, dass zwei Seiten zur dritten senkrecht stehen. Auf diesen parallelen Seiten schneidet nun jede beliebige Gerade zwei Strecken u, v ab, die, von den beiden im Endlichen gelegenen Ecken des Fundamentaldreiecks an gerechnet, nach Länge und Richtung gegeben, die Liniencoordinaten der Geraden sind. Mittels dieser Liniencoordinaten entwickelt sich leicht die Gleichung $Au+Bv+C=0$ als Gleichung des Punktes. Das ist genau dieselbe Gleichung, zu welcher auch die landläufige Methode führte, sofern sie mit zwei Coordinaten sich begnügte; aber man beachte den Unterschied der Bedeutung der Buchstaben. Früher nahm man u und v als die reciproken Werthe von gewissen Abschnitten, bei Herrn Schwering sind es solche Abschnitte selbst, ein begrifflicher Fortschritt von, wie uns scheint, sehr erheblicher Tragweite. Hr. Schwering handhabt seine Punktgleichung weiter und bringt sie zu diesem Zwecke durch Division mit $A+B$ in die Form $\frac{A}{A+B}u+\frac{B}{A+B}v+\frac{C}{A+B}=0$, welche die Eigenschaft besitzt, den Coefficienten von u und v die constante Summe 1 beizulegen, und welche die Normalform genannt wird. Leser der Hesse'schen Geometrie werden sich hier vor Vermischung der Begriffe hüten müssen. Hesse's Normalform ist bekanntlich $Au+Bv+1=0$, während A, B von einander unabhängig sind, eine Form, welche auch Plücker bereits bevorzugte. Die neue Normalform sagt uns darum besser zu, weil C in ihr ohne Weiteres auch Null werden kann, während in Hesse's Normalform diese Voraussetzung ein Unendlichwerden von A und B oder wenigstens eines dieser Coefficienten erfor-

dert. Die Gleichung des Kreises $r^2(A+B)^2((u-v)^2+e^2)=(Au+Bv+C)^2$ wird im folgenden Abschnitte erörtert. In ihr ist $Au+Bv+C=0$ der Kreismittelpunkt, r der Kreishalbmesser. Die Kreisgleichung geht in $uv=r^2$ über, sofern das Mittelloth des Coordinatensystems Kreisdurchmesser ist. Die Kreisgleichung ist so aufzufassen, dass jede Gerade mit den Coordinaten u, v, welche die Kreisgleichung erfüllen, Tangente an den Kreis ist, dass mithin der Kreis als von seinen Tangenten eingehüllt entsteht. Das ist wieder genau in Uebereinstimmung mit den bisher üblichen Liniencoordinaten. Wir beabsichtigen nicht, eine ausführliche Inhaltsanzeige des ganzen Büchleins zu geben; wir erwähnen daher nur beiläufig, dass schon auf S. 2 die unendlich ferne Gerade, auf S. 27 die unendlich fernen Kreispunkte zur Rede kommen. Vielleicht hätte der Verfasser an § 17 zweckmässig den Beweis angeknüpft, dass es wirklich nur eine unendlich ferne Gerade giebt, wozu Hesse's am Schlusse der IV. Vorlesung seiner Analytischen Geometrie der geraden Linie u. s. w. gegebene Darstellung fast ohne Veränderung hätte dienen können. An den Kreis schliessen sich die Kegelschnitte. Wir heben die Definitionen auf S. 30 hervor: Parabeln sind solche Kegelschnitte, die parallele Tangenten nicht besitzen, Ellipsen solche, deren parallele Tangenten nie zusammenfallen, Hyperbeln solche, deren parallele Tangenten zweimal zusammenfallen; sowie die Definition der Brennpunkte S. 40 als der reellen Punkte auf den von den unendlich fernen Kreispunkten der Ebene an die Curve gezogenen Tangenten. Bei Gelegenheit der Erörterung der Paralleltangenten sind auch Translationsformeln des Coordinatensystems (Parallelverschiebung der Axen) S. 35 abgeleitet, während die Aufgabe allgemeiner, Translation und Rotation vereinigender Coordinatenveränderung erst am Ende des Buches, S. 93 behandelt ist. Ein besonderer Abschnitt ist der allgemeinen Gleichung zweiten Grades gewidmet, womit der eigentlich elementare Theil des Buches, d. h. der Theil, welcher Kenntniss der Infinitesimalrechnung nicht voraussetzt, abschliesst. Von S. 55 an ist dagegen diese Beschränkung aufgehoben, und wir verübeln es dem Verfasser nicht im Mindesten. Meint er gleich in der Vorrede, er wende sich an Anfänger, so dürfte die Schule, welche ihre Abiturienten reif zum Studium des Schwering'schen Buches entlässt, doch nur eine sehr vereinzelte sein. Wir empfehlen dasselbe vielmehr solchen Lesern, welche mindestens ein Semester an einer Universität zugebracht und die Einleitungsvorlesungen in die Mathematik dort gehört haben. Ihnen werden alsdann die erwähnten beiden Abschnitte: „Tangente, Berührungspunkt, Normale, Differentialausdruck des Bogenelements und des Flächeninhalts“ und „Einige Beispiele höherer Curven“ zwar nicht weniger, aber auch nicht mehr Schwierigkeiten bereiten, als die vorangegangenen 54 Seiten. In dem letzten Abschnitte insbesondere werden solche Leser mit den Singularitäten höherer Curven eine immer-

hin etwas mehr als nur oberflächliche Bekanntschaft anknüpfen. So die allgemeine Anordnung des reichen Stoffes, der in den engen Raum von nur sechs Druckbogen kunstreich zusammengedrängt, auch durch verhältnissmässige Vollständigkeit dem Werkchen zur wärmsten Empfehlung dient.

CANTOR.

Bibliographie

vom 1. bis 31. October 1884.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Classe d. königl. bayer. Akademie der Wissensch. Jahrg. 1884, 2. Heft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft, herausgegeben von E. SCHÖNFELD u. H. SEELIGER. 19. Jahrg. 2. Heft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Jahrbuch der Wetterwarte zu Magdeburg, Station I. O., herausgegeben von R. ASSMANN. 2. Jahrg. 1883. Magdeburg, Faber. 7 Mk. 20 Pf.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgeg. v. C. OHRTMANN. 14. Bd. Jahrg. 1882, 1. Heft. Berlin, G. Reimer. 9 Mk.

Abhandlungen der kaiserl. Akademie der Wissensch. in Wien, mathem.-naturwissenschaftl. Classe, Abtheil. II. 89. Bd. (5 Hefte). Wien, Gerold. 16 Mk. 40 Pf.

Reine Mathematik.

Jacobi's gesammelte Werke. 3. Bd., herausgeg. von K. WEIERSTRASS. Berlin, G. Reimer. 20 Mk.

NEUMANN, C., Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale. 2. Aufl. Leipzig, Teubner. 12 Mk.

GRAF, J. H., Beitrag zur Auswerthung bestimmter Integrale mittels Veränderung des Weges. Bern, Huber & Comp. 80 Pf.

GEGENBAUER, L., Arithmetische Theoreme. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk.

KOHN, G., Ueber einen Satz von Stephanos. (Akad.) Ebendas. 20 Pf.

FREGE, G., Die Grundlagen der Arithmetik; eine Untersuchung über den Begriff der Zahl. Breslau, Köbner. 2 Mk. 80 Pf.

CLAUSSEN, L., Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, nebst Uebungsaufgaben. Potsdam, Stein. 2 Mk. 40 Pf.

KLEYER, A., Lehrbuch der arithmetischen und geometrischen Progressionen, der zusammengesetzten, harmonischen, Ketten- und Theilbruchreihen. Stuttgart, Mayer. 4 Mk.

Steinhauser, A., Elemente des graphischen Rechnens mit bes. Rücksicht auf die logarithm. Spirale. Wien, Hölder. 2 Mk. 80 Pf.

Hanacek, W., Aufgaben über Punkte, Gerade und Ebenen. Znaim, Fournier & Haberler. 60 Pf.

Scholim, P., Ueber eine geometrische Verwandtschaft und deren Ergebnisse in Ebene und Raum. (Dissert.) Breslau, Köhler. 1 Mk.

Biermann, O., Ueber die regelmässigen Körper höherer Dimensionen. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Puchta, A., Analytische Bestimmung der regelmässigen Körper im Raume von vier Dimensionen. (Akad.) Ebendas. 1 Mk. 20 Pf.

——, Analytische Bestimmung der regelmässigen Körper in Räumen beliebiger Dimension. (Akad.) Ebendas. 40 Pf.

Waelsch, E., Ueber ein Schliessungsproblem. (Akad.) Ebendas. 20 Pf.

Weyr, E., Ueber Raumcurven 5. Ordnung vom Geschlecht 1. (Akad.) Ebendas. 40 Pf.

Vollhering, W., Lehrbuch der Geometrie für höhere Lehranstalten. 1. Thl.: Geometrie der Alten. Bautzen, Rühl. 1 Mk. 50 Pf.

Lackemann, C., Die Elemente der Geometrie. 2 Theile. Breslau, Hirt. 1 Mk. 60 Pf.

Genocchi, A., Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale. Turin, frat. Bocca. 10 L.

Angewandte Mathematik.

Helmert, R., Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie. 2. Thl.: Die physikal. Theor. Leipzig, Teubner. 20 Mk.

Dellingshausen, N. v., Die Schwere oder das Wirksamwerden der potentiellen Energie. Stuttgart, Schweizerbart. 1 Mk. 60 Pf.

Kraft, F., Sammlung von Problemen der analytischen Mechanik. 3. Lief. Stuttgart, Metzler. 3 Mk.

Czermak, P., Der Werth der Integrale A_1 und A_2 der Maxwell'schen Gastheorie für das Grundgesetz kr^{-5}. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk. 50 Pf.

Lamb, H., Einleitung in die Hydrodynamik; übers. v. R. Reiff. Freiburg i. B., Mohr. 7 Mk.

Schneider, M., Karte des nördlichen Sternhimmels, unter Controle von L. Weinek. Leipzig, Dietz & Zieger. 1 Mk. 50 Pf.

Lachmann, G., Ueber die Bahn des Planeten Eurynome (79) aus den bisher beobachteten Oppositionen. (Dissert.) Breslau, Köhler. 1 Mk.

Haerdtl, E. v., Astronomische Beiträge zur assyrischen Chronologie. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Mk. 50 Pf.

Geschichte der Astronomie.

Prowe, L., Nicolaus Coppernicus. 2. Bd.: Urkunden. Berlin, Weidmann. 15 Mk.

Physik und Meteorologie.

Wolf, Th., Photometrische Beobachtungen an Fixsternen aus d. Jahren 1876—1883. Berlin, G. Reimer. 10 Mk.

Zetzsche, K. E., Handbuch der elektrischen Telegraphie. 2. Bd. 3. Lief.: Elektrische Messungen; Telegraphenapparate. Berlin, Springer. 6 Mk.

Grawinkel, C., Lehrbuch der Telephonie und Mikrophonie. 2. Aufl. Ebendas. 5 Mk.

Pernter, M., Beitrag zu den Windverhältnissen in höheren Luftschichten. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Ergebnisse der Beobachtungen auf den meteorologischen Stationen im Königr. Bayern v. 1879—1883. München, Ackermann. 2 Mk. 40 Pf.

Berichtigungen zu dem Aufsatze S. 169 flgg.

Herr Geh. Hofrath Krehl hatte die Güte, mich auf diese Verbesserungen aufmerksam zu machen, und stellte dabei zunächst die Frage, ob nicht (S. 171, Z. 32 flg.) Beteigeuze vielmehr aus بَيْتُ ٱلْجَوْزَآء bet el-ǵawza *(domus Orionis)*, entstanden sein sollte?

Hinsichtlich der übrigen muss ich leider bekennen, dass zwei derselben (auf S. 172) mir trotz der, auf die Correctur des Satzes verwandten Sorgfalt entgangen sind.

S. 171, Z. 20 l. ٱلْجَنْبُ, al-ǵanb.
Z. 34 l. *facilis (in deminutivo)*.
S. 172, Z. 11 v. u. l. es-sunbula (st. es-sunbela).
Z. 9 v. u. l. مِنْوَارٌ (st. مِشْوَار).
S. 173, Z. 17 l. ٱلْمِنْحُ (st. ٱلْمِخُّ).
S. 174, Z. 14 l. سَمْتُ ٱلرَّأْسِ (f. سَمْتُ ٱلرَّأْسِ), semt ar-râs, *point du ciel juste au dessus de la tête.*

A. Wittstein

Mathematisches Abhandlungsregister.

1883.

Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.

A.

Abel'sche Transcendenten.

500. Sur l'intégration des équations linéaires par le moyen des fonctions abéliennes. Poincaré. Compt. rend. XCII, 113.
501. Sur les fonctions abéliennes. Poincaré. Compt. rend. XCII, 958.
502. Sur une classe d'intégrales abéliennes et sur certaines équations différentielles. E. Picard. Compt. rend. XCII, 398, 506; XCIII, 696, 1126.
503. Sur l'intégration, par les fonctions abéliennes, de certaines équations aux dérivées partielles du premier ordre. E. Picard. Compt. rend. XCIV, 1036.
504. Sur la réduction des intégrales abeliennes aux intégrales elliptiques. E. Picard. Compt. rend. XCIV, 1704.
505. Sur une classe de fonctions dont les logarithmes sont des sommes d'intégrales abéliennes de première et de troisième espèce. Appell. Compt. rend. XCII, 960. [Vergl. Nr. 73.]
506. Sur les fonctions abéliennes. Appell. Compt. rend. XCIV, 1702.
507. Grundzüge einer Theorie von einer Classe Abel'scher Integrale. G. Pick & M. Ungar. Wien. Akad.-Ber. LXXXII, 893.
508. Ueber die Integration hyperelliptischer Differentiale durch Logarithmen. G. Al. Pick. Wien. Akad.-Ber. LXXXV, 643.
509. Die Reduction Abel'scher Integrale auf Normalintegrale. M. Ungar. Wien. Akad.-Ber. LXXXVI, 893.
510. Zur Theorie der zu einer binomischen Irrationalität gehörigen Abel'schen Integrale. O. Biermann. Wien. Akad.-Ber. LXXXVII, 934.

Vergl. Oberflächen 838.

Akustik.

511. Ueber die Fortpflanzung von Kugel- und Cylinderwellen endlicher Schwingungsweite. O. Tumlirz. Wien. Akad.-Ber. LXXXII, 779.
512. Sur la théorie mathématique du mouvement vibratoire des cloches. E. Mathieu. Compt. rend. XCIII, 636.
513. Intégration des équations différentielles du mouvement vibratoire d'une cloche sphérique. E. Mathieu. Compt. rend. XCIII, 840.
514. On porous bodies in relation to sound. L. Rayleigh. Phil. Mag. LXVI, 181.
515. On the vibrations of a cylindrical vessel containing liquid. L. Rayleigh. Phil. Mag. LXV, 385.
516. On maintained vibrations. L. Rayleigh. Phil. Mag. LXV, 229.
517. On the crispations of fluid resting upon a vibrating support. L. Rayleigh. Phil. Mag. LXVI, 50.

Vergl. Potential 875.

Analytische Geometrie des Raumes.

518. Sur la transformation par directions réciproques. Laguerre. Compt. rend. XCII, 71.
519. Sur la géométrie des sphères. C. Stephanos. Compt. rend. XCII, 1195.

Vergl. Geometrie (höhere). Geometrie (kinematische). Geometrie der Lage. Krümmung. Mannichfaltigkeiten. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

Astronomie.

520. Zur Theorie des Passageninstruments im ersten Vertikal. M. Löw. Astr. Nachr. C, 267. [Vergl. Bd. XXVII, Nr. 317.]
521. Théorie de la flexion plane des solides, et conséquences relatives, tant à la construction des lunettes astronomiques, qu'à la réglementation de ces appareils, pour les affranchir des déviations de l'axe optique produites par la flexion. Yvon Villarceau. Compt. rend. XCIII, 14, 107, 449. — Loewy & Périgaud ibid. 174.
522. Nouvelle méthode pour annuler la flexion astronomique des lunettes. Yvon Villarceau. Compt. rend. XCIII, 866.
523. Ueber Störungen durch ein widerstehendes Mittel. O. Backlund. Astr. Nachr. CI, 209.
524. Sur la favorabilité des stations relativement à l'ensemble des mesures micrométriques à faire pendant le passage de Venus. C. F. Pechüle. Astr. Nachr. CII, 241.
525. Das Argument in der Gyldén'schen Theorie der Planetenstörungen. A. Donner. Astr. Nachr. C, 83.
526. Ueber die Theorie der Bewegungen der Himmelskörper. H. Gyldén. Astr. Nachr. C, 97.
527. Sur la théorie du mouvement des corps célestes. H. Gyldén. Compt. rend. XCII, 1262.
528. Ableitung von Prof. Gyldén's Differentialgleichungen für die intermediäre Bewegung. O. Backlund. Astr. Nachr. CI, 19.
529. Zu H. Gyldén's Theorie der Bewegungen der Himmelskörper. Aug. Weiler. Astr. Nachr. CII, 55.
530. Ueber Prof. Gyldén's intermediäre Bahnen. T. N. Thiele. Astr. Nachr. CII, 65.
531. Ueber die absoluten Elemente der Planetenbahnen. H. Gyldén. Astr. Nachr. CIII, 49.
532. Ueber die säcularen Störungen in dem Problem der drei Körper. Aug. Weiler. Astr. Nachr. CV, 289.
533. Sur les déplacements séculaires des plans des orbites de trois planètes. F. Tisserand. Compt. rend. XCIII, 525; XCIV, 997.
534. Sur la détermination des variations séculaires et des éléments moyens des orbites. O. Callandreau. Astr Nachr. CII, 163.
535. Sur les inégalités à longues périodes dans les mouvements des corps célestes. Gildén. Compt. rend. XCII, 1083.
536. Remarques sur le calcul des perturbations relatives, d'après la méthode de M. Gyldén. O. Callandreau. Compt. rend. XCIII, 201.
537. Sur la théorie du mouvement des corps célestes. O. Callandreau. Compt. rend. XCIII, 779.
538. Sur le développement périodique d'une fonction quelconque des rayons vecteurs de deux planètes. F. Tisserand Compt. rend. XCII, 154. [Vergl. Nr. 24.]
539. Sur une formule générale pour le développement de la partie principale de la fonction perturbatrice. B. Baillaud. Compt. rend. XCIII, 694.
540. Ueber das Rotationsgesetz der Sonne und der grossen Planeten. J. Glauser. Astr. Nachr. CI, 225
541. Étude des actions du Soleil et de la Lune, dans quelques phénomènes terrestres. Bouquet de la Grye. Compt. rend. XCII, 281.
542. Sur la détermination des masses de Mercure, de Venus, de la Terre et de la parallaxe solaire. F. Tisserand. Compt. rend. XCII, 653.
543. Ueber die Kriterien des Vorhandenseins dreier Lösungen bei dem Kometenproblem. Th. v. Oppolzer. Wien. Akad.-Ber. LXXXVI, 885.
544. Ueber die Kriterien des Vorhandenseins dreier Lösungen bei dem Kometenproblem. Th. v. Oppolzer. Astr. Nachr. CIII, 315.
545. Ueber die Möglichkeit einer mehrfachen Bahnbestimmung aus drei geocentrischen Beobachtungen. N. Herz. Wien. Akad.-Ber. LXXXVI, 1125.
546. Methode zur Bahnbestimmung aus drei vollständigen Beobachtungen. J. Gerst. Wien. Akad.-Ber. LXXXVII, 993.
547. Sur la seconde comète de l'année 1784. H. Gyldén. Compt. rend. XCIV, 1686.
548. Ueber die muthmassliche Vertheilung der Radiationspunkte. R. Lehmann-Filhés. Astr. Nachr. CI, 65. [Vergl. Bd. XXVII, Nr. 316.]
549. Präcession und eigene Bewegung. A. Krueger. Astr. Nachr. CIV, 101.

550. Ueber die Eigenbewegungen der Fixsterne. Frey v. Rancken. Astr. Nachr. CIV, 149.
551. Zur Berechnung der Doppelsternbahnen. A. Shdanow. Astr. Nachr. CIII, 325.
552. Neue Methode zur Berechnung von Doppelsternbahnen. T. N. Thiele. Astr. Nachr. CIV, 245.
Vergl. Differentialgleichungen 596—599, 602. Elektrodynamik 633. Elliptische Transcendenten 651. Geodäsie. Geschichte der Mathematik. Gleichungen 764. Refraction. Wahrscheinlichkeitsrechnung 933—935.

B.

Ballistik.

553. Sur le passage des projectiles à travers les milieux résistants, sur l'écoulement des solides et sur la résistance de l'air au mouvement des projectiles. Melsens. Compt. rend. XCIII, 485.
554. Sur la théorie des boulets ramés. H. Resal. Compt. rend. XCIII, 916.

Bestimmte Integrale.

555. Sur les formules de représentation des fonctions. P. du Bois-Reymond. Compt. rend. XCII, 915, 962. [Vergl. Nr. 671.]
556. Intégration de certaines équations aux dérivées partielles, par le moyen d'intégrales définies contenant sous le signe $\int$ le produit de deux fonctions arbitraires. J. Boussinesq. Compt. rend. XCIV, 33.
Vergl. Abel'sche Transcendenten. Elliptische Transcendenten. Gammafunctionen. Gleichungen 771. Quadratur.

C.

Capillarität.

557. Die Capillarwaage. V. v. Lang. Wien. Akad.-Ber. LXXXVI, 1060.
558. Apparent attractions and repulsions of small floating bodies. J. Le Conte. Phil. Mag. LXV, 47. — J. T. Riley ibid. 191. — A. M. Worthington ibid. 198.
559. On Laplace's Theory of capillarity. L. Rayleigh. Phil. Mag. LXVI, 309. — A. M. Worthington ibid. 339.

Combinatorik.

560. Sur les combinaisons complètes. A. G. Melon. Compt. rend. XCII, 125.
561. Théorème d'arithmetique. M. Weill. Compt rend. XCIII, 1066.
562. La phyllotaxie. R. Baron. Compt. rend. XCII, 1169.
563. Die Lösung einiger phyllotaktischen Probleme mittels einer diophantischen Gleichung. Edm. Kerber. Berl. Akad.-Ber. 1882, 457.
564. Zur Theorie der Blattstellungen. S. Schwendener. Berl. Akad.-Ber. 1883, 741.

Crystallographie.

565. Ueber gewundene Bergkrystalle. E. Reusch. Berl. Akad.-Ber. 1882, 133.
566. The dilatation of crystals on change of temperature. L. Fletcher. Phil. Mag. LXVI, 275, 344, 412. [Vergl. Bd. XXVII, Nr. 323.]
567. Sur les positions d'intensité lumineuse égale dans les cristaux maclés, entre les nicols croisés, et application à l'étude des bandes concentriques des feldspaths. A. M. Lévy. Compt. rend. XCIV, 93.
568. Ueber eine Methode, den Normalenbogen, um welchen eine Krystallfläche von einer ihr sehr nahe liegenden Zone absteht, und ihre krystallographische Lage zu bestimmen. Websky. Berl. Akad.-Ber. 1882, 967.

D.

Determinanten.

569. Die Subdeterminanten symmetrischer Systeme. L. Kronecker. Berl. Akad.-Ber 1882, 821.
570. Ueber eine specielle symmetrische Determinante. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. LXXXII, 938.
571. Zur Theorie der Determinanten. B. Igel. Wien. Akad.-Ber. LXXXII, 1288.
572. Sur les puissances et les racines de substitutions linéaires. Sylvester. Compt. rend. XCIV, 55.

573. Sur les racines des matrices unitaires. Sylvester. Compt. rend. XCIV, 396.
574. Sur le déterminant fonctionnel d'un nombre quelconque de formes binaires. C. Le Paige. Compt. rend. XCII, 688.
Vergl. Elektrodynamik 619.

Differentialgleichungen.

575. Sur l'intégration des équations différentielles par les séries. Poincaré. Compt. rend. XCIV, 577.
576. Sur les courbes définies par les équations différentielles. Poincaré. Compt. rend. XCIII, 951.
577. Sur la distinction des intégrales des équations différentielles linéaires en sous-groupes. Casorati. Compt. rend. XCII, 175, 238.
578. Intégration, sous forme finie, d'une nouvelle espèce d'équations différentielles lineaires à coefficients variables. D. André. Compt. rend. XCII, 121.
579. Sur les formes des intégrales de certaines équations différentielles linéaires. E. Picard. Compt. rend. XCIV, 418.
580. Sur une classe d'équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions algébriques de la variable indépendante. Appell. Compt. rend. XCII, 61. [Vergl. Nr. 73.]
581. Sur des équations différentielles linéaires dont les intégrales verifient des relations de la forme $F[\varphi(x)] = \psi(x)F(x)$. Appell. Compt. rend. XCIII, 699. [Vergl. Bd. XXVIII, Nr. 529.]
582. Sur une classe d'équations différentielles linéaires binômes à coefficients algébriques. Appell. Compt. rend XCIV, 202.
583. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. G. Floquet. Compt. rend. XCII, 1397.
584. Sur une classe d'équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. Appell. Compt. rend. XCII, 1005.
585. Sur une équation différentielle de la forme $f\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$. L. Fuchs. Compt. rend. XCIII, 1063.
586. Sur les équations différentielles linéaires à intégrales algébriques. H. Poincaré. Compt. rend. XCII, 698.
587. Sur les points singuliers des équations différentielles. Poincaré. Compt. rend. XCIV, 416.
588. Sur une classe d'équations différentielles linéaires. Halphen. Compt. rend. XCII, 779.
589. Sur une proposition relative aux équations linéaires. G. Darboux. Compt. rend. XCIV, 1456.
590. Sur une équation linéaire. G. Darboux. Compt. rend. XCIV, 1645.
591. Sur un moyen de déterminer les relations entre les constantes contenues dans une solution particulière et celles que contiennent les coefficients rationnels de l'équation différentielle correspondante. Goran Dillner. Compt. rend. XCII, 1498; XCIII, 46.
592. Zur Integration der Jacobi'schen Differentialgleichung
$$L.dx + M.dy + N(x.dy - y.dx) = 0.$$
Fr. Hočevar. Wien. Akad.-Ber. LXXXV, 848.
593. Sur une application du théorème d'Abel. Brioschi. Compt. rend. XCIV, 686.
594. Sur les intégrales asymptotes des équations différentielles. J. Boussinesq. Compt. rend. XCIV, 208.
595. Sur l'intégration de l'équation $A\frac{d^n\varphi}{dt^n} + \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \ldots\right)^n \varphi = 0$. J. Boussinesq. Compt. rend. XCIV, 514.
596. Sur l'intégration d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre dont dépend l'évection. H. Gyldén. Compt. rend. XCIII, 127.
597. Beiträge zur Theorie der Librationserscheinungen. H. Gyldén. Astr. Nachr. CI, 1.
598. Ueber die Gleichung $\frac{d^2\varrho}{dv^2} + \varrho = \Psi_0 + \Psi_1\varrho + \Psi_2\varrho^2 + \ldots$. A. Lindstedt. Astr. Nachr. CIII, 211, 257, 267; CIV, 145. — H. Gyldén ebenda CIII, 321. — O. Backlund ebenda CIII, 323.
599. Ueber eine neue Integration der Differentialgleichungen der Planetenbewegung. S. Oppenheim. Wien. Akad.-Ber. LXXXVII, 1031.
600. Théorèmes relativs à l'équation de Lamé. Brioschi. Compt. rend. XCII, 325.

601. Sur la théorie des équations différentielles linéaires du second ordre. Brioschi. Compt. rend. XCIII, 941.
602. Sur une application nouvelle de l'équation de Lamé. H. Gyldén. Compt. rend. XCIII, 537.
603. Ueber lineare homogene Differentialgleichungen, zwischen deren Integralen homogene Relationen höheren als ersten Grades bestehen. L. Fuchs. Berl. Akad.-Ber. 1882, 703.
604. Sur la quadrature dont dépend la solution d'une classe étendue d'équations différentielles linéaires à coéfficients rationnels. Goran Dillner. Compt. rend. XCII, 235. [Vergl. Nr. 61.]
605. Sur les équations différentielles linéaires simultanées, à coefficients rationnels, dont la solution dépend de la quadrature d'un même produit algébrique irrationnel. Goran Dillner. Compt. rend. XCII, 289.
606. Sur une propriété que possède le produit des k intégrales de k équations différentielles linéaires, à coefficients rationnels, dont la solution dépend de la quadrature, respectivement, de k fonctions rationnelles de la variable indépendante et d'une même irrationnalité algébrique. Goran Dillner. Compt. rend. XCII, 290.
607. Sur le problème de Pfaff. G. Darboux. Compt. rend. XCIV, 835.
608. Ueber den letzten Multiplicator eines Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung. Ant. Winckler. Wien. Akad.-Ber. LXXXII, 628.
609. Sur un système d'équations différentielles. Halphen. Compt. rend. XCII, 1101.
610. Sur un système d'équations différentielles. Brioschi. Compt. rend. XCII, 1389. — Halphen ibid. 1404.
611. Sur certaines équations différentielles linéaires simultanées aux dérivées partielles. E. Picard & Appell. Compt. rend. XCII, 692. [Vergl Nr. 67.]
612. Sur l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. L. V. Turquan. Compt. rend. XCII, 1200.
613. Sur l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre. F. G. Teixeira. Compt. rend. XCIII, 702.

Vergl. Abel'sche Transcendenten. Akustik 513. Bestimmte Integrale 556. Invariantentheorie 790. Mechanik. Oberflächen. Reihen 894.

Differentialquotienten.

614. Sur les différentielles successives des fonctions de plusieurs variables indépendantes. G. Darboux. Compt. rend. XCIII, 1123.
615. Sur les différentielles successives des fonctions de plusieurs variables et sur une propriété des fonctions algébriques. G. Darboux. Compt. rend. XCIV, 575.

E.

Elasticität.

616. Bestimmung der Elasticitätsconstanten des Kupfers. W. Voigt. Berl. Akad.-Ber. 1883, 961.
617. Sur le choc entre corps élastiques. Pilleux. Compt. rend. XCIV, 429.

Elektrodynamik.

618. On the graphik representation of the law of efficiency of an electric motor. Silv. P. Thompson. Phil. Mag. LXV, 124.
619. Sur la possibilité de l'équilibre électrique. L. Lévy. Compt. rend. XCIII, 706.
620. Sur quelques conséquences du principe de Gauss en electrostatique. Croullebois. Compt. rend. XCIV, 74.
621. Nouvelle démonstration du théorème de Riemann. Croullebois. Compt. rend. XCIII, 719.
622. Essai d'application du principe de Carnot aux actions électrochimiques. G. Chaperon. Compt. rend. XCII, 786.
623. Zur Theorie der sogenannten elektrischen Ausdehnung oder Elektrostriction. L. Boltzmann. Wien. Akad.-Ber. LXXXII, 826, 1157.
624. Sur le choix de l'unité de force dans les mesures électriques absolues. Lippmann. Compt. rend. XCII, 183.
625. Sur le principe de la conservation de l'électricité, ou second principe de la théorie des phénomènes électriques. G. Lippmann. Compt. rend. XCII, 1049.
626. Sur le principe de la conservation de l'électricité. G. Lippmann. Compt. rend. XCII, 1149.

627. Methode expérimentale pour la détermination de l'ohm. G. Lippmann. Compt. rend. XCIII, 713, 955; XCIV, 36. — Brillouin ibid. XCIII, 845, 1069.
628. Méthode pour la détermination de l'ohm. J. Joubert. Compt. rend. XCIV, 1519.
629. Ueber die elektrischen Strömungen in einem Kreiscylinder. G. Kirchhoff. Berl. Akad.-Ber. 1883, 519.
630. Ueber die stationäre Strömung der Elektricität in flächenförmigen Leitern. J. Haubner. Wien. Akad.-Ber. LXXXV, 77.
631. Ueber die Phasenunterschiede elektrischer Schwingungen. A. Oberbeck. Berl. Akad.-Ber. 1882, 125, 1065.
632. On the induction produced by variation of the intensity of the electric current in a spherical solenoid. Quet. Phil. Mag. LXVI, 456.
633. Sur les lois qui régissent les périodes et les coéfficients d'intensité, dans l'un des principaux groupes de forces électromotrices élémentaires dues à l'induction solaire, et sur la possibilité de faire servir l'aiguille aimantée à mesurer la vitesse avec laquelle le soleil tourne autour de son axe. Quet. Compt. rend. XCII, 336.
634. Sur les méthodes de comparaison des coefficients d'induction. Brillouin. Compt. rend. XCIII, 1010; XCIV, 435.
635. Ueber den dynamoelektrischen Vorgang. M. Margules. Wien. Akad.-Ber. LXXXVI, 1185.
636. Sur les résistances relatives que l'on doit donner, dans les machines dynamo-électriques, aux bobines actives, aux électro-aimants inducteurs et au circuit intérieur. W. Thomson. Compt. rend. XCIII, 474.
637. On selfregulating dynamoelectric machines. R. H. M. Bosanquet. Phil. Mag. LXV, 275.
638. Distribution de l'énergie par l'électricité. Marc. Deprez. Compt. rend. XCIII, 892, 952.
639. On the size of conductors for the distribution of electric energy. Th. Gray. Phil. Mag. LXVI, 187.
640. Des actions électriques dans les systèmes conducteurs semblables. Marc. Desprez. Compt. rend. CXIV, 431.
641. Sur le rendement des piles secondaires. É. Reynier. Compt. rend. XCII, 1093.
642. Sur le rendement et la limite de l'opération du transport de la force par l'électricité. M. Lévy. Compt. rend. XCIII, 709, 785, 842.
643. Théorie générale des transmissions par câbles metalliques. H. Léauté. Compt. rend. XCII, 996.
644. Rapport sur un mémoire de M. Léauté, relatif aux transmissions télédynamiques. Resal. Compt. rend. XCIII, 682.
645. Sur la solution pratique du problème du transport de la force à de grandes distances. M. Levy. Compt. rend. XCIV, 517.

Vergl. Hydrodynamik 773. Magnetismus. Potential.

Elliptische Transcendenten.

646. Sur quelques applications de la théorie des fonctions elliptiques. Hermite. Compt. rend. XCIII, 920, 1098; XCIV, 186, 372, 477, 594, 753. [Vergl. Nr. 122.]
647. Zur Theorie der elliptischen Functionen. Weierstrass. Berl. Akad.-Ber. 1882, 443; 1883, 193, 265, 1271.
648. Zur Theorie der Jacobi'schen Functionen von mehreren Veränderlichen. Weierstrass. Berl. Akad.-Ber. 1882, 505.
649. Zur Theorie der elliptischen Functionen. L. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1883, 497, 525.
650. Bemerkungen über die Multiplication der elliptischen Functionen. L. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1883, 717, 949.
651. Contribution à l'application des fonctions elliptiques à l'astronomie. O. Callandreau. Astr. Nachr. C, 193.
652. Sur le développement des intégrales elliptiques de première et de seconde espèce en séries entières récurrentes. J. Farkas. Compt. rend. XCII, 181.
653. Évaluation d'une intégrale. Hermite. Astr. Nachr. CI, 17.
654. Sur l'intégrale elliptique de troisième espèce. Hermite. Compt. rend. XCIV, 901.

Vergl. Abel'sche Transcendenten.

F.

Factorenfolge.

655. Sur la décomposition en facteurs primaires des fonctions uniformes ayant une ligne de points singuliers essentiels. E. Picard. Compt. rend. XCII, 690.
656. Sur le développement du produit infini $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots$ J. Franklin. Compt. rend. XCII, 448.

Formen.

657. Zur Theorie der Formen höherer Stufen. L. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1883, 957.
658. Notiz über die $2k$-elementige neutrale Gruppe einer Involution k^{ter} Stufe und $(2k+1)^{\text{ten}}$ Grades. C. Le Paige. Wien. Akad.-Ber. LXXXVI, 104.
659. Sur la représentation des nombres par les formes. Poincaré. Compt. rend. XCII, 777.
660. Sur les formes algébriques à plusieurs séries de variables. C. Le Paige. Compt. rend. XCIV, 31, 69.
661. Sur les formes quadratiques à plusieurs séries de variables. C. Le Paige. Compt. rend. XCIV, 424.
662. Sur les faisceaux de formes binaires ayant une même Jacobienne. C. Stephanos. Compt. rend. XCIII, 994. — Rapport sur ce mémoire. C. Jordan. Compt. rend. XCIV, 1230.
663. Ueber die Frage, unter welchen Bedingungen eine binäre Form m^{ter} Ordnung Theiler einer binären Form n^{ter} Ordnung ist. B. Igel. Wien. Akad.-Ber. LXXXII, 943.
664. Sur certaines formes quadratiques ternaires. E. Picard. Compt. rend. XCIV, 1241.
665. De la réduction des formes quadratiques quaternaires positives. L. Charve. Compt. rend. XCII, 782.
666. Sur la réduction des formes quadratiques. C. Jordan. Compt. rend. XCIII, 113, 181, 234.
667. Observations sur la réduction simultanée de deux formes bilinéaires. C. Jordan. Compt. rend. XCII, 1437.
668. Sur une propriété des formes trilinéaires. C. Le Paige. Compt. rend. XCII, 1048.
669. Sur la théorie des formes trilinéaires. C. Le Paige. Compt. rend. XCIII, 264, 509.
670. Sur les diviseurs de certaines fonctions homogènes du troisième ordre à deux variables. P. Pepin. Compt. rend. XCII, 173.

Vergl. Determinanten 574. Invariantentheorie.

Fourier'sche Reihe.

671. Sur la série de Fourier. C. Jordan. Compt. rend. XCII, 228. [Vergl. Nr. 555.]

Functionen.

672. Eine gewisse Classe von Riemann'schen Flächen, die nicht in einfach zusammenhängende verwandelt werden können. A. Puchta. Wien. Akad.-Ber. LXXXII, 260.
673. Sur les fonctions Fuchsiennes. Poincaré. Compt. rend. XCII, 333, 395, 859, 957, 1198, 1274, 1484; XCIII, 301, 581; XCIV, 163, 1038, 1166.
674. Sur les groupes kleinéens. Poincaré. Compt. rend. XCIII, 44.
675. Sur les groupes discontinus. Poincaré. Compt. rend. XCIV, 840.
676. Sur les expressions des coordonnées d'une courbe algébrique par des fonctions fuchsiennes d'un paramètre. E. Picard. Compt. rend. XCII, 1332.
677. Sur les fonctions uniformes d'un point analytique (x, y). Appell. Compt. rend. XCIV, 700.
678. Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. G. Mittag-Leffler. Compt. rend. XCIV, 414, 511, 713, 781, 938, 1040, 1105, 1163.
679. Sur une propriété des fonctions uniformes. Poincaré. Compt. rend. XCII, 1335.
680. Sur les fonctions uniformes présentant des lacunes. E. Goursat. Compt. rend. XCIV, 715.
681. Sur les fonctions uniformes affectées de coupures. E. Picard. Compt. rend. XCIV, 1405.
682. Sur les fonctions uniformes doublement périodiques à points singuliers essentiels. Appell. Compt. rend. XCIV, 936.

683. Ueber die doppeltperiodischen Functionen zweiter Art. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. LXXXVI, 969.
684. Sur une courbe particulière du troisième genre et sur certaines fonctions uniformes de deux variables indépendantes. E. Picard. Compt. rend. XCIII, 835.
685. Sur certaines fonctions uniformes de deux variables indépendantes et sur un groupe de substitutions linéaires. E. Picard. Compt. rend. XCIV, 579, 837.
686. Sur une fonction analogue aux fonctions modulaires. Poincaré. Compt. rend. XCIII, 138.
687. Sur une classe de fonctions analogues aux fonctions Θ. Elliot. Compt. rend. XCIII, 1008.
688. Sur la détermination du genre d'une fonction transcendante entière. Laguerre. Compt. rend. XCIV, 635. [Vergl. Nr. 772.]
689. Irrationalität der Zahl π. F. Lindemann. Berl. Akad.-Ber. 1882, 679.
690. Das Additionstheorem derjenigen Functionen, welche bei der Entwickelung von e^{axi} nach den Näherungsnennern regulärer Kettenbrüche auftreten. Leop. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. LXXXV, 491.
691. Relations algébriques entre les sinus supérieurs d'un même ordre. Rouyaux. Compt. rend. XCII, 1276.
692. Sur les sinus d'ordres supérieurs. E. West. Compt. rend. XCII, 1279.
Vergl. Abel'sche Transcendenten. Bestimmte Integrale. Differentialgleichungen. Differentialquotienten. Elliptische Transcendenten. Factorenfolge. Formen. Fourier'sche Reihe. Gammafunctionen. Imaginäres. Interpolation. Invariantentheorie. Mechanik 807. Quaternionen. Reihen. Thetafunctionen. Umkehrungsproblem.

G.

Gammafunctionen.

693. Ueber die Entwickelung einiger von dem Euler'schen Integrale zweiter Gattung abhängiger Ausdrücke in Reihen. A. Winckler. Wien. Akad.-Ber. LXXXV, 1039.
694. Sur l'intégrale eulérienne de seconde espèce. Gyldén. Compt. rend. XCII, 897, 942.
695. Sur les intégrales Eulériennes. J. Tannery. Compt. rend. XCIV, 1698.

Geodäsie.

696. Sur un procédé d'observation astronomique à l'usage des voyageurs les dispensant de la mesure des angles pour la détermination de la latitude, du temps sidéral et de la longitude. Ch. Rouget. Compt. rend. XCII, 27, 69.
697. Nouvelle méthode pour déterminer certaines constantes du sextant. Gruey. Compt. rend. XCIII, 41.
698. Les étalons de poids et mesures de l'Observatoir et les appareils qui ont servi à les construire; leur origine, leur histoire et leur état actuel. C. Wolf. Compt. rend. XCII, 1202; XCIII, 297; XCIV, 1503.

Geometrie (höhere).

699. Sur l'inversion générale. J. S. Vaněček. Compt. rend. XCIV, 1042.
700. Sur un mode de transformation des figures dans l'espace. J. S. Vaněček. Compt. rend. XCIV, 1463, 1583.
701. Ueber conjugirte Involutionen. C. Le Paige. Wien. Akad.-Ber. LXXXV, 844.
702. Beiträge zur Theorie des Doppelverhältnisses und zur Raumcollineation. M. Allé. Wien. Akad.-Ber. LXXXV, 1021.
703. Sur la génération des surfaces et des courbes à double courbure de tous les degrés. Math. N. Vaněček. Compt. rend. XCIV, 210.
704. Die Construction der algebraischen Flächen aus der Anzahl der sie bestimmenden Punkte mittelst reciproker Flächenbündel. G. v. Escherich. Wien. Akad.-Ber. LXXXV, 526.
705. Die Construction der algebraischen Curven und Flächen aus der Anzahl sie bestimmender Punkte mittelst reciproker linearer Systeme höherer Stufe. G. v. Escherich. Wien. Akad.-Ber. LXXXV, 893.
706. Ueber algebraische Raumcurven. G. Kohn. Wien. Akad.-Ber LXXXII, 755.
707. Ueber gemeinschaftliche Bisecanten algebraischer Raumcurven. Em. Weyr. Wien. Akad.-Ber. LXXXV, 840.

708. Ueber einen Correspondenzsatz. Em. Weyr. Wien. Akad.-Ber. LXXXVII, 592.
709. Sur une configuration remarquable de cercles dans l'espace. C. Stephanos. Compt. rend. XCIII, 578, 633.
710. Ueber Configurationen auf der Raumcurve vierter Ordnung erster Species. Ad. Ameseder. Wien. Akad.-Ber. LXXXVII, 1179.
711. Ueber Raumcurven vierter Ordnung zweiter Art. Aug. Adler. Wien. Akad.-Ber. LXXXVI, 919, 1201.
712. Ueber specielle Raumcurven vierter Ordnung zweiter Art. Aug. Adler. Wien. Akad.-Ber. LXXXVI, 1212.
713. Ueber lineare Transformationen. S. Kantor Wien. Akad.-Ber. LXXXII, 34.
714 Ueber successive lineare Transformationen. S. Kantor. Wien. Akad.-Ber. LXXXII, 39.
715 Zur Theorie der successiven quadratischen Transformationen in der Ebene. S. Kantor. Wien. Akad.-Ber. LXXXII, 237.
716. Sur une classe de courbes unicursales. G. Darboux. Compt. rend. XCIV, 930.
717. Sur les hypercycles. Laguerre. Compt. rend. XCIV, 778, 833, 933, 1033, 1160.
718. Sur une propriété du cercle. G. Darboux. Compt. rend. XCIV, 1108
719. Ueber die Focalcurven des Quetelet. C. Pelz. Wien. Akad.-Ber. LXXXII, 1207.
720. Beitrag zur synthetischen Theorie der ebenen Curven III. Ordnung mit Doppelpunkt. H. Drasch. Wien. Akad.-Ber. LXXXV, 534.
721. Ueber eindeutige Beziehungen auf einer allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung. Em. Weyr. Wien. Akad.-Ber. LXXXVII, 837.
722. Geometrische Untersuchung der ebenen Curven vierter Ordnung, insbesondere ihrer Berührungskegelschnitte. Ad. Ameseder. Wien. Akad.-Ber. LXXXVI, 396; LXXXVII, 15.
723. Ueber die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten. S. Kantor. Wien. Akad.-Ber. LXXXVI, 1051.

Vergl. Differentialgleichungen 576. Kegelschnitte. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

Geometrie (kinematische).

724. Kinematische Bestimmung der Contour einer windschiefen Schraubenfläche. Jos. Tesař. Wien. Akad.-Ber. LXXXVI, 377. — C. Pelz ebenda LXXXVII, 473.
725. Sur le déplacement d'une figure invariable. G. Darboux. Compt. rend. XCII, 118.
726. Du déplacement d'une figure de forme invariable dans un plan. Dewulf. Compt. rend. XCII, 1091.

Geometrie der Lage.

727. Ueber jene Flächen, welche aus ringförmig geschlossenen, knotenfreien Bändern durch in sich selbst zurückkehrende Längsschnitte erzeugt werden. O. Simony. Wien. Akad.-Ber. LXXXII, 691.
728. Ueber eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze. O. Simony. Wien. Akad.-Ber. LXXXV, 907; LXXXVII, 556.

Geschichte der Mathematik.

729. The solution of the Pyramid problem. R. Balard. Phil. Mag. LXV, 59.
730. Le problème des restes dans l'ouvrage chinois Swan-king de Sun-tsze et dans l'ouvrage Ta-yen-lei-schu de Yih-hing. L Matthiessen. Compt. rend. XCII, 291.
731. Ueber eine von Archilochos erwähnte Sonnenfinsterniss. Th. v. Oppolzer. Wien. Akad.-Ber. LXXXVI, 790. — Bernh. Schwarz ebenda LXXXVII, 763.
732. Astronomische Untersuchungen über Finsternisse. F. K. Ginzel. Wien. Akad.-Ber. LXXXV, 663.
733. Die Sonnenfinsterniss des Asurbanipal. Bernh. Schwarz. Wien. Akad.-Ber. LXXXVII, 773.
734. Der Vater des Archimedes. F. Blass. Astr. Nachr. CIV, 255.
735. L'hélice comme organe de propulsion dans les manuscrits de Lionardo da Vinci. G. Govi. Compt. rend. XCIII, 400. — Ch Ravaisson ibid. 496.
736. Wer beobachtete zuerst Sterne am hellen Tage? Winnecke. Astr. Nachr. CI, 241.
737. Sur une question de métrologie ancienne; origine du mile anglais. Faye. Compt. rend. XCII, 975.
738. Nachtrag zu Leibnizens und Huygens' Briefwechsel mit Papin. E. Gerland. Berl. Akad.-Ber. 1882, 979.

739. Documents relatifs au sujet du séjour de Papin à Venise. Daubrée. Compt. rend. XCIV, 58.
740. Sur la parallaxe du Soleil. Faye. Compt. rend. XCII, 375, 1071.
741. Rapport sur le rôle de Claude de Jouffroy dans la découverte de la navigation à vapeur. De Lesseps. Compt. rend. XCIII, 333.
742. Kritischer Beitrag zur Geschichte der meteorischen Astronomie. R. Lehmann-Filhés. Astr. Nachr. CI, 145.
743. Ueber die Pingré'schen Manuscripte. L. Schulhof. Astr. Nachr. C, 215.
744. Ueber die von dem Maltheserritter d'Angos im Jahre 1784 mitgetheilte Cometenentdeckung. H. Gyldén. Astr. Nachr. CII, 321.
745. Lettre de N. Fuss sur les grands objectifs, trouvée par M. Truchot dans les papiers du conventionnel Romme. Faye. Compt. rend. XCIV, 768.
746. Lettre d'Ampère a Lacroix. Compt. rend. XCII, 953.
747. Sur les méthodes de Wronski pour la mécanique céleste. Yvon Villarceau. Compt. rend. XCII, 815; XCIV, 1008.
748. Ueber einige Arbeiten C. G. J. Jacobi's auf dem Gebiete der Störungstheorie. W. Scheibner. Astr. Nachr. XCII, 305.
749. Einige nachträgliche ergänzende Bemerkungen in Betreff der Auffindung des Planeten Neptun und der Beobachtungen des dunkeln Saturnsringes in den Jahren 1838 und 1839. J. G. Galle. Astr. Nachr. CI, 219.
750. Énumération des manuscrits scientifiques laissés par Michel Chasles, mis en ordre par M. Mannheim. Compt. rend. XCIII, 911, 987, 1041, 1097.
751. Nekrolog von Carl Rudolf Powalky, † 11. Juli 1881. A. Hall. Astr. Nachr. C, 159.
752. Nekrolog von Carl Christian Bruhns, † 25. Juli 1881. Astr. Nachr. C, 129.
753. Nekrolog von J. Ricci, † 27. Sept. 1881. A. Ferrero. Astr. Nachr. C, 383.
754. Nekrolog von Joh. Carl Friedr. Zöllner, † 25. April 1882. Ast. Nachr. CII, 175.
755. Nekrolog von E. Plantamour, † 7. Sept. 1882. R. Wolf. Astr. Nachr. CIII, 161.
756. Nekrolog von C. W. Baeker, † 11. Sept. 1882. Astr. Nachr. CIII, 271.
757. Nekrolog von P. Gabr. Strasser, † 13. Sept. 1882. Astr. Nachr. CIII, 209.
758. Nekrolog von Gust. Svanberg, † 21. Nov. 1882. Astr. Nachr. CIV, 63.
759. Nekrolog von Jam. Challis, † 3. Dec. 1882. Astr. Nachr. CIV, 129.
760. Nekrolog von C. Hornstein, † 22. Dec. 1882. E. Weiss. Astr. Nachr. CIV, 207. Vergl. Geodäsie 698.

Gleichungen.

761. Die Composition Abel'scher Gleichungen. L. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1882, 1059.
762. Die kubischen Abel'schen Gleichungen des Bereichs $(\sqrt{-31})$. L. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1882, 1151.
763. Ueber algebraische Gleichungen, welche eine bestimmte Anzahl complexer Wurzeln besitzen. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. LXXXVII, 264.
764. On the equation to the secular inequalities in the planetary theory. J. J. Sylvester. Phil. Mag. LXVI, 267.
765. Sur la séparation des racines des équations dont le premier membre est décomposable en facteurs réels et satisfait à une équation linéaire du second ordre. Laguerre. Compt. rend. XCII, 178.
766. Sur une extension de la règle des signes de Descartes. Laguerre. Compt. rend. XCII, 230.
767. Sur la séparation des racines des équations numériques. Laguerre. Compt. rend. XCII, 1146.
768. Sur la distribution, dans le plan, des racines d'une équation algébrique dont le premier membre satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre. Laguerre. Compt. rend. XCIV, 412, 508.
769. Sur l'introduction des logarithmes dans les critériums qui déterminent une limite supérieure du nombre des racines d'une équation qui sont comprises entre deux nombres donnés. Laguerre. Compt. rend. XCIII, 1061.
770. Sur les équations algébriques de la forme $\frac{A_0}{x-a_0}+\frac{A_1}{x-a_1}+\ldots+\frac{A_n}{x-a_n}=0$. Laguerre. Compt. rend. XCIII, 890.
771. Sur les équations de la forme $\sum\int_a^b e^{-zx}F(z)\,dz=0$. Laguerre. Compt. rend. XCIII, 1000.
772. Sur quelques équations transcendantes. Laguerre. Compt. rend. XCIV, 160. Vergl. Interpolation.

H.

Hydrodynamik.

773. Analogien zwischen elektrischen und Wasserströmen, calorischer und elektrischer Kraftübertragung. Gust. Schmidt. Wien. Akad.-Ber. LXXXVI, 194.
774. Die Rotationsschwingungen flüssiger Cylinder. M. Margules. Wien. Akad.-Ber. LXXXV, 343.
775. Ueber Schwingungen fester Körper in Flüssigkeiten. Fr. Koláček. Wien. Akad.-Ber. LXXXVII, 1147.
776. Équations différentielles du mouvement des ondes produites à la surface d'un liquide par l'émersion d'un solide. J. Boussinesq. Compt. rend. XCIV, 71.
777. Sur les ondes que fait naître, dans l'eau en repos d'un canal, l'émersion d'un cylindre solide, plongé en travers dans ce canal. J. Boussinesq. Compt. rend. XCIV, 127.
778. Sur les ondes produites par l'émersion d'un solide à la surface d'une eau tranquille, quand il y a lieu de tenir compte des deux coordonnées horizontales. J. Boussinesq. Compt. rend. XCIV, 1505.
779. Des mouvements que prennent les diverses parties d'une liquide dans l'intérieur d'un vase ou réservoir d'où il s'écoule par un orifice. De Saint-Venant. Compt. rend. XCIV, 904, 1004, 1139.
780. Ueber das Fliessen einer incompressiblen Flüssigkeit durch Röhren kreisförmigen Querschnittes von beliebiger Gestalt und beliebiger Lage. O. Tumlirz. Wien. Akad.-Ber. LXXXV, 133.
781. Ueber die Rotationsbewegung einer homogenen tropfbaren Flüssigkeit um eine Axe unter dem Einfluss der Reibung. A. Tumlirz. Wien. Akad.-Ber. LXXXV, 105.
782. On a general theorem of the stability of the motion of a viscous fluid. J. Korteweg. Phil. Mag. LXVI, 112.
783. Rapport sur un mémoire de M. Bouquet de la Grye, intitulé „Étude sur les ondes à longue période dans les phénomènes des marées". D'Abbadie & F. Tisserand. Compt. rend. XCIV, 1446.
784. Sur les marées de l'île Campbell. Bouquet de la Grye. Compt. rend. XCIV, 1293.

Hyperbel.

785. Ueber die auf Flächen zweiten Grades liegenden gleichseitigen Hyperbeln. O. Rupp. Wien. Akad.-Ber. LXXXVI, 909.

Hyperboloid.

786. Construction der Osculationshyperboloide windschiefer Flächen. Ed. Weyr. Wien. Akad.-Ber. LXXXII, 7.

I.

Imaginäres.

787. Sur un moyen d'étendre la théorie des imaginaires sans faire usage des imaginaires. Saltel. Compt. rend. XCIV, 166.
788. Sur les polygones générateurs d'une relation entre plusieurs variables imaginaires. L. Lecornu. Compt. rend. XCII, 695.

Interpolation.

789. La formule d'interpolation de M. Hermite exprimée algébriquement. E. Schering. Compt. rend. XCII, 510.

Invariantentheorie.

790. Sur une classe d'invariants relatifs aux équations linéaires. Poincaré. Compt. rend. XCIV, 1402.
791. Sur l'invariant du dix-huitième ordre des formes binaires du cinquième degré. C. Le Paige. Compt. rend. XCII, 241.
792. Sur les covariants irréductibles du quantic binaire du huitième ordre. Sylvester. Compt. rend. XCIII, 192, 365.

K.

Kegelschnitte.

793. Ueber die von Möbius gegebenen Kriterien für die Art eines durch 5 Punkte oder 5 Tangenten bestimmten Kegelschnittes. H. Durège. Wien. Akad.-Ber. LXXXII, 123.

794. Relation générale entre 7 points quelconques d'une section conique. Conique d'homologie. Propriétés communes à trois figures homographiques. G. Tarry. Compt. rend. XCIV, 941.
795. Ueber Reflexe von Punkten auf Kreisen oder die Umkehrung des Normalenproblems. Fer. Röllner. Wien. Akad.-Ber. LXXXII, 1129.
Vergl. Hyperbel. Normalen 835.

Krümmung.

796. Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenen die Krümmungsverhältnisse betreffenden Eigenschaften. R. Lipschitz. Berl. Akad.-Ber. 1882, 1077; 1883, 169.
797. Sur une propriété de l'indicatrice, relative à la courbure moyenne des surfaces convexes. Faye. Compt. rend. XCII, 1019.

M.

Magnetismus.

798. Ueber eine Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf den Vorgang der Magnetisirung. Ant. Wassmuth. Wien. Akad.-Ber. LXXXVI, 539.
799. Ueber den innern, aus der mechanischen Wärmetheorie sich ergebenden Zusammenhang einer Anzahl von elektromagnetischen Erscheinungen. A. Wassmuth. Wien. Akad.-Ber. LXXXVII, 82.
800. Ueber die magnetisirende Wirkung elektrischer Schwingungen. A. Oberbeck. Berl. Akad.-Ber. LXXXIII, 975.
801. On the connexion between the units of magnetism and electricity. R. Clausius. Phil. Mag. LXV, 79.
802. On magnetomotive force. R. H. M. Bosanquet. Phil. Mag. LXV, 205.
803. On the determination in absolute units of the intensities of powerful magnetic fields. A. Gray. Phil. Mag. LXVI, 144.
804. Bestimmungen der Diamagnetisirungszahl des metallischen Wismuths in absolutem Maasse. Alb. v. Ettingshausen. Wien. Akad.-Ber. LXXXV, 37.
805. Zur Theorie des Lamont'schen Variationsapparates für Horizontalintensität. J. Liznar. Wien. Akad.-Ber. LXXXVII, 873.

Mannichfaltigkeiten.

806. Ueber die Hoppe'sche Knotencurve. H. Durège. Wien. Akad.-Ber. LXXXII, 135.

Mechanik.

807. Sur l'introduction de fonctions continues n'ayant pas de dérivée, dans les éléments de la mécanique. Appell & Janaud. Compt. rend. XCIII, 1005.
808. Sur les trois axes centrifuge. E. Brassinne. Compt. rend. XCIII, 49. [Vergl. Nr. 821.]
809. Theorie der Beschleunigungscurven. Fer. Wittenbauer. Wien. Akad.-Ber. LXXXII, 1169.
810. Sur un cas particulier de la théorie du mouvement d'un solide invariable dans un milieu résistant. Willotte. Compt. rend. XCIII, 376.
811. Sur divers problèmes du mouvement relatif. Ph. Gilbert. Compt. rend. XCIV, 197.
812. Ueber die allgemeine Form der Integrale des Dreikörperproblems. And. Lindstedt. Astr. Nachr. CV, 97.
813. Das Problem der drei Körper in der neuen Störungstheorie. Aug. Weiler. Astr. Nachr. CII, 113; CV, 209. [Vergl. Bd. XXVII, Nr. 433.]
814. On central forces and the conservation of energy. Walt. R. Browne. Phil. Mag. LXV, 35, 228. — G. W. v. Tunzelmann ibid. 152, 299.
815. The basis of statics. Hor. Lamb. Phil. Mag. LXV, 187.
816. On the meaning of „force". Maxw. H. Close. Phil. Mag. LXVI, 248. — Walt. R. Browne ibid. 368.
817. On the reality of force. Walt. R. Browne. Phil. Mag. LXVI, 387.
818. On the laws of motion. P. G. Tait. Phil. Mag. LXVI, 439.
819. Eine dynamische Erklärung der Gravitation. S. Tolver Preston. Wien. Akad.-Ber. LXXXVII, 795.
820. Ueber die Möglichkeit, vergangene Wechsel im Universum durch die Wirkung der jetzt thätigen Naturgesetze — auch in Uebereinstimmung mit der Existenz eines Wärmegleichgewichts in vergrössertem Massstabe zu erklären. S. Tolver Preston. Wien. Akad.-Ber. LXXXVII, 806.

821. Systèmes articulés, assurant le mouvement rectiligne ou la courbure circulaire. Gagarine. Compt. rend. XCIII, 711.
822. Sur la théorie des plaques vibrantes. E. Mathieu. Compt. rend. XCII, 123.
823. Die Theorie des longitudinalen Stosses cylindrischer Stäbe. W. Voigt. Berl. Akad.-Ber. 1882, 683.
824. Comment se transmet, dans un solide isotrope (en équilibre), la pression exercée sur une tres petite partie de sa surface. J. Boussinesq. Compt. rend. XCIII, 703.
825. Égalité des abaissaments moyens que produisent, chacune, aux points où est déposée l'autre, deux charges égales, arbitrairement distribuées, le long de deux circonférences concentriques, sur un sol horizontal, ou sur une plaque circulaire horizontale ayant même centre que ces circonférences et appuyée ou encastrée sur tout son contour. J. Boussinesq. Compt. rend. XCIII, 783.
826. Résistance d'une barre prismatique et homogène, de longueur supposée infinie, au choc transversal et au choc longitudinal. J. Boussinesq. Compt. rend. XCIV, 1044.
827. Les déplacements qu'entraînent de petites dilatations ou condensations quelconques produites, dans tout milieu homogène et isotrope indéfini, sont calculables à la manière d'une attraction newtonienne. J. Boussinesq. Compt. rend. XCIV, 1648.
828. Sur l'action de déformation du choc, comparée à celle d'un effort continu. Marchal. Compt. rend. XCIV, 773.
829. Rapport sur un mémoire de Mr. Périssé intitulé „Des causes qui tendent à gauchir les poutres des ponts en fer, et des moyens de calculer ces poutres pour résister aux efforts gauchissants". Bresse. Compt. rend. XCII, 948. [Vergl. Nr. 841.]
830. Sur l'application de la résistance des matériaux aux pièces des machines. H. Léauté. Compt. rend. XCIV, 843.
831. Sur un point de la théorie mathématique des effets du jeu de billard. H. Resal. Compt. rend. XCIV, 1548.
Vergl. Akustik. Astronomie. Ballistik. Capillarität. Elasticität. Elektrodynamik. Hydrodynamik. Magnetismus. Molecularphysik. Nautik. Optik. Pendel. Potential. Variationsrechnung. Wärmelehre.

Molecularphysik.

832. Théorie de la dissociation: influence de la pression. G. Lemoine. Compt. rend. XCIII, 265, 312.
Vergl. Elektodynamik 622.

N.

Nautik.

833. Théorie d'un bateau rapide. R. Pictet. Compt. rend. XCIII, 585.
Vergl. Geschichte der Mathematik 735, 741.

Normalen.

834. Neue Eigenschaften der Normalenflächen für Flächen zweiten Grades längs ebener Schnitte. Gust. Ad. v. Peschka. Wien. Akad.-Ber. LXXXV, 381. [Vergl. Bd. XXVII, Nr. 445.]
835. Zum Normalenproblem der Kegelschnitte. C. Pelz. Wien. Akad.-Ber. LXXXV, 169.
Vergl. Kegelschnitte 795.

O.

Oberflächen.

836. Sur la représentation sphérique des surfaces. G. Darboux. Compt. rend. XCIV, 120, 158, 1290, 1343.
837. Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenem Ausdruck des Linearelements. R. Lipschitz. Berl. Akad.-Ber. 1883, 541.
838. Sur les surfaces pour lesquelles les coordonnées d'un point quelconque s'expriment par des fonctions abéliennes de deux paramètres. E. Picard. Compt. rend. XCII, 1495.
839. Ueber die Verschiebbarkeit geodätischer Dreiecke in krummen Flächen. Jul. Weingarten. Berl. Akad.-Ber. 1882, 453.

840. Ueber die Differentialgleichung der Oberflächen, welche durch ihre Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate getheilt werden können. Jul. Weingarten. Berl. Akad.-Ber. 1883, 1163.
841. Détermination des lignes de courbure de toutes les surfaces de 4. classe, corrélatives des cyclides, qui ont le cercle de l'infini pour ligne double. G. Darboux. Compt. rend. XCII, 29.
842. Sur les modes de transformation qui conservent les lignes de courbure. G. Darboux. Compt. rend. XCII, 286.
843. Tangentenconstruction für die Berührungslinie zwischen einer windschiefen Fläche und ihrer Leitfläche. H. Drasch. Wien. Akad.-Ber. LXXXII, 1140.
844. Sur une nouvelle définition de la surface des ondes. G. Darboux. Compt. rend. XCII, 446.
845. Die Strictionslinien der Regelflächen zweiten und dritten Grades. Aug. Adler. Wien. Akad.-Ber. LXXXV, 369.
846. Sur un système cyclique particulier. Ribaucour. Compt. rend. XCII, 233.
847. Sur la surface de Kummer à 16 points singuliers. Brioschi. Compt. rend. XCII, 944. [Vergl. Nr. 905.]
848. Sur la surface à 16 points singuliers. G. Darboux. Compt. rend. XCII, 1493.
849. Die Flächen sechsten Grades mit einer dreifachen cubischen Curve. Em. Weyr. Wien. Akad.-Ber. LXXXV, 513.

Vergl. Geometrie (höhere). Krümmung.

Oberflächen zweiter Ordnung.

850. Axenbestimmung der Contouren von Flächen zweiter Ordnung. H. Drasch. Wien. Akad.-Ber. LXXXVII, 1226.
851. Ueber eine Eigenschaft der Oberflächen zweiter Ordnung. C. Le Paige. Wien. Akad.-Ber. LXXXVII, 599.

Vergl. Hyperbel. Hyperboloid. Normalen 834.

Optik.

852. Sur la réalité d'une équivalence cinématique en optique ondulatoire. Croullebois. Compt. rend. XCIII, 53.
853. Sur le mouvement relatif de la terre et de l'éther. A. Michelson. Compt. rend. XCIV, 520.
854. Zur Theorie der Lichtstrahlen. G. Kirchhoff. Berl. Akad.-Ber. 1882, 641.
855. An illustration of the crossing of rays. Walt. Baily. Phil. Mag. LXVI, 58.
856. Sur la vitesse de la lumière. Guy. Compt. rend. XCII, 34, 127. — A. Cornu ibid. 53. [Vergl. Nr. 377.]
857. Remarques sur la vitesse de la lumière, à l'occasion de deux mémoires de lord Rayleigh. Gouy. Compt. rend. XCIV, 1296.
858. Minimum du pouvoir de résolution d'un prisme. Thollon. Compt. rend. XCII, 128. [Vergl. Nr. 382.]
859. On curved diffraction-gratings. R. T. Glazebrook. Phil. Mag. LXV, 414; LXVI, 377.
860. On the spectra formed by curved diffraction-gratings. Walt. Baily. Phil. Mag. LXV, 183.
861. On concave gratings for optical purposes. H. A. Rowland. Phil. Mag. LXVI, 197.
862. Sur la condition d'achromatisme dans les phénomènes d'interférence. A. Cornu. Compt. rend. XCIII, 809. [Vergl. Nr. 376.]
863. Sur les conditions d'achromatisme dans les phénomènes d'interférence. A. Hurion. Compt. rend. XCIV, 1345.
864. Sur la théorie de la polarisation rotatoire. Er. Mallard. Compt. rend. XCII, 1155.
865. On polarizing prisms. R. T. Glazebrook. Phil. Mag. LXV, 352. — Silv. P. Thompson ibid. 435.
866. Ueber polaristrobometrische Methoden. F. Lippich. Wien. Akad.-Ber. LXXXV, 268.
867. Ueber die Beugungsfigur des Heliometer-Objectivs. H. Bruns. Astr. Nachr. CIV, 1.
868. Sur la grandeur et les variations des images de Purkinje. Croullebois. Compt. rend. XCII, 73.

Vergl. Crystallographie 565, 567. Refraction.

P.

Pendel.

869. Zur Ermittelung der Reduction auf den unendlich kleinen Schwingungsbogen. Th. v. Oppolzer. Wien. Akad.-Ber. LXXXVI, 713.
870. Sur la loi de déviation du pendule de Foucault. J. Bertrand. Compt. rend. XCIV, 371. — Hatt ibid. 638.
871. Elementary investigations relating to forced vibrations; with applications to the tides and to controlled pendulums. J. D. Everett. Phil. Mag. LXV, 73.
872. Ueber die Compensation eines Secundenpendels für Temperatur und Luftdruck vermittelst eines Quecksilbercylinders und eines Krueger'schen Manometers. J. A. C. Oudemans. Astr. Nachr. C, 17.

Potential.

873. Ueber die Kraftlinien eines um eine Axe symmetrischen Feldes. J. Stefan. Wien. Akad.-Ber. LXXXV, 987.
874. Ueber das logarithmische Potential einer nicht isolirten elliptischen Platte. J. Haubner. Wien. Akad.-Ber. LXXXVII, 412.
875. Sur un potentiel à quatre variables, qui rend presque intuitives l'intégration de l'équation du son et la démonstration de la formule de Poisson concernant le potentiel inverse à trois variables. J. Boussinesq. Compt. rend. XCIV, 1465.
876. Sur quelques cas nouveaux de figures équipotentielles, réalisées électrochimiquement. A. Guébhard. Compt. rend. XCIII, 403, 582, 792.
877. Sur une certaine classe de figures équipotentielles et sur les imitations hydrauliques de M. Decharme. Ad. Guébhard. Compt. rend. XCIV, 851.
878. Ueber Herrn A. Guébhard's Darstellung der Aequipotentialcurven. E. Mach. Wien. Akad.-Ber. LXXXVI, 8.
879. Ueber die Guébhard'schen Ringe. L. Ditscheiner. Wien. Akad.-Ber. LXXXVI, 676.

Vergl. Elektrodynamik. Pendel.

Q.

Quadratur.

880. Sur un intégrateur, instrument servant à l'intégration graphique. Abdank-Abakanowicz. Compt. rend. XCII, 402, 515; XCIV, 783.
881. Ein Beitrag zur Theorie der in der Praxis hauptsächlich verwendeten Polarplanimeter. Jul. Kajaba. Wien. Akad.-Ber. LXXXVI, 635.
882. Ein Beitrag zur Bestimmung der Constanten des Polarplanimeters. Fr. Lorber. Wien. Akad.-Ber. LXXXVI, 657.

Quaternionen.

883. On the involution and evolution of quaternions. J. J. Sylvester. Phil. Mag. LXVI, 394.

R.

Rectification.

884. Sur l'application d'un théorème de Poncelet au calcul approximatif des arcs de courbes planes. H. Resal. Compt. rend. XCIV, 1375.

Vergl. Functionen 689.

Refraction.

885. Ueber die Bessel'sche Theorie der Refraction. H. Gyldén. Astr. Nachr. C, 53.
886. Ueber die Strahlenbrechung im Innern eines Cometen. M. W. Meyer. Astr. Nachr. CIII, 353.
887. Die astronomische Refraction als Function der meteorologischen Elemente. Arth. Kerber. Astr. Nachr. CIV, 337.
888. Application des franges de Talbot à la détermination des indices de réfraction des liquides. Hurion. Compt. rend. XCII, 452.
889. Sur un appareil synthétique, reproduisant le phénomène de la double réfraction circulaire. Gouy. Compt. rend. XCII, 703.
890. Sur une loi simple relative à la double réfraction circulaire naturelle ou magnétique. A. Cornu. Compt. rend. XCII, 1365; XCIII, 55.

891. Explication d'un contraste en double réfraction circulaire. Croullebois. Compt. rend. XCIII, 459.
892. Sur la double réfraction elliptique et les trois systèmes de franges. Croullebois. Compt. rend. XCII, 297, 519.

Reihen.

893. Sur certaines séries pour le développement des fonctions d'une variable. Halphen. Compt. rend. XCIII, 781, 833. [Vergl. Nr. 424.]
894. Sur des fonctions qui proviennent de l'équation de Gauss. Halphen. Compt. rend. XCII, 856.
895. Solution d'un problème général sur les séries. D. André. Compt. rend. XCII, 697. [Vergl. Bd. XXVIII, Nr. 740, 741.]
896. Ueber Ableitung neuer unendlicher Reihen aus einer gegebenen durch Umstellung der Vorzeichen nach einem bestimmten Gesetze. R. Mildner. Wien. Akad.-Ber. LXXXVI, 999.
897. Ueber Potenzreihen, deren Glieder mit den aufeinander folgenden Gliedern einer arithmetischen Reihe r^{ten} Ranges multiplicirt oder durch letztere dividirt werden. R. Mildner. Wien. Akad.-Ber. LXXXVII, 532.
898. Développements en série d'une fonction holomorphe dans une aire limitée par les arcs de cercle. Appell. Compt. rend. XCIV, 1238.
899. Sur une série d'Abel. Halphen. Compt. rend. XCIII, 1003.
900. Sur une raison générale, propre à justifier synthétiquement l'emploi des divers développements de fonctions arbitraires usités en Physique mathématique. J. Boussinesq. Compt. rend. XCII, 513.
901. Sur un mode de représentation des fonctions. Gyldén. Compt. rend. XCII, 213.
902. Eine neue Methode, die negativen und ungeraden Potenzen der Entfernungen der Himmelskörper zu entwickeln. P. Harzer. Astr Nachr. CII, 1.
903. On the number of fractions contained in any „Farey series" of which the limiting number is given. J. J. Sylvester. Phil. Mag. LXV, 251.

Vergl. Akustik 513. Fourier'sche Reihe.

T.

Thetafunctionen.

904. Sur un cas de réduction des fonctions Θ de deux variables à des fonctions ϑ d'une variable. Appell. Compt. rend. XCIV, 421.
905. Sur la surface à 16 points singuliers et les fonctions Θ à deux variables. G. Darboux. Compt. rend. XCII, 685. [Vergl. Nr. 847.]

Vergl. Functionen 687.

U.

Umkehrungsproblem.

906. Ueber Functionen einer beliebigen Anzahl unabhängiger Variabeln, welche durch Umkehrung der Integrale einer gleich grossen Anzahl gegebener Functionen entstehen. L. Fuchs. Berl. Akad.-Ber. 1883, 507.
907. Sur les fonctions de deux variables qui naissent de l'inversion des intégrales de deux fonctions données. L. Fuchs. Compt. rend. XCII, 1330, 1401.

V.

Variationsrechnung.

908. Nouvelle manière d'employer le principe de la moindre action, dans les questions de Dynamique. E. Brassinne. Compt. rend. XCIV, 169.
909. Sur un passage de la „Mécanique analytique" relatif au principe de la moindre action. E. Brassinne. Compt. rend. XCIV, 1110.

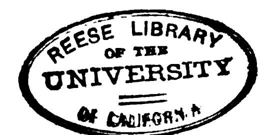
W.

Wärmelehre.

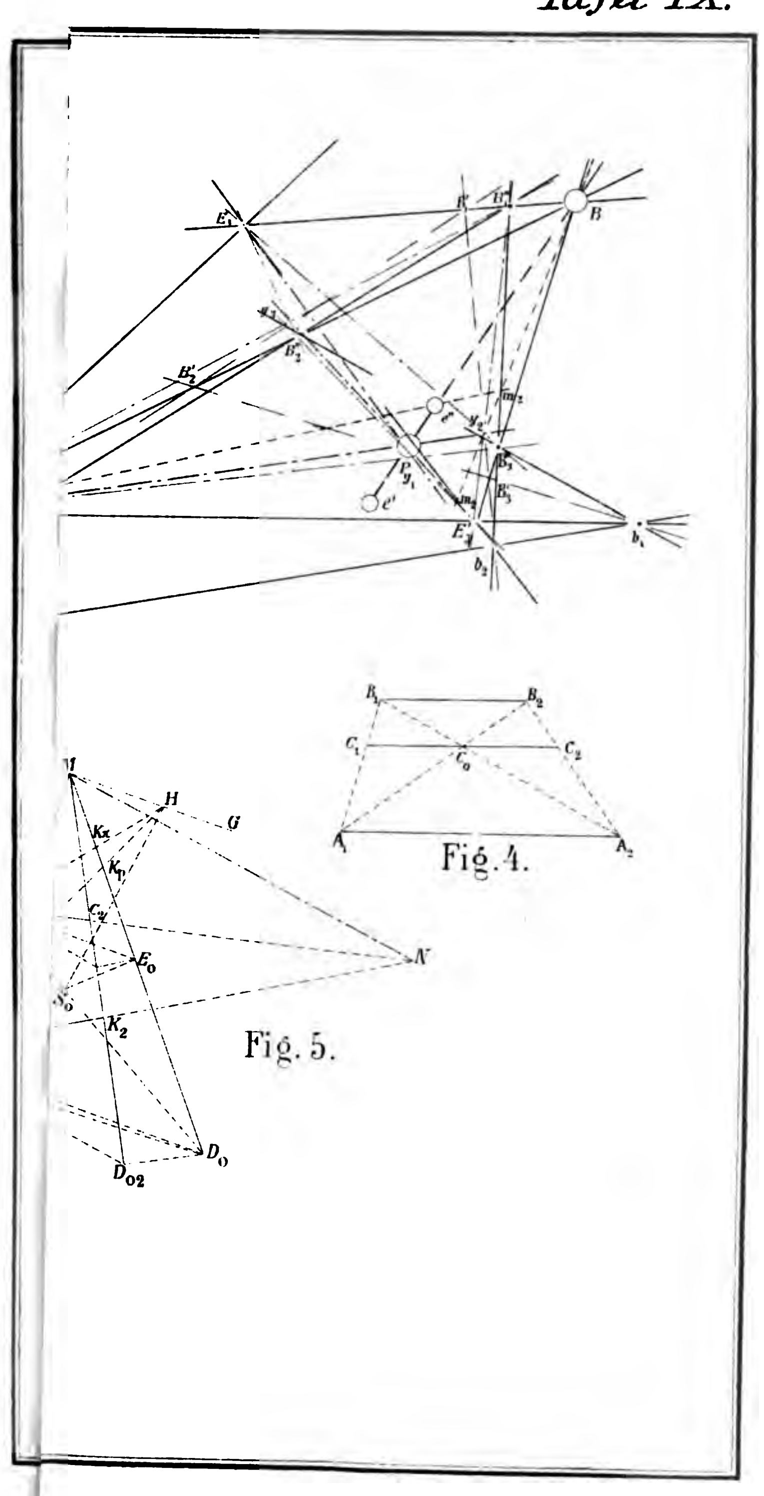
910. Sur la théorie de la chaleur. H. Resal. Compt. rend. XCII, 157.
911. Ueber Ausstrahlung und Absorption. E. Lecher. Wien. Akad.-Ber. LXXXV, 441.
912. Psychrometerstudie. Jos. M. Pernter. Wien. Akad.-Ber. LXXXVII, 777.

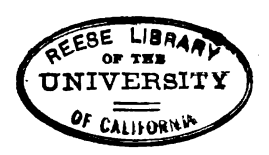
942. Sur les diviseurs des fonctions des périodes des racines primitives de l'unité Sylvester. Compt. rend. XCII, 1084.
943. Sur la divisibilité d'un certain quotient par les puissances d'une certaine factorielle. D. André. Compt rend. XCIV, 426. [Vergl. Nr. 561]
944. Sur les fonctions irréductibles suivant un module premier. A. E. Pellet Compt. rend. XCIII, 1065.
945. Algorithmen zur Bestimmung des verallgemeinerten Legendre'schen Symbols L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. LXXXII, 931.
946. Sur une extension de la notion arithmétique de genre. Poincaré. Compt rend. XCIV, 67, 124.
947. Zur Theorie der Kreistheilungsgleichung. A. Migotti. Wien. Akad.-Ber. LXXXVII, 7.
948. Méthode nouvelle pour diviser le cercle en parties égales. A. E. Pellet Compt. rend. XCIII, 838.

Vergl. Combinatorik 563. Formen. Geschichte der Mathematik 730. Reihen 903.



Tafel IX.




REESE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF CALIFORNIA

Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.



Neunundzwanzigster Jahrgang.

Supplement.

Mit einer lithographirten Tafel.

LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1884.



Druck von B. G. Teubner in Dresden.

INHALT.



I.

Ueber Reihen harmonischer Mittelpunkte vom zweiten Grade.

Von

Dr. Reinhold Slawyk,

Oberlehrer in Strassburg (Elsass).

Lithogr. Tafel Fig. 1—3.

1. Es sei eine Gerade $\mathfrak{G}$ und ein Strahlbüschel K zweiter Ordnung (Tangenten eines Kegelschnittes K) gegeben. Die Punktreihe $\mathfrak{G}$ beziehen wir projectivisch auf den Strahlbüschel K etwa in folgender Art. Es sei $\mathfrak{A}$ irgend eine Tangente von K; wir weisen drei Punkten von $\mathfrak{G}$ projectivisch drei Punkte von $\mathfrak{A}$ zu, wodurch die projectivische Beziehung der Punktreihen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{A}$ vollständig geordnet ist. Entspricht also einem Punkte s von $\mathfrak{G}$ ein Punkt $\mathfrak{s}$ von $\mathfrak{A}$, so dürfen wir auch die (ausser $\mathfrak{A}$ noch) aus $\mathfrak{s}$ an K führende Tangente als s projectivisch entsprechend ansehen, weil bekanntlich zwei Tangenten eines Kegelschnittes von den übrigen in zwei projectivischen Punktreihen geschnitten werden. Schneidet nun endlich die aus $\mathfrak{s}$ zu ziehende zweite Tangente eine feste Gerade $\mathfrak{H}$ im Punkte t, so entspricht dem Punkte s auch eindeutig der Punkt t. Wir erhalten somit auf $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ eine Beziehung, wonach jedem Punkte s von $\mathfrak{G}$ eindeutig ein Punkt t von $\mathfrak{H}$ entspricht, eine Beziehung, welche in den nächsten Zeilen weiter behandelt werden soll.

Wir untersuchen zunächst die Frage, wie viele Punktepaare st auf den beiden Geraden $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ gegeben sein müssen, damit die ganze, oben erklärte Beziehung bestimmt sei.

Es seien zuerst die Punkte $s_1 s_2 s_3$ auf $\mathfrak{G}$ und $t_1 t_2 t_3$ auf $\mathfrak{H}$ beliebig angenommen, und durch $t_1 t_2 t_3$ beliebig die Geraden $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 \mathfrak{T}_3$ resp. gezogen, ohne dass dieselben sich in Einem Punkte schneiden. Ausserdem nehmen wir auf $\mathfrak{G}$ noch den Punkt s_4 und auf $\mathfrak{H}$ noch den Punkt t_5 beliebig an. Durch t_5 legen wir eine Gerade $\mathfrak{A}$, welche $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 \mathfrak{T}_3$ resp. in $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3$ schneiden mag. Ferner beziehen wir die Punktreihen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{A}$ so aufeinander, dass den Punkten $s_1 s_2 s_3$ von $\mathfrak{G}$ resp. die Punkte $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3$ entsprechen. Dann entspricht in den so constituirten projectivischen Punktreihen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{A}$ dem Punkte s_4 auch ein Punkt $\mathfrak{a}_4$. Welches ist nun der Ort von $\mathfrak{a}_4$, wenn wir $\mathfrak{A}$ um t_5 drehen, und $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3$ die Geraden $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 \mathfrak{T}_3$ durchlaufen?

Wir nehmen ein Kegelschnittbüschel M an, dessen Diagonaldreiseit die Geraden $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 \mathfrak{T}_3$ bilden, eine Annahme, der man in unendlicher Mannigfaltigkeit nachkommen kann; es seien

$$g_1 = (\mathfrak{T}_2 \mathfrak{T}_3),\ g_2 = (\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_3),\ g_3 = (\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2).$$

Die conjugirten Punkte der Punkte von $\mathfrak{A}$, in Bezug auf M construirt, liegen auf einem Kegelschnitt A, welcher $g_1 g_2 g_3$ enthält. In der That ist z. B. g_1 der conjugirte Punkt zu $\mathfrak{a}_1$ u. s. w. A enthält auch die conjugirten Punkte T_5 und A_4 zu t_5 und $\mathfrak{a}_4$ und es ist

$$T_5 (g_1 g_2 g_3 A_4) \barwedge (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_4),$$

d. h.

$$(g_1 g_2 g_3 A_4) \barwedge (s_1 s_2 s_3 s_4).$$

Legen wir durch t_5 eine zweite Gerade $\mathfrak{B}$, welche $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 \mathfrak{T}_3$ in den Punkten $\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_3$ schneidet und construiren auf ihr $\mathfrak{b}_4$ so, dass $(s_1 s_2 s_3 s_4) \barwedge (\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_3 \mathfrak{b}_4)$); construiren wir ferner den Ort B der conjugirten Punkte in Bezug auf M, so ist unter selbstverständlicher Bezeichnung

$$T_5 (g_1 g_2 g_3 B_4) \barwedge (s_1 s_2 s_3 s_4),$$

d. h. $T_5 A_4 B_4$ liegen in einer geraden Linie $\mathfrak{L}_5$.

Ueberhaupt liegt für jede durch t_5 gehende Gerade $\mathfrak{X}$ der entsprechende Punkt X_4 auf $\mathfrak{L}_5$, so auch der Punkt T'_4, welcher demjenigen Punkte t'_4 von $\mathfrak{H}$ in Bezug auf das Büschel M conjugirt ist, welcher durch die Bedingung

$$(s_1 s_2 s_3 s_4) \barwedge (t_1 t_2 t_3 t'_4)$$

gefunden wird. Umgekehrt liegen daher die in Bezug auf M conjugirten Punkte der Punkte von $\mathfrak{L}_5$ auf einem Kegelschnitt L_5, welcher durch $g_1 g_2 g_3 t_5 t'_4$ geht und durch diese fünf Punkte bestimmt ist. Dieser Kegelschnitt ist der gesuchte Ort der Punkte $\mathfrak{a}_4 \mathfrak{b}_4$ u. s. w.

Nehmen wir nun auf $\mathfrak{S}$ noch einen Punkt s_5 und auf $\mathfrak{H}$ noch einen Punkt t_4 an, legen durch t_4 ein Strahlbüschel und construiren auf jedem Strahle $\mathfrak{A}'$ desselben die Punkte $\mathfrak{a}'_1 \mathfrak{a}'_2 \mathfrak{a}'_3 \mathfrak{a}'_5$, wobei die drei ersteren auf den Geraden $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 \mathfrak{T}_3$ resp. gelegen sind, und der vierte $\mathfrak{a}'_5$ durch die Bedingung

$$(\mathfrak{a}'_1 \mathfrak{a}'_2 \mathfrak{a}'_3 \mathfrak{a}'_5) \barwedge (s_1 s_2 s_3 s_5)$$

gefunden wird, so ist der Ort für $\mathfrak{a}'_5$ ein Kegelschnitt L_4, welcher $g_1 g_2 g_3 t_4$ und den Punkt t'_5 von $\mathfrak{H}$ enthält, welcher der Bedingung

$$(s_1 s_2 s_3 s_5) \barwedge (t_1 t_2 t_3 t'_5)$$

genügt.

Die beiden Kegelschnitte L_4 und L_5 schneiden sich noch in einem reellen Punkte P. Ziehen wir die Geraden $\mathfrak{A}' = P t_4$ und $\mathfrak{A} = P t_5$, so werden sie durch $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 \mathfrak{T}_3$ in den Punkten $\mathfrak{a}'_1 \mathfrak{a}'_2 \mathfrak{a}'_3$ und $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3$ geschnitten. In P liegen der Punkt $\mathfrak{a}_4$ von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}'_5$ von $\mathfrak{A}'$, und es ist

$$(s_1 s_2 s_3 s_4) \barwedge (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_4)$$
$$(s_1 s_2 s_3 s_5) \barwedge (\mathfrak{a}'_1 \mathfrak{a}'_2 \mathfrak{a}'_3 \mathfrak{a}'_5).$$

Vervollständigen wir die beiden Punktreihen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ noch durch die Punkte $\mathfrak{a}_5$ und $\mathfrak{a}'_4$ so, dass

$$(s_1 s_2 s_3 s_4 s_5) \barwedge (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_4 \mathfrak{a}_5) \barwedge (\mathfrak{a}'_1 \mathfrak{a}'_2 \mathfrak{a}'_3 \mathfrak{a}'_4 \mathfrak{a}'_5),$$

so ist das Product der Reihen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ ein Kegelschnitt K, dessen Tangenten $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}'_1 t_1$, $\mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}'_2 t_2$, $\mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}'_3 t_3$, $\mathfrak{a}_4 \mathfrak{a}'_4 t_4$, $\mathfrak{a}_5 \mathfrak{a}'_5 t_5$ den Punkten $s_1 s_2 s_3 s_4 s_5$ projectivisch entsprechen und die Punkte $t_1 \ldots t_5$ enthalten. Die projectivische Zuordnung des ganzen Strahlbüschels K zweiter Ordnung zu den Punkten von $\mathfrak{G}$ ist vollständig bestimmt.

Der oben gefundene Punkt P kann durch directes Linienziehen beschafft werden, wenn man bedenkt, dass die beiden Kegelschnitte L_5 und L_4 durch $P g_1 g_2 g_3$ gehen und $\mathfrak{H}$ resp. in $t_5 t'_4$ und $t_4 t'_5$ schneiden. Es bestimmen nämlich die reellen Punktepaare $t_4 t'_5$ und $t_5 t'_4$ auf $\mathfrak{H}$ eine Involution, in welcher wir die Punkte τ_{52} und τ_{53} finden können, welche t_2 und t_3 resp. conjugirt sind. Es ist dann

$$P = (g_3 \tau_{53},\ g_2 \tau_{52}).$$

Es möge nun dem Punkte s_6 von $\mathfrak{G}$ eine Tangente $\mathfrak{A}''$ von K entsprechen, welche $\mathfrak{H}$ in t_6 schneidet, und es sei

$$(s_1 s_2 s_3 s_6) \barwedge (t_1 t_2 t_3 t'_6).$$

Diese Tangente $\mathfrak{A}''$ wird von den übrigen in einer Punktreihe $\mathfrak{a}''$ geschnitten, welche den Punktreihen s auf $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{a}'$ auf $\mathfrak{A}'$ projectivisch ist; $\mathfrak{a}''_i$ entspricht $\mathfrak{a}'_i$ und s_i. Denken wir uns nun, die Punktepaare $s_1 t_1$, $s_2 t_2$, $s_3 t_3$, $s_4 t_4$, $s_6 t_6$ seien gegeben, und stellen wir die Anforderung, den Punkt P' zu finden, der dieselbe Rolle spielen soll, wie vorhin der Punkt P, als wir statt $s_6 t_6$ das Paar $s_5 t_5$ als gegeben annahmen, so wird nur ein einziger Punkt P' existiren, welcher der Forderung genügt, so lange wir die drei Geraden $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 \mathfrak{T}_3$ unverändert lassen. Dieser Punkt P' kann aber der obigen Bemerkung zufolge nur der Schnittpunkt $(\mathfrak{A}' \mathfrak{A}'') = \mathfrak{a}'_6$ sein. Gerade so wie vorhin bestimmen die Paare $t_4 t'_6$ und $t_6 t'_4$ auf $\mathfrak{H}$ eine Involution, in welcher wir die Punkte $\tau_{62} \tau_{63}$ finden können, welche t_2 und t_3 resp. conjugirt sind. Es ist dann $\mathfrak{a}'_6 = (g_3 \tau_{63},\ g_2 \tau_{62})$. Auch erhält man durch Projection von g_2 und g_3 aus nach den Punkten $\mathfrak{a}'$ von $\mathfrak{A}'$ auf $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ die Relationen

$$(s_1 s_3 s_5 s_6) \barwedge (t_1 t_3 \tau_{52} \tau_{62})$$
$$(s_1 s_2 s_5 s_6) \barwedge (t_1 t_2 \tau_{53} \tau_{63}).$$

Wir sind nun in der Lage, aus den ersten fünf Punktepaaren st das sechste und somit alle übrigen herzuleiten. Zunächst bestimmen wir die Punkte $t'_4 t'_5 t'_6$ unter der Bedingung

$$s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 \barwedge t_1 t_2 t_3 t'_4 t'_5 t'_6.$$

Ferner liefern die Paare $t_4 t'_5$ und $t_5 t'_4$ eine Involution, in welcher $t_2 \tau_{52}$ ein Paar conjugirte Punkte sein sollen. Die Relation

$$s_1 s_3 s_5 s_6 \;\overline{\wedge}\; t_1 t_3 \tau_{52} \tau_{62}$$

giebt uns den Punkt τ_{62}. Endlich bestimmen die Paare $t_4 t'_6$ und $t_2 \tau_{62}$ eine Involution, in welcher t'_4 der Punkt t_6 conjugirt ist.

t_6 wird hier auf eindeutige Art gefunden. Daraus folgt, dass die Beziehung der Punkte st, aus fünf gegebenen Paaren abgeleitet, dieselbe bleibt, wie man auch die Geraden $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 \mathfrak{T}_3$ durch $t_1 t_2 t_3$ legen mag. Fassen wir die bisherigen Resultate zusammen:

I. *Es sei eine Punktreihe* s *auf dem geraden Träger* $\mathfrak{G}$ *und ein damit projectivischer Strahlbüschel zweiter Ordnung* K *gegeben, und es schneide der* s *entsprechende Strahl von* K *eine feste Gerade* $\mathfrak{H}$ *in* t, *so ist damit eine Beziehung zwischen den Punkten von* $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{H}$ *hergestellt, in welcher jedem Punkte* s *von* $\mathfrak{G}$ *eindeutig ein Punkt* t *von* $\mathfrak{H}$ *entspricht. Sind fünf Punktepaare* st *auf* $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{H}$ *willkürlich angenommen, so ist damit die ganze Beziehung eindeutig bestimmt. Man zieht durch* $t_1 t_2 t_3$ *die beliebigen Geraden* $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 \mathfrak{T}_3$, *welche sich in* $g_1 g_2 g_3$ *so schneiden, dass z. B.* $g_3 = (\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2)$ *ist. Bestimmt man ferner die Punkte* $t'_4 t'_5$ *unter der Bedingung*

$$s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 \;\overline{\wedge}\; t_1 t_2 t_3 t'_4 t'_5,$$

so werden die Paare $t_4 t'_5$ *und* $t_5 t'_4$ *eine Involution liefern, in welcher* $\tau_{52} \tau_{53}$ *zu* t_2 *resp.* t_3 *conjugirt sind. Es sei dann*

$$P = (g_2 \tau_{52},\; g_3 \tau_{53}).$$

Die Geraden $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 \mathfrak{T}_3 (P t_4)(P t_5)$ *bestimmen einen Kegelschnitt* K. *Die Tangenten* $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 \mathfrak{T}_3 (P t_4)(P t_5)$ *entsprechen den Punkten* $s_1 s_2 s_3 s_4 s_5$ *von* $\mathfrak{G}$ *projectivisch, wodurch die Beziehung zwischen der Punktreihe* s *auf* $\mathfrak{G}$ *und dem Strahlbüschel zweiter Ordnung* K, *und somit auch die Beziehung zwischen den Punkten* s *und den Schnittpunkten* t *der den Punkten* s *entsprechenden Strahlen von* K *eindeutig festgesetzt ist.*

Wenn nun zwar jedem Punkte s von $\mathfrak{G}$ Ein Punkt t von $\mathfrak{G}$ entspricht, so lässt sich dies jedoch nicht umkehren. Im Gegentheil lassen sich von jedem Punkte t der Geraden $\mathfrak{H}$ an den Kegelschnitt K zwei Tangenten legen, welchen zwei Punkte s und s' von $\mathfrak{G}$ zugeordnet sind. Jedem Punkte t von $\mathfrak{H}$ entsprechen also zwei Punkte von $\mathfrak{G}$. Bekanntlich bilden die Berührungspunkte der Tangentenpaare, welche von den Punkten t der Geraden $\mathfrak{H}$ an K gelegt werden, auf K eine krumme Involution zweiten Grades.* Dieselbe ist nun projectivisch mit der Punktreihe s auf $\mathfrak{G}$, es sind daher die Punkte ss' conjugirte Punkte einer Involution.

II. *Jedem Punkte* t *der Geraden* $\mathfrak{H}$ *entsprechen zwei Punkte* s *und* s' *von* $\mathfrak{G}$. *Die Punktepaare* ss' *sind conjugirte Punkte einer Involution zweiten Grades.*

---

* Theorie der Kegelschnitte, bearbeitet von Dr. Heinrich Schröter, 2. Aufl. 1876, pag. 152. Wir citiren dieses Werk mit „Schröter, Kgsch."

Die ganze Beziehung st ist also nichts anderes, als die z. B. von Herrn Emil Weyr (Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde etc. 1869) behandelte ein-zweideutige Beziehung zweier Elementargebilde.

2. Es ist nun an der Zeit, die Beziehung durch eine Gleichung zu fixiren. Es ist identisch

$$\begin{aligned}(s_5 s_6 s_4 s_2)(s_5 s_6 s_3 s_1) &= (s_1 s_3 s_6 s_5)(s_2 s_4 s_6 s_5) \\ &= (t_1 t_3 t'_6 t'_5)(t_2 t'_4 t'_6 t'_5) \\ &= (t_1 t_3 \tau_{62} \tau_{52})(t_2 t'_4 t_4 t'_5)(t_2 t'_4 t'_6 t_4)^* \\ &= (t_1 t_3 \tau_{62} \tau_{52})(\tau_{52} t_5 t'_5 t_4)(\tau_{62} t_6 t_4 t'_6).\end{aligned}$$

Es folgt dies Alles aus den Betrachtungen, die zu Satz I geführt haben. Aufgelöst lautet die letzte Gleichung

$$\frac{s_5 s_4 \cdot s_6 s_2 \cdot s_5 s_3 \cdot s_6 s_1}{s_6 s_4 \cdot s_5 s_2 \cdot s_6 s_3 \cdot s_5 s_1} = \frac{t_1 \tau_{62} \cdot t_3 \tau_{52} \cdot \tau_{52} t'_5 \cdot t_5 t_4 \cdot \tau_{62} t_4 \cdot t_6 t'_6}{t_3 \tau_{62} \cdot t_1 \tau_{52} \cdot t_5 t'_5 \cdot \tau_{52} t_4 \cdot t_6 t_4 \cdot \tau_{62} t'_6}.$$

Setzen wir nun

$$t_3 \equiv t_4, \quad s_4 \equiv s'_3$$

und

$$t_1 \equiv t_2, \quad s_2 \equiv s'_1,$$

so wird wegen

$$s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 \;\overline{\wedge}\; t_1 t_2 t_3 t'_4 t'_5 t'_6$$

$$t_1 = t_2 = t'_4 = t'_5 = t'_6$$

sein, und es lautet die obige Gleichung

$$\frac{s_5 s'_3 \cdot s_6 s'_1 \cdot s_5 s_3 \cdot s_6 s_1}{s_6 s'_3 \cdot s_5 s'_1 \cdot s_6 s_3 \cdot s_5 s_1} = \frac{t_1 \tau_{62} \cdot t_3 \tau_{52} \cdot \tau_{52} t_1 \cdot t_5 t_3 \cdot \tau_{62} t_3 \cdot t_6 t_1}{t_3 \tau_{62} \cdot t_1 \tau_{52} \cdot t_5 t_1 \cdot \tau_{52} t_3 \cdot t_6 t_3 \cdot \tau_{62} t_1} = \frac{t_5 t_3 \cdot t_6 t_1}{t_6 t_3 \cdot t_5 t_1}$$

oder

$$(s_5 s_6 s'_3 s'_1)(s_5 s_6 s_3 s_1) = (t_5 t_6 t_3 t_1)$$

oder bei anderer Bezeichnung

III. $$(\mathrm{t}_1 \mathrm{t}_2 \mathrm{t}_3 \mathrm{t}_4) = (\mathrm{s}_1 \mathrm{s}_2 \mathrm{s}_3 \mathrm{s}_4)(\mathrm{s}'_1 \mathrm{s}'_2 \mathrm{s}_3 \mathrm{s}_4)$$

wobei $\mathrm{s}_1 \mathrm{s}'_1$ *dem Punkte* t_1, $\mathrm{s}_2 \mathrm{s}'_2$ *dem Punkte* t_2, *und* $\mathrm{t}_3 \mathrm{s}_3$, $\mathrm{t}_4 \mathrm{s}_4$ *sich entsprechen.*

Die oben abgeleitete Formel lässt sich auch anders auffassen. Es ist nämlich

$$\frac{t_1 t_3}{t_2 t_3} \cdot \frac{s_2 s_3 \cdot s'_2 s_3}{s_1 s_3 \cdot s'_1 s_3} = \frac{t_1 t_4}{t_2 t_4} \cdot \frac{s_2 s_4 \cdot s'_2 s_4}{s_1 s_4 \cdot s'_1 s_4}$$

oder

$$\frac{t_1 t}{t_2 t} \cdot \frac{s_2 s \cdot s'_2 s}{s_1 s \cdot s'_1 s} = \text{constant für jedes Paar } st.$$

Machen wir vom Satz III einen specielleren Gebrauch. Es seien t_1 und s'_2 im Unendlichen gelegen; dann ist

---

* Möbius, der barycentrische Calcül, § 185. Auch Schröter, Kgsch. pag. 8.

$$\frac{t_2 t_4}{t_2 t_3} = \frac{s_1 s_3 \cdot s_2 s_4}{s_2 s_3 \cdot s_1 s_4} \cdot \frac{s'_1 s_3}{s'_1 s_4}$$

oder

$$t_2 t_4 \cdot \frac{s_1 s_4}{s_2 s_4} \cdot s'_1 s_1 = t_2 t_3 \cdot \frac{s_1 s_3}{s_2 s_3} \cdot s'_1 s_3,$$

d. h.

$$t_2 t \cdot \frac{s'_1 s \cdot s_1 s}{s_2 s} = p$$

constant.

Auch diese Formel lässt sich noch in anderer Gestalt schreiben. Es ist

$$t_2 t \cdot s_1 s \cdot s'_1 s = p \cdot s_2 s.$$

Es sei nun m die Mitte der Strecke $s_1 s'_1$ oder

$$s_1 m = m s'_1.$$

Dann ist

$$s_1 s = s_1 m + m s$$

$$s'_1 s = s'_1 m + m s$$

$$s_1 s \cdot s'_1 s = (m s)^2 - (m s_1)^2.$$

Also ist

$$(m s_5^2 - m s_1^2) \cdot t_2 t_5 = p \cdot s_2 s_5$$

$$(m s_6^2 - m s_1^2) \cdot t_2 t_6 = p \cdot s_2 s_6$$

$$m s_5^2 \cdot t_2 t_5 - m s_6^2 \cdot t_2 t_6 + m s_1^2 \cdot t_5 t_6 = p \cdot s_6 s_5$$

$$m s_5^2 \cdot t_2 t_5 - m s_6^2 \cdot t_2 t_6 = p \cdot s_6 s_5 + m s_1^2 \cdot t_6 t_5$$

oder wenn wir setzen

$$q = \frac{p}{(m s_1)^2}$$

IV. $$m s_1^2 (q \cdot s_6 s_5 + t_6 t_5) = m s_5^2 \cdot t_2 t_5 - m s_6^2 \cdot t_2 t_6.$$

Ferner lassen sich noch einige Formeln ableiten, welche von untergeordneter Bedeutung sind. Es ist oben gezeigt worden

$$(m s_5^2 - m s_1^2) \cdot t_2 t_5 = p \cdot s_2 s_5$$

$$\{(m s'_5)^2 - m s_1^2\} \cdot t_2 t_5 = p \cdot s_2 s'_5,$$

wobei t_5, $s_5 s'_5$ entsprechende Punkte sind. Daher ist

$$\{(m s_5)^2 - (m s'_5)^2\} \cdot t_2 t_5 = p \cdot s'_5 s_5$$

oder

V. $$(m s_5 + m s'_5) \cdot t_2 t_5 = p.$$

Ferner folgt aus Satz IV:

$$\frac{q \cdot m s_1^2 \cdot s_6 s_5 + t_2 t_5 (m s_1^2 - m s_5^2)}{m s_1^2 - m s_6^2} = t_2 t_6,$$

$$\frac{q \cdot m s_1^2 \cdot s_6 s_5 + t_2 t_5 (m s_1^2 - m s_5^2) - t_2 t_5 (m s_1^2 - m s_6^2)}{m s_1^2 - m s_6^2} = t_5 t_6,$$

$$\frac{q \cdot m s_1^2 - t_2 t_5 (m s_5 + m s_6)}{m s_6^2 - m s_1^2} = \frac{t_5 t_6}{s_5 s_6},$$

oder nach Satz V:

VI. $$\frac{t_2 t_5 \cdot s_6 s'_5}{m s_6^2 - m s_1^2} = \frac{t_5 t_6}{s_5 s_6}.$$

Hieraus ergiebt sich auch

VII. $$\frac{t_5 t_7 \cdot s_6 s_7}{s_5 s_7 \cdot t_6 t_7} = \frac{t_2 t_5 \cdot s_7 s'_5}{t_2 t_6 \cdot s_7 s'_6}.$$

Endlich soll noch eine Gleichung hergeleitet werden, aus der man auf den ersten Blick erkennen kann, dass die ganze ein-zweideutige Beziehung durch fünf Punktepaare bestimmt ist.

Es war im Satz III

$$(s_1 s_2 s_3 s_6)(s'_1 s'_2 s_3 s_6) = (t_1 t_2 t_3 t_6),$$

$$\{(s_1 s_2 s_3 s_6) - (t_1 t_2 t_3 t_6)\}(s'_1 s'_2 s_3 s_6) = (t_1 t_2 t_3 t_6)\{1 - (s'_1 s'_2 s_3 s_6)\}.$$

Ebenso ist

$$\{(s_1 s_2 s_4 s_6) - (t_1 t_2 t_4 t_6)\}(s'_1 s'_2 s_4 s_6) = (t_1 t_2 t_4 t_6)\{1 - (s'_1 s'_2 s_4 s_6)\}.$$

Daher

$$\frac{(s_1 s_2 s_3 s_6) - (t_1 t_2 t_3 t_6)}{(s_1 s_2 s_4 s_6) - (t_1 t_2 t_4 t_6)} \cdot \frac{(s'_1 s'_2 s_3 s_6)}{(s'_1 s'_2 s_4 s_6)} = \frac{(t_1 t_2 t_3 t_6)}{(t_1 t_2 t_4 t_6)} \cdot \frac{(s'_1 s_3 s'_2 s_6)}{(s'_1 s_4 s'_2 s_6)}$$
$$= \frac{(t_1 t_2 t_6 t_4)}{(t_1 t_2 t_6 t_3)} \cdot \frac{(s_4 s'_1 s'_2 s_6)}{(s_3 s'_1 s'_2 s_6)},$$

oder

$$\frac{(s_1 s_2 s_3 s_6) - (t_1 t_2 t_3 t_6)}{(s_1 s_2 s_4 s_6) - (t_1 t_2 t_4 t_6)}(s'_1 s'_2 s_3 s_4) = (t_1 t_2 t_3 t_4)(s_6 s'_2 s_3 s_4).$$

Dieselbe Gleichung lässt sich aufstellen, wenn man 5 statt des Index 6 setzt. Daher erhält man

VIII. $$\frac{(s_1 s_2 s_3 s_6) - (t_1 t_2 t_3 t_6)}{(s_1 s_2 s_4 s_6) - (t_1 t_2 t_4 t_6)} \cdot \frac{(s_1 s_2 s_4 s_5) - (t_1 t_2 t_4 t_5)}{(s_1 s_2 s_3 s_5) - (t_1 t_2 t_3 t_5)} = (s_4 s_3 s_5 s_6)$$

eine Formel, für die sich wohl noch eine passendere Gestalt gewinnen liesse.

3. Wir haben die ganze ein-zweideutige Beziehung aus der Projectivität einer geraden Punktreihe s auf dem Träger 𝔊 und einem Tangentenbüschel zweiter Ordnung auf dem Kegelschnitt K entstehen sehen. Die s entsprechende Tangente sollte dann eine zweite Gerade 𝔥 in dem Punkte t treffen. Wir wollen nun die Geraden 𝔊 und 𝔥 identificiren und dann die Frage stellen, ob es wohl Punkte s giebt, deren Punkte t mit ihnen zusammenfallen.

𝔄 sei irgend eine Tangente des Kegelschnittes K; dieselbe wird von den übrigen Tangenten in einer Punktreihe 𝔰 geschnitten, welche mit der Reihe s auf 𝔊 projectivisch ist. Die Reihen 𝔰 und s erzeugen daher einen Kegelschnitt C, von dem sie beide berührt werden. K und C haben (ausser 𝔄) noch drei gemeinschaftliche Tangenten, von denen nur zwei imaginär sein können, und es mögen diese drei Tangenten die Gerade 𝔊 in $a_1 a_2 a_3$ schneiden. Man sieht ohne Weiteres, dass der irgend einem der

Punkte a entsprechende Punkt t mit dem betreffenden a zusammenfällt. Bei dem Schnittpunkte $(\mathfrak{A}\mathfrak{G})$ ist dies nicht der Fall, ebensowenig giebt es noch andere Punkte s, welche mit ihrem entsprechenden t zusammenfallen.

IX. *Liegen die beiden sich ein-zweideutig entsprechenden Punktreihen* s *und* t *auf demselben Träger, so giebt es auf demselben drei zusammenfallende Punktepaare* st. *Eines derselben ist stets reell, die beiden anderen Paare können imaginär sein.*

Wir legen ferner auf denselben Träger $\mathfrak{G}$ zwei verschiedene Punktreihen, s und S, welche derselben (der Einfachheit halber auch auf $\mathfrak{G}$ befindlichen) Reihe t ein-zweideutig entsprechen sollen und stellen die Frage, ob es Punkte t giebt, deren Punkte s und S in den beiden ein-zweideutigen Beziehungen zusammenfallen.

Greifen wir auf die vorhin erwähnten Kegelschnitte K und C zurück und setzen

$$p = (\mathfrak{G},\ \mathfrak{A}).$$

Die Tangenten von t an K schneiden $\mathfrak{A}$ in den Punkten $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}'$. Wenn g und $\mathfrak{G}$ Pol und Polare von K sind, und wenn tg die Gerade $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{x}$ schneidet, so sind $\mathfrak{s}\mathfrak{s}'$ stets conjugirte Punkte einer Involution, deren stets reelle Asymptotenpunkte $p\mathfrak{x}$ sind. Dabei sind die Punktreihen t und $\mathfrak{x}$ perspectivisch gelegen. Die Tangenten von $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}'$ an C schneiden sich selbst in $\mathfrak{r}$ und die Gerade $\mathfrak{G}$ in s und s' resp. Der Punkt $\mathfrak{r}$ befindet sich beständig (Schröter, Kgsch. pag. 152) auf einer Geraden $\mathfrak{L}$. Sind nun ebenso $\mathfrak{l}\mathfrak{L}$ Pol und Polare von C, und trifft Gerade $\mathfrak{l}\mathfrak{x}$ die Gerade $\mathfrak{G}$ in x, dann sind ebenso ss' conjugirte Punkte einer Involution, deren stets reelle Asymptotenpunkte px sind; die Punktreihen $x\mathfrak{x}t$ sind dabei projectivisch.

Führen wir dieselbe Betrachtung für die Beziehung tS durch, so werden unter selbstverständlicher Bezeichnung die Punktreihen tX projectivisch sein, und SS' conjugirte Punkte einer Involution, deren reelle Asymptotenpunkte pX sind. Es ist nämlich jederzeit möglich, zwei Kegelschnitten K, welche beiden Beziehungen ts und tS zugehören, nicht nur Eine gemeinschaftliche reelle Tangente zu geben, sondern sogar vier, wie dies aus Satz I hervorgeht.

Wir nehmen nun irgend ein Kegelschnittbüschel $\mathfrak{B}$ an und suchen denjenigen Kegelschnitt G, auf dem die Punkte $s_1 \ldots$ gelegen sind, welche den Punkten $s \ldots$ von $\mathfrak{G}$ in Bezug auf $\mathfrak{B}$ conjugirt sind. Die Verbindungslinien der reellen Punktepaare $s_1 s'_1$ auf G schneiden sich in dem reellen Punkte r, und es ist die Verbindungslinie $rs_1 s'_1$ reell, selbst wenn ss' und damit $s_1 s'_1$ imaginär sind. Denn jedem Paare ss' entspricht ein stets reeller Punkt x, und somit jedem Paare $s_1 s'_1$ ein Punkt x_1 auf G, und es wird besagte Verbindungslinie gefunden, indem wir $p_1 x_1$ ziehen (p_1 zu p con-

jugirt), die Polare $\mathfrak{r}$ von r für G construiren und endlich vom Schnittpunkte $(\mathfrak{r}, p_1 x_1)$ die Polare in Bezug auf G nehmen, welche die verlangte Linie ist. Dieser Strahlbüschel r ist projectivisch mit den Strahlbüscheln $p_1 x_1$ und $p_1 t_1$.

Machen wir dieselben Betrachtungen für die zweite Beziehung tS, so ergiebt sich schliesslich ein Strahlbüschel R, welcher projectivisch mit dem Büschel $p_1 t_1$ und daher auch mit dem Büschel r ist, und dessen Strahlen eventuell G in Punktepaaren $S_1 S'_1$ schneiden, welche für $\mathfrak{B}$ zu SS' conjugirt sind.

Die beiden projectivischen Strahlbüschel rR erzeugen einen Kegelschnitt, der mit G im Allgemeinen vier Punkte gemein hat. Die zu diesen vier Schnittpunkten conjugirten Punkte sind solche, welche in beiden ein-zweideutigen Beziehungen demselben Punkte t entsprechen.

X. *Sind auf demselben Träger $\mathfrak{G}$ zwei ein-zweideutige Punktreihen* $\mathfrak{ts}$ *und* $\mathfrak{tS}$ *gelegen, so ereignet es sich im Allgemeinen viermal, dass einem Punkte* $\mathfrak{t}$ *derselbe Punkt* $\mathfrak{s}$ *in beiden ein-zweideutigen Beziehungen entspricht. Die vier Punkte* $\mathfrak{s}$ *können paarweise imaginär sein.*

4. Von der vorstehenden, als Einleitung behandelten, ein-zweideutigen Beziehung der auf demselben Träger $\mathfrak{G}$ liegenden geraden Punktreihen s und t machen wir im Nachfolgenden eine speciellere Anwendung. Wir hatten im Satz IV

$$\frac{q \cdot s_5 s_6 + t_5 t_6}{q \cdot s_5 s_7 + t_5 t_7} = \frac{ms_6^2 \cdot t_2 t_6 - ms_5^2 \cdot t_2 t_5}{ms_7^2 \cdot t_2 t_7 - ms_5^2 \cdot t_2 t_5}.$$

Wir setzen darin

$$q = 2,$$

so dass also wird

$$\frac{2 \cdot s_5 s_6 + t_5 t_6}{2 \cdot s_5 s_7 + t_5 t_7} = \frac{ms_6^2 \cdot t_2 t_6 - ms_5^2 \cdot t_2 t_5}{ms_7^2 \cdot t_2 t_7 - ms_5^2 \cdot t_2 t_5}.$$

Hierin bedeuten also $s_5 t_5$, $s_6 t_6$, $s_7 t_7$ entsprechende Punkte. Dem Punkte t_2 resp. t_∞ entsprechen s_∞ resp. $s_1 s'_1$, und es ist m die Mitte der Strecke $s_1 s'_1$.

Es drängt sich uns zunächst die Frage auf, in welcher Art die fünf Punktepaare st, welche nach dem Vorhergehenden eine ein-zweideutige Beziehung bestimmen, zu wählen sind, damit die speciellere Art der Beziehung, in der eben $q = 2$ ist, sich ergebe.

Wir nehmen zwei Punktepaare $s_5 t_5$ und $s_6 t_6$ auf einer Geraden beliebig an und construiren die vier harmonischen Punkte x und y so, dass

$$(t_5 s_5 s_6 x) = -1,$$
$$(t_6 s_6 s_5 y) = -1.$$

Die 2 . 3 Punkte $s_5 t_5 x$ und $s_6 t_6 y$ der Geraden bestimmen auf ihr zwei eindeutige projectivische Punktreihen, in denen

$$x s_5 t_5 \,\overline{\wedge}\, s_6 y t_6$$

sei. Die beiden Punktreihen werden im Allgemeinen ein Paar reelle Doppelpunkte (sich selbst entsprechende Punkte) s_7 und s_8 haben; es ist dann

$$x s_5 t_5 s_7 s_8 \,\overline{\wedge}\, s_6 y t_6 s_7 s_8,$$

also

$$(t_5 s_5 x s_7) = (t_6 y s_6 s_7)$$
$$(t_5 s_5 x s_8) = (t_6 y s_6 s_8)$$

oder, durch

$$(t_5 s_5 x s_7) + (t_6 s_6 y s_7) = 1,$$

dividirt

$$(t_5 s_5 x s_6) = (t_6 s_6 y s_5) = -1$$

$$(t_5 s_5 s_6 s_7) + (t_6 s_6 s_5 s_7) = -1;$$

ebenso

$$(t_5 s_5 s_6 s_8) + (t_6 s_6 s_5 s_8) = -1. —$$

Ferner construiren wir die vier harmonischen Punkte $\xi\eta$ so, dass

$$(s_5 s_6 t_5 \xi) = -1,$$
$$(s_5 s_6 t_6 \eta) = -1.$$

Es werden dann die 2 . 3 Punkte $s_5 t_5 \xi$ und $t_6 s_6 \eta$ ebenfalls zwei eindeutige projectivische Punktreihen bestimmen, in denen

$$s_5 t_5 \xi \,\overline{\wedge}\, t_6 s_6 \eta$$

ist. Auch diese Punktreihen werden zwei im Allgemeinen reelle Doppelpunkte $t\tau$ haben, so dass also

$$s_6 t_5 \xi t \tau \,\overline{\wedge}\, t_6 s_6 \eta t \tau$$

oder

$$(t_6 s_6 \eta t) = (s_5 t_5 \xi t)$$
$$(t_6 s_6 \eta \tau) = (s_5 t_5 \eta \tau)$$

ist. Dann ist auch

$$1 = (s_5 t_5 \xi t)(s_6 t_6 \eta t),$$

und da nach den obigen Gleichungen

$$(s_5 t_5 \xi s_6) = \frac{1}{2}, \quad \text{(Schröter, Kgsch. pag. 7)}$$

$$(s_6 t_6 \eta s_5) = \frac{1}{2},$$

so folgt

$$4 = \frac{(s_5 t_5 \xi t)}{(s_5 t_5 \xi s_6)} \cdot \frac{(s_6 t_6 \eta t)}{(s_6 t_6 \eta s_5)},$$

$$4 = (s_5 t_5 s_6 t)(s_6 t_6 s_5 t);$$

ebenso

$$4 = (s_5 t_5 s_6 \tau)(s_6 t_6 s_5 \tau).$$

Aus der Gleichheit

$$(t_6 s_6 \eta t) = (s_5 t_5 \xi t)$$
$$(t_6 s_6 \eta \tau) = (s_5 t_5 \xi \tau)$$

folgt durch Division

$$(t_6 s_6 \tau t) = (s_5 t_5 \tau t)$$

oder

$$(t_6 s_6 \tau t) = (t_5 s_5 t \tau),$$

d. h. $t_5 t_6$, $s_5 s_6$, $t\tau$ sind sechs Punkte in Involution.

Ebenso folgt aus der Gleichheit

$$-1 = (t_5 s_5 s_6 x) = (t_6 s_6 s_5 y),$$

dass $t_5 t_6$, $s_5 s_6$, xy sechs Punkte in Involution sind.

Aber aus der Projectivität

$$s_5 x s_7 s_8 \barwedge y s_6 s_7 s_8$$

folgt die Gleichheit

$$(s_5 x s_7 s_8) = (y s_6 s_7 s_8)$$

oder

$$(s_5 x s_7 s_8) = (s_6 y s_8 s_7),$$

d. h. $s_5 s_6$, xy, $s_7 s_8$ sind auch sechs Punkte in Involution. Da nun eine Involution durch zwei Paar conjugirte Punkte bestimmt ist, so folgt, dass $t_5 t_6$, $s_5 s_6$, $s_7 s_8$, und endlich, dass $s_5 s_6$, $s_7 s_8$, $t_5 t_6$, $t\tau$ Paare conjugirter Punkte derselben Involution sind. —

Die Gleichung

$$(t_5 s_5 s_6 s_7) + (t_6 s_6 s_5 s_7) = -1$$

lässt sich noch in manchen anderen Formen schreiben. Es ist nämlich

$$(t_5 s_5 s_6 s_7) + 1 = -(1 - (t_6 s_5 s_6 s_7)) = -1 + \frac{t_6 t_5 s_6 s_7}{s_5 t_5 s_6 s_7},$$

$$(t_5 s_5 s_6 s_7) - (t_6 t_5 s_6 s_7)(t_5 s_5 s_6 s_7) = -2,$$

$$(t_5 s_5 s_6 s_7)\{1 - (t_6 t_5 s_6 s_7)\} = -2,$$

$$(t_5 s_5 s_6 s_7)(t_6 s_6 t_5 s_7) = -2,$$

$$(t_5 s_5 s_7 s_6)(t_6 s_6 s_7 t_5) = -\frac{1}{2},$$

$$1 + 2(t_5 s_5 s_7 s_6)(t_6 s_6 s_7 t_5) = 0.$$

Ebenso

$$(t_6 s_6 s_7 s_5)(t_5 s_5 s_7 t_6) = -\frac{1}{2},$$

$$1 + 2(t_6 s_6 s_7 s_5)(t_5 s_5 s_7 t_6) = 0.$$

Wir wollen uns zunächst auf die Vorführung dieser Form beschränken, um von ihr einen wichtigen Gebrauch zu machen.

Es sei der Punkt a so bestimmt, dass die Punktepaare

1) $$s_5 s_7,\ s_6 s_8,\ t_5 a$$

eine Involution bilden. Vorhin hatten wir gesehen, dass

2) $$s_5 s_6,\ s_7 s_8,\ t_5 t_6$$

conjugirte Punkte einer Involution sind, daher ist dies (Schröter, Kgsch. pag. 57) auch bei den Paaren

3) $$s_5 s_8,\ s_6 s_7,\ t_6 a$$

der Fall.

Es war

$$(t_5 s_5 s_6 s_7) + (t_6 s_6 s_5 s_7) = -1;$$

daher wegen Involution 1) auch

$$(as_7 s_8 s_5) + (t_6 s_6 s_5 s_7) = -1,$$

oder

$$-(as_7 s_8 s_5)(t_6 s_6 s_7 s_5) - 1 = (t_6 s_6 s_7 s_5)$$

$$-(as_7 s_8 s_5)(a s_7 s_6 s_8) - 1 = (t_6 s_6 s_7 s_5),$$

letzteres in Folge der Involution 3). Aber

$$(as_7 s_6 s_8) \equiv (as_7 s_5 s_8)(as_7 s_8 s_5);$$

daher

$$-(as_7 s_8 s_5)(as_7 s_5 s_8)(as_7 s_6 s_5) - 1 = (t_6 s_6 s_7 s_5),$$

d. h.

$$-(as_7 s_6 s_5) - 1 = (t_6 s_6 s_7 s_5)$$

$$-1 = (as_7 s_6 s_5) + (t_6 s_6 s_7 s_5),$$

und ebenso in Folge der Involutionen 1) und 3)

$$-1 = (t_6 s_6 s_7 s_8) + (as_7 s_6 s_8).$$

Vergleichen wir dies mit den früheren Resultaten

$$-1 = (t_5 s_5 s_6 s_7) + (t_6 s_6 s_5 s_7)$$

$$-1 = (t_5 s_5 s_6 s_8) + (t_6 s_6 s_5 s_8),$$

so ergiebt sich, dass at_6 und $s_7 s_6$ zu $s_8 s_5$ dieselbe Stellung einnehmen, wie $t_5 t_6$ und $s_5 s_6$ zu $s_8 s_7$.

Ebenso ist

$$(t_5 s_5 s_6 s_7) + (as_7 s_8 s_6) = -1$$

wegen Involution 1).

$$-(as_7 s_8 s_6)(t_5 s_5 s_7 s_6) - 1 = (t_5 s_5 s_7 s_6)$$

$$-(as_7 s_8 s_6)(as_7 s_5 s_8) - 1 = (t_5 s_5 s_7 s_6),$$

und wegen

$$(as_7 s_5 s_8) \equiv (as_7 s_6 s_8)(as_7 s_5 s_6)$$

auch

$$-(as_7 s_8 s_6)(as_7 s_6 s_8)(as_7 s_5 s_6) - 1 = (t_5 s_5 s_7 s_6)$$

d. h.

$$-(as_7 s_5 s_6) - 1 = (t_5 s_5 s_7 s_6),$$

$$-1 = (t_5 s_5 s_7 s_6) + (as_7 s_5 s_6);$$

ebenso

$$-1 = (as_7 s_5 s_8) + (t_5 s_5 s_7 s_8),$$

d. h. at_5 und $s_7 s_5$ nehmen zu $s_8 s_6$ dieselbe Stellung ein, wie $t_6 t_5$ und $s_6 s_5$ zu $s_8 s_7$. Daher ist auch

$$(as_7 s_5 s_6)(t_6 s_6 s_5 a) = -\frac{1}{2}$$

und

$$(as_7 s_6 s_5)(t_5 s_5 s_6 a) = -\frac{1}{2}.$$

Durch Multiplication beider Gleichungen ergiebt sich

$$(as_7 s_5 s_6)(t_6 s_6 s_5 a)(as_7 s_6 s_5)(t_5 s_5 s_6 a) = \frac{1}{4},$$

$$(t_6 s_6 s_5 a)(t_5 s_5 s_6 a) = \frac{1}{4},$$

$$4 = (s_6 t_6 s_5 a)(s_5 t_5 s_6 a).$$

Vergleichen wir dies mit den früheren Gleichungen

$$4 = (s_5 t_5 s_6 t)(s_6 t_6 s_5 t),$$
$$4 = (s_5 t_5 s_6 \tau)(s_6 t_6 s_5 \tau),$$

so zeigt sich, dass a einer der beiden Punkte t oder τ ist. Wir fixiren $a \equiv t \equiv t_7$, also

$$4 = (s_5 t_5 s_6 t_7)(s_6 t_6 s_5 t_7)$$

und $s_5 s_7$, $s_6 s_8$, $t_5 t_7$ in Involution. Ebenso ist

$$-1 = (t_5 s_5 s_7 s_6) + (t_7 s_7 s_5 s_6),$$
$$-1 = (t_6 s_6 s_7 s_5) + (t_7 s_7 s_6 s_5).$$

Construiren wir ferner den Punkt b so, dass $s_5 s_8$, $s_6 s_7$, $t_6 b$ sechs Punkte in Involution sind, dann ist dies auch bei den Punkten

$$s_5 s_7,\ s_6 s_8,\ t_5 b$$

der Fall. Es folgt dann gerade so wie vorhin

$$4 = (s_5 t_5 s_6 b)(s_6 t_6 s_5 b)$$

und wir müssen $b \equiv \tau \equiv t_8$ fixiren, also

$$4 = (s_5 t_5 s_6 t_8)(s_6 t_6 s_5 t_8),$$
$$-1 = (t_5 s_5 s_8 s_6) + (t_8 s_8 s_5 s_6),$$
$$-1 = (t_6 s_6 s_7 s_5) + (t_8 s_8 s_6 s_5),$$

und es bilden $s_6 s_7$, $s_5 s_8$, $t_6 t_8$ eine Involution.

Dann haben wir also drei Involutionen, nämlich

$$s_5 s_6,\ s_7 s_8,\ t_5 t_6,\ t_7 t_8,$$
$$s_5 s_7,\ s_6 s_8,\ t_5 t_7,\ t_6 t_8,$$
$$s_5 s_8,\ s_6 s_7,\ t_5 t_8,\ t_6 t_7,$$

und es sind in den Formeln, welche Doppelschnittverhältnisse enthalten, und zwar in jedem derselben, speciell in

$$4 = (s_5 t_5 s_6 t_7)(s_6 t_6 s_5 t_7),$$
$$-1 = (t_5 s_5 s_6 s_7) + (t_6 s_6 s_5 s_7),$$
$$0 = 1 + 2(t_5 s_5 s_7 s_6)(t_6 s_6 s_7 t_5)$$

die Indices beliebig gegen einander vertauschbar. Die vier Paar Punkte st wollen wir eine „Doppelvier" nennen. —

Die letzte der obigen drei Gleichungen kann man nun auch schreiben:

$$0 = 1 + 2(t_6 s_6 s_5 s_7)(t_7 s_7 s_5 t_6).$$

Wir werden dieselbe noch in eine andere Form bringen. Es ergiebt sich zunächst

$$1 = 2 \frac{s_5 t_6 \cdot s_5 t_7 \cdot s_7 s_6}{s_5 s_7 \cdot s_5 s_6 \cdot t_6 t_7},$$

oder

$$s_5 s_7 \,.\, s_5 s_6 \,.\, t_6 t_7 = 2 \,.\, s_5 t_6 \,.\, s_5 t_7 \,.\, s_7 s_6,$$
$$s_5 s_7 \,.\, s_5 s_6 \,.\, (s_5 t_7 - s_5 t_6) = 2 \,.\, s_5 t_6 \,.\, s_5 t_7 \,.\, (s_5 s_6 - s_5 s_7),$$
$$s_5 s_7 \,.\, s_5 t_7 (s_5 s_6 + 2 s_5 t_6) = s_5 s_6 \,.\, s_5 t_6 (s_5 s_7 + 2 s_5 t_7),$$
$$\frac{s_5 s_6 + 2 s_5 t_6}{s_5 s_6 \,.\, s_5 t_6} = \frac{s_5 s_7 + 2 s_5 t_7}{s_5 s_7 \,.\, s_5 t_7} = \frac{s_5 s_8 + 2 s_5 t_8}{s_5 s_8 \,.\, s_5 t_8}.$$

In dieser Gleichung sind die Indices gegenseitig vertauschbar. —

Aus der Gleichung

$$0 = 1 + 2 (t_5 s_5 s_6 s_7)(t_7 s_7 s_6 t_5)$$

folgt ferner

$$1 = 2 \frac{s_6 t_5 \,.\, s_6 t_7 \,.\, s_7 s_5}{s_6 s_7 \,.\, s_6 s_5 \,.\, t_5 t_7},$$

oder

$$\frac{s_6 s_7 \,.\, s_6 s_5 - s_6 t_5 \,.\, s_6 t_7}{s_6 t_5 \,.\, s_6 t_7} = \frac{2 \,.\, s_7 s_5 + t_7 t_5}{t_5 t_7}$$

und ähnlich

$$\frac{s_7 s_6 \,.\, s_7 s_5 - s_7 t_5 \,.\, s_7 t_6}{s_7 t_5 \,.\, s_7 t_6} = \frac{2 \,.\, s_6 s_5 + t_6 t_5}{t_5 t_6}.$$

Daher

$$\frac{s_6 s_7 \,.\, s_6 s_5 - s_6 t_5 \,.\, s_6 t_7}{s_7 s_6 \,.\, s_7 s_5 - s_7 t_5 \,.\, s_7 t_6} \,.\, \frac{s_7 t_5 \,.\, s_7 t_6 \,.\, t_7 t_5}{s_6 t_5 \,.\, s_6 t_7 \,.\, t_6 t_5} = \frac{2 \,.\, s_7 s_5 + t_7 t_5}{2 \,.\, s_6 s_5 + t_6 t_5}.$$

Aber aus

$$4 = (s_5 t_5 s_7 t_6)(s_7 t_7 s_5 t_6),$$
$$4 = (s_5 t_5 s_6 t_7)(s_6 t_6 s_5 t_7)$$

folgt durch Division

$$\frac{s_7 t_5 \,.\, s_7 t_6 \,.\, t_7 t_5}{s_6 t_5 \,.\, s_6 t_7 \,.\, t_6 t_5} = -\left(\frac{s_7 s_5}{s_6 s_5}\right)^2.$$

Daher ist

$$-\frac{s_6 s_7 \,.\, s_6 s_5 - s_6 t_5 \,.\, s_6 t_7}{s_7 s_6 \,.\, s_7 s_5 - s_7 t_5 \,.\, s_7 t_6} \,.\, \left(\frac{s_7 s_5}{s_6 s_5}\right)^2 = \frac{2\, s_7 s_5 + t_7 t_5}{2\, s_6 s_5 + t_6 t_5}.$$

Aus der Involution

$$s_5 s_6,\ t_5 t_6,\ t_7 t_8$$

ergiebt sich.

$$s_5 t_8 \,.\, t_7 t_6 \,.\, t_5 s_6 = s_5 t_6 \,.\, t_7 s_6 \,.\, t_5 t_8,$$

eine der Gleichungen von Desargues. Ebenso folgt aus der Involution

$$s_5 s_7,\ t_5 t_7,\ t_6 t_8$$

die Gleichung

$$s_5 t_8 \,.\, t_6 t_7 \,.\, t_5 s_7 = s_5 t_7 \,.\, t_6 s_7 \,.\, t_5 t_8.$$

Daher ist durch Division

$$-\frac{t_5 s_6}{t_5 s_7} = \frac{s_5 t_6 \,.\, t_7 s_6}{s_5 t_7 \,.\, t_6 s_7},$$

oder

$$- s_5 t_7 \,.\, t_5 s_6 \,.\, t_6 s_7 = s_5 t_6 \,.\, t_7 s_6 \,.\, t_5 s_7,$$
$$- s_5 t_7 \,.\, (t_5 s_7 + s_7 s_6) \,.\, t_6 s_7 = s_5 t_6 \,.\, (t_5 s_6 + s_6 s_7) \,.\, t_7 s_6,$$

oder

$$- s_5 t_7 \,.\, t_5 s_7 \,.\, t_6 t_7 - s_5 t_7 \,.\, s_7 s_6 \,.\, (t_6 s_5 + s_5 s_7) = s_5 t_6 \,.\, t_5 s_6 \,.\, t_7 s_6 + s_5 t_6 \,.\, s_6 s_7 \,.\, (t_7 s_5 + s_5 s_6),$$
$$- s_5 t_7 \,.\, t_5 s_7 \,.\, t_6 s_7 - s_5 t_7 \,.\, s_7 s_6 \,.\, s_5 s_7 = s_6 t_6 \,.\, t_5 s_6 \,.\, t_7 s_6 + s_5 t_6 \,.\, s_6 s_7 \,.\, s_5 s_6;$$

endlich

$$\frac{s_5 s_7 \cdot s_6 s_7 - t_5 s_7 \cdot t_6 s_7}{s_5 s_6 \cdot s_7 s_6 - t_5 s_6 \cdot t_7 s_6} = - \frac{s_5 t_6}{s_5 t_7}.$$

Daher haben wir nun die neue Gleichung

$$\frac{s_5 t_7}{s_5 t_6} \cdot \left(\frac{s_7 s_5}{s_6 s_5}\right)^2 = \frac{2 s_7 s_5 + t_7 t_5}{2 s_6 s_5 + t_6 t_5},$$

d. h.

$$\frac{2 s_5 s_6 + t_5 t_6}{(s_5 s_6)^2 \cdot s_5 t_6} = \frac{2 s_5 s_7 + t_5 t_7}{(s_5 s_7)^2 \cdot s_5 t_7} = \frac{2 s_5 s_8 + t_5 t_8}{(s_5 s_8)^2 \cdot s_5 t_8}.$$

Auch in dieser Gleichung sind die Indices gegen einander vertauschbar. Wir fassen die bisherigen Resultate zusammen:

XI. *Es seien zwei Paar Punkte* $s_5 t_5$ *und* $s_6 t_6$ *einer Geraden gegeben. Sucht man die vierten harmonischen Punkte* $x y$ *nach den Gleichungen*

$$(t_5 s_5 s_6 x) = -1,$$
$$(t_6 s_6 s_5 y) = -1,$$

und setzt man

$$x s_5 t_5 \barwedge s_6 y t_6,$$

so haben die so constituirten projectivischen Punktreihen ein Paar Doppelpunkte $s_7 s_8$.

Sucht man ebenso die vier harmonischen Punkte $\xi \eta$ *nach den Gleichungen*

$$(s_5 s_6 t_5 \xi) = -1,$$
$$(s_5 s_6 t_6 \eta) = -1,$$

und setzt man

$$s_5 t_5 \xi \barwedge t_6 s_6 \eta,$$

so haben auch diese so constituirten projectivischen Punktreihen ein Paar Doppelpunkte $t_7 t_8$. *Es lassen sich dabei die Punkte* $s_7 s_8$ *und* $t_7 t_8$ *so gruppiren, dass*

$$s_5 s_6, \; t_5 t_6, \; s_7 s_8, \; t_7 t_8$$

conjugirte Punkte einer Involution sind, ebenso

$$s_5 s_7, \; t_5 t_7, \; s_6 s_8, \; t_6 t_8$$

und

$$s_5 s_8, \; t_5 t_8, \; s_6 s_7, \; t_6 t_7.$$

Es hängen irgend zwei Paar Punkte $s t$ *von den beiden andern in derselben Weise ab, wie es oben von* $s_5 t_5$ *und* $s_6 t_6$ *angegeben worden.*

- *Solche vier Paar Punkte nennen wir eine*

„Doppelvier".

Es bestehen für irgend drei Punktepaare derselben die Relationen

1) $$1 + 2 (t_5 s_5 s_7 s_6)(t_6 s_6 s_7 t_5) = 0.$$

2) $$(s_5 t_5 s_6 t_7)(s_6 t_6 s_5 t_7) = 4.$$

3) $$(t_5 s_5 s_6 s_7) + (t_6 s_6 s_5 s_7) = -1.$$

4) $$\frac{s_5 s_6 + 2 s_5 t_6}{s_5 s_6 \cdot s_5 t_6} = \frac{s_5 s_7 + 2 s_5 t_7}{s_5 s_7 \cdot s_5 t_7}.$$

5) $$\frac{2\,s_5 s_6 + t_5 t_6}{(s_5 s_6)^2 \,.\, s_5 t_6} = \frac{2\,s_5 s_7 + t_5 t_7}{(s_5 s_7)^2 \,.\, s_5 t_7}.$$

6) $$(s_5 t_5 t_6 t_7) = (t_5 s_5 s_6 s_7)^2.$$

7) $$(s_5 s_6 t_5 t_6) = \{1 + 2\,(t_5 s_5 s_7 s_6)\}\,\{1 + 2\,(t_6 s_6 s_7 s_5)\}$$

und für alle vier Paare die Relationen

8) $$\frac{2\,s_5 s_6 + t_5 t_6}{(s_5 s_6)^2 \,.\, t_5 t_6} = \frac{2\,s_7 s_8 + t_7 t_8}{(s_7 s_8)^2 \,.\, t_7 t_8}.$$

9) $$(s_5 s_6 s_7 s_8)^2 = (t_5 t_6 s_7 s_8)\,(t_5 t_6 t_7 t_8).$$

Die Beweise für die letzten Formeln sind leicht zu führen, wie man die Sammlung auch noch leicht vermehren könnte, z. B. durch die früher bewiesene Formel

10) $$\frac{t_5 s_6 \,.\, t_6 s_7 \,.\, t_7 s_5}{t_5 s_7 \,.\, t_6 s_5 \,.\, t_7 s_6} = -1,$$

oder durch

11) $$(t_5 s_5 s_6 s_7)\,(t_6 s_6 s_7 s_5)\,(t_7 s_7 s_5 s_6) = 1 \text{ u. s. w.}$$

Nun können wir an die Beantwortung der uns pag. 9 gestellten Frage gehen. Wir haben die Gleichungen

$$\frac{2\,s_5 s_6 + t_5 t_6}{(s_5 s_6)^2 .\, s_5 t_6} = \frac{2\,s_5 s_7 + t_5 t_7}{(s_5 s_7)^2 .\, s_5 t_7},$$

$$\frac{s_5 s_6 + 2\,s_5 t_6}{s_5 s_6 \,.\, s_5 t_6} = \frac{s_5 s_7 + 2\,s_5 t_7}{s_5 s_7 \,.\, s_5 t_7},$$

in denen man z. B. auch 7 mit 8 vertauschen kann.

Es sei m ein beliebiger Punkt der Geraden, auf der die Punkte $s_5 t_5 \ldots$ gelegen sind. Dann können wir die Identität $1 = 1$ auch in der Form schreiben:

$$\frac{2\,s_5 s_6 + t_5 t_6}{(s_5 s_6)^2 .\, s_5 t_6} : \frac{2\,s_5 s_7 + t_5 t_7}{(s_5 s_7)^2 .\, s_5 t_7} = \frac{(m s_5)^2 \dfrac{2\,s_5 s_6 + t_5 t_6}{(s_5 s_6)^2 .\, s_5 t_6} + m s_5 \,.\, \dfrac{s_5 s_6 + 2 \,.\, s_5 t_6}{s_5 s_6 \,.\, s_5 t_6} + 1}{(m s_5)^2 \dfrac{2 \,.\, s_5 s_7 + t_5 t_7}{(s_5 s_7)^2 .\, s_5 t_7} + m s_5 \,.\, \dfrac{s_5 s_7 + 2\,s_5 t_7}{s_5 s_7 \,.\, s_5 t_7} + 1},$$

oder auch

$$\frac{2 \,.\, s_5 s_6 + t_5 t_6}{2 \,.\, s_5 s_7 + t_5 t_7} = \frac{m s_5^{\,2} .\, (2 \,.\, s_5 s_6 + t_5 t_6) + m s_5 \,.\, s_5 s_6 \,.\, (s_5 s_6 + 2 \,.\, s_5 t_6) + s_5 s_6^{\,2} .\, s_5 t_6}{m s_5^{\,2} .\, (2 \,.\, s_5 s_7 + t_5 t_7) + m s_5 \,.\, s_5 s_7 \,.\, (s_5 s_7 + 2 \,.\, s_5 t_7) + s_5 s_7^{\,2} .\, s_5 t_7}.$$

Sehr leicht erhält man hieraus

$$\frac{2\,s_5 s_6 + t_5 t_6}{2\,s_5 s_7 + t_5 t_7} = \frac{(m s_5^{\,2} + s_5 s_6^{\,2} + 2 \,.\, m s_5 \,.\, s_5 s_6)\,(m s_5 + s_5 t_6) - m s_5^{\,2} .\, (m s_5 + s_5 t_5)}{(m s_5^{\,2} + s_5 s_7^{\,2} + 2 \,.\, m s_5 \,.\, s_5 s_7)\,(m s_5 + s_5 t_7) - m s_5^{\,2} .\, (m s_5 + s_5 t_7)},$$

oder

$$\frac{2\,s_5 s_6 + t_5 t_6}{2\,s_5 s_7 + t_5 t_7} = \frac{m s_6^{\,2} .\, m t_6 - m s_5^{\,2} .\, m t_5}{m s_7^{\,2} .\, m t_7 - m s_5^{\,2} .\, m t_5};$$

ebenso

$$\frac{2\,s_5s_6 + t_5t_6}{2\,s_5s_8 + t_5t_8} = \frac{ms_6^2 . mt_6 - ms_5^2 . mt_5}{ms_8^2 . mt_8 - ms_5^2 . mt_5},$$

wobei die Indices beliebig vertauschbar sind.

Wir sehen hieraus, dass die Punktepaare st einer Doppelvier unendlich oftmal entsprechende Punkte der specielleren Art ein-zweideutiger Beziehung $(q = 2)$ sind, wobei die beiden Punkte m und t_2 aufeinanderfallen.

Wir haben gezeigt, dass zwei Paar Punkte st einer Doppelvier die beiden andern auf eindeutige Art erzeugen, und können somit sagen, dass, wenn zwei Paar Punkte st einer Doppelvier entsprechende Punkte irgend einer ein-zweideutigen Beziehung der specielleren Natur $(q = 2)$ mit aufeinander fallenden Punkten mt_2 sind, es die beiden andern auch sein müssen.

Aufmerksam sei hier darauf gemacht, dass, wenn zwei Punktepaare der Doppelvier in eins zusammenfallen, dann die beiden andern Paar unbestimmt werden.

Die vier gesonderten Punktepaare st einer Doppelvier können überhaupt nur entsprechende Punkte einer ein-zweideutigen Beziehung der specielleren Art $(q = 2)$ sein.

Eine allgemeine ein-zweideutige Beziehung ist bestimmt durch fünf Paar Punkte st, also z. B. durch eine Doppelvier und ein Paar beliebiger Punkte s_4t_4. In dieser Beziehung entspricht dem Punkte s_∞ der Punkt t_2. Die Beziehung ist also auch bestimmt durch die Doppelvier und das Punktepaar $s_\infty t_2$, und es sind s_4t_4 darin entsprechende Punkte. Diese Beziehung ist aber von der specielleren Natur, weil wir ja den ganz beliebig gewählten Punkt m der beiden letzten Formeln nach t_2 legen können.

Es folgt also hieraus, dass eine Beziehung $(q = 2)$ durch zwei Doppelvieren bestimmt ist, welche ein Paar Punkte gemeinschaftlich haben oder, was dasselbe besagt, durch drei beliebig angenommene Punktepaare st.

XII. *Bilden unter den fünf Punktepaaren* st, *welche ein ein-zweideutiges Gebilde auf dem geraden Träger* 𝔖 *bestimmen, vier Paare eine Doppelvier, so ist das Gebilde von der specielleren Natur* ($q = 2$ *mit aufeinander liegenden Punkten* mt_2, *cf. Satz IV). Dasselbe ist durch zwei Doppelvieren, welche ein Punktepaar gemeinsam haben, oder, mit anderen Worten, durch drei beliebige Punktepaare* st *bestimmt, welche nicht Bestandtheile Einer Doppelvier sind. Greift man irgend zwei entsprechende Punktepaare* st *heraus, so bestimmen dieselben eine Doppelvier, deren restirende Punktepaare ebenfalls entsprechende Punkte der Beziehung liefern.*

Wir nennen das Gebilde eine „Reihe harmonischer Mittel zweiter Ordnung", einen Punkt t *„Pol" und jeden der beiden ihm entsprechenden Punkte* ss' *sein „harmonisches Mittel zweiter Ordnung", umgekehrt jeden der Punkte* ss' *„Pol" und den Punkt* t *ihr „harmonisches Mittel erster Ordnung".*

Dass die letztgenannten Namen mit denjenigen gleichbedeutend sind, welche sich bei Cremona, Introduzione pag. 16 der deutschen Uebersetzung finden, werden wir erst später zeigen können.

Der angeführte Satz zeigt uns, wie man eine Reihe harmonischer Mittelpunkte zweiter Ordnung construiren kann.

5. Die vier Paare einer Doppelvier wollen wir specialisiren. Es sollen die Punkte $t_5 t_6$ zusammenfallen und $s_5 s_6$ ihre harmonischen Mittelpunkte zweiter Ordnung sein, also $t_5 \equiv t_6$, $s_6 \equiv s'_5$. Wenden wir die Formel 2) Satz XI an, so wird

$$4 = (s_5 t_5 s_6 t_7)\,(s_6 t_5 s_5 t_7);$$

aus

$$-2 = (s_5 s_6 t_5 t_7) + (s_6 s_5 t_5 t_7)$$

wird

$$0 = \{1 + (s_5 s_6 t_5 t_7)\}^2,$$

d. h.

$$-1 = (s_5 s_6 t_5 t_7);$$

ebenso

$$-1 = (s_5 s_6 t_5 t_8).$$

Es fallen also t_7 und t_8 zusammen, nämlich in den vierten harmonischen Punkt zu t_5 und $s_5 s_6$.

Ferner ergiebt Formel 1) Satz XI

$$0 = 1 + 2\,(t_7 s_7 s_6 s_5)\,(t_5 s_5 s_6 t_7).$$

Nach dem Obigen ist aber

$$(t_5 s_5 s_6 t_7) = \frac{1}{2};$$

daher

$$(t_7 s_7 s_6 s_5) = -1;$$

ebenso

$$(t_7 s_8 s_6 s_5) = -1.$$

Die beiden Punkte $s_7 s_8$ fallen also mit t_5 zusammen.

XIII. *Fallen in einer Doppelvier zwei Punkte* t_5 *und* t_6 *zusammen, während die entsprechenden Punkte* s_5 *und* s_6 *die harmonischen Mittel zweiter Ordnung von* t_5 *sind, so fallen auch die beiden anderen Punktepaare zusammen, nämlich* s_7 *und* s_8 *nach* t_5, *und* $t_7 t_8$ *in den vierten harmonischen Punkt zu* t_5 *und* $s_5 s_6$, *letztere beide zugeordnet.*

Dies giebt mit anderen Worten den bekannten Satz:

Das harmonische Mittel erster Ordnung eines Punktes p ist der vierte harmonische Punkt zu p und seinen beiden harmonischen Mitteln zweiter Ordnung, letztere beide zugeordnet.

Dass dieser Satz für p_∞ seine Richtigkeit hat, sahen wir schon, denn es fielen ja m und t_2 auf einander.

Lässt man die Punkte $s_5 s_6 t_7 t_8$ auch noch zusammenfallen, so findet man sehr leicht den bekannten Satz:

XIV. *Die harmonischen Mittel zweiter Ordnung der Punkte einer Geraden bilden eine Involution zweiten Grades, in der die zwei harmonischen Mittelpunkte Eines Poles conjugirt sind. Jeder der beiden Asymptotenpunkte der Involution hat ein Paar, mit dem andern Asymptotenpunkte zusammenfallender harmonischer Mittelpunkte zweiter Ordnung. Die beiden Asymptotenpunkte stellen demnach zusammen zwei Doppelvieren dar.*

Wir wenden uns nun zur Beantwortung der Frage, wie viele Punktepaare einer Doppelvier reell sein müssen. Eine Doppelvier ist durch zwei Punktepaare $s_5 t_5$ und $s_6 t_6$ bestimmt, und diese nehmen wir als reell an. Zunächst ist ersichtlich, dass von den beiden anderen Paaren die Punkte $t_7 t_8$ zugleich mit $s_7 s_8$ reell sind. Es sind ja $t_7 t_8$ die Schnittpunkte gewisser Tangenten eines Kegelschnittes mit einer Geraden, und diese Tangenten sind eben mit s_7 und s_8 zugleich reell. s_7 und s_8 können auch nur gleichzeitig imaginär werden, da sie als Doppelpunkte zweier projectivischen Punktreihen definirt worden sind, ebenso $t_7 t_8$.

Für die nachfolgende Untersuchung wird es aber von Vortheil sein, wenn wir $s_7 s_8$ als die Asymptotenpunkte einer Involution ansehen. Es sei zu dem Zwecke τ_5 definirt durch die Gleichung 1) $\ldots (s_5 t_5 s_6 \tau_5) = -2$. Wir hatten früher gesehen, dass

$$-1 = (t_5 s_5 s_6 s_7) + (t_5 s_5 s_6 s_8).$$

Daher

$$2 = \frac{(t_5 s_5 s_6 s_7)}{(t_5 s_5 s_6 \tau_5)} + \frac{(t_5 s_5 s_6 s_8)}{(t_5 s_5 s_6 \tau_5)}$$

oder

$$2 = (t_5 s_5 \tau_5 s_7) + (t_5 s_5 \tau_5 s_8),$$

d. h.

$$1 - (t_5 s_5 \tau_5 s_8) = -\{1 - (t_5 s_5 \tau_5 s_7)\},$$

$$(t_5 \tau_5 s_7 s_8) = -1.$$

$$(t_6 \tau_6 s_7 s_8) = -1$$

würden wir ebenso erhalten, wenn wir gesetzt hätten 2) $\ldots (s_6 t_6 s_5 \tau_6) = -2$.

Wir sehen also, dass $s_7 s_8$ die Asymptotenpunkte einer Involution zweiten Grades sind, von welcher $t_5 \tau_5$ und $t_6 \tau_6$ conjugirte Punkte sind. Aus der Gleichheit

$$(t_5 s_5 s_6 \tau_5) = (t_6 s_6 s_5 \tau_6) = -\frac{1}{2}$$

folgt übrigens zugleich, dass $\tau_5 \tau_6$ conjugirt sind in der Involution

$$s_5 s_6,\ t_5 t_6,\ s_7 s_8,\ \tau_5 \tau_6.$$

Die vier Buchstaben $s_5 s_6 t_5 t_6$ können auf 24 verschiedene Arten hinter einander geschrieben werden, von denen je zwei für uns gleichwerthig sind, welche dieselbe Anordnung der Buchstaben, nur in umgekehrter Reihenfolge bringen. Wir wenden uns zuerst zu den vier Anordnungen, in denen $s_5 s_6$ von Einem der Punkte $t_5 t_6$ getrennt werden, nämlich:

$$s_5 t_5 s_6 t_6$$
$$s_5 t_6 s_6 t_5$$
$$s_6 t_5 s_5 t_6$$
$$s_6 t_6 s_5 t_5.$$

Die durch die Punkte $s_5 s_6$, $t_5 t_6$, $\tau_5 \tau_6$ bestimmte Involution ist dann elliptisch, folglich (Schröter, Kgsch. pag. 57) ist die Involution $t_5 \tau_5$, $t_6 \tau_6$ hyperbolisch, ihre Asymptotenpunkte $s_7 s_8$ sind also reell.

Unter den acht Complexionen, in denen $s_5 s_6$ nicht von Einem der Punkte $t_5 t_6$ getrennt werden, heben wir zunächst diejenigen vier heraus, in denen $s_5 t_5$ nicht von Einem der Punkte $s_6 t_6$ getrennt werden:

$$s_5 t_5 t_6 s_6$$
$$s_6 s_5 t_5 t_6$$
$$t_5 s_5 s_6 t_6$$
$$s_5 s_6 t_6 t_5.$$

Wir werden sehen, dass von diesen vier Verbindungen dasselbe gilt, wie von den ersten, nur ist der Beweis ein anderer, wollen ihn auch der Kürze halber nur für eine Verbindung durchführen.

Die Gleichung

2) $$(s_6 t_6 s_5 \tau_6) = -2$$

ergiebt

$$(s_5 s_6 t_6 \tau_6) = \frac{1}{3}$$

oder

3) $$\frac{3 \cdot s_5 t_6}{s_6 t_6} = \frac{s_5 \tau_6}{s_6 \tau_6};$$

ebenso

$$\frac{3 \cdot s_6 t_5}{s_5 t_5} = \frac{s_6 \tau_5}{s_5 \tau_5}.$$

Ebenso folgt aus 2)

4) $$-\frac{1}{2} \cdot \frac{s_6 s_5}{t_6 s_5} = \frac{s_6 \tau_6}{t_6 \tau_6}$$
$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{s_5 s_6}{t_5 s_6} = \frac{s_5 \tau_5}{t_5 \tau_5}.$$

Nehmen wir z. B. die Complexion $s_5 s_6 t_6 t_5$. Hier ergiebt das Kriterium 3) $\frac{s_5 \tau_6}{s_6 \tau_6} > 1$, d. h. τ_5 und τ_6 liegen nicht zwischen $s_5 s_6$. Kriterium 4) ergiebt

$$\frac{s_6 \tau_6}{t_6 \tau_6} < 0 \text{ und } \frac{s_5 \tau_5}{t_5 \tau_5} > 0,$$

d. h. τ_6 liegt zwischen $s_6 t_6$, und τ_5 nicht zwischen $s_5 t_5$. Wegen der hyperbolischen Involution $s_5 s_6$, $t_5 t_6$, $\tau_5 \tau_6$ kann demnach τ_6 entweder zwischen dem Mittelpunkte m der eben genannten Involution und t_6, und dann τ_5 rechts von t_5 gelegen sein (wir denken uns $s_5 s_6 t_6 t_5$ von links nach rechts ge-

richtet), oder es befindet sich τ_6 zwischen m und s_6, und dann τ_5 links von s_5. In beiden Fällen trennen sich die Punktepaare $t_5\tau_5$ und $t_6\tau_6$ nicht, bestimmen also eine hyperbolische Involution, deren Asymptotenpunkte $s_7 s_8$ somit reell sind, und je einer zwischen $s_5 s_6$ und $t_5 t_6$ sich befinden. Die Punkte t_7 und t_8 liegen daher beide zwischen $s_6 t_6$.

Es bleiben uns noch vier Complexionen, in denen jedes der Paare $s_5 t_5$, $s_6 t_6$ durch Einen Punkt des andern Paares getrennt wird. Es sind dies die Verbindungen

$$s_5 t_6 t_5 s_6$$
$$s_6 s_5 t_6 t_5$$
$$t_6 t_5 s_6 s_5$$
$$t_5 s_6 s_5 t_6.$$

Wir werden sehen, dass hier die Punkte $s_7 s_8$ sowohl reell als imaginär sein können. Bezeichnen wir wieder mit m den Mittelpunkt der Involution $s_5 s_6$, $t_5 t_6$, $\tau_5 \tau_6$, so ist

$$\frac{m\tau_5}{m\tau_6} = \frac{s_6\tau_5}{s_5\tau_6} \cdot \frac{s_5\tau_5}{s_6\tau_6},$$

oder nach Kriterium 3)

$$\frac{m\tau_5}{m\tau_6} = \frac{s_6 t_5 \cdot s_6 t_6}{s_5 t_5 \cdot s_5 t_6} \cdot \left(\frac{s_5\tau_5}{s_6\tau_6}\right)^2,$$

oder nach Kriterium 4)

$$\frac{m\tau_5}{m\tau_6} = \left(\frac{s_6 s_5 + 2 t_6 s_5}{s_5 s_6 + 2 t_5 s_6}\right)^2 \cdot \frac{s_5 t_5 \cdot s_6 t_5}{s_6 t_6 \cdot s_5 t_6}.$$

Zugleich ist

$$\frac{m t_5}{m t_6} = \frac{s_5 t_5 \cdot s_6 t_5}{s_6 t_6 \cdot s_5 t_6}.$$

Behandeln wir zunächst die Complexionen $s_6 s_5 t_6 t_5$ und $t_6 t_5 s_6 s_5$, bei denen m zwischen den beiden mittleren Punkten gelegen sein muss. Für die Lage $s_6 s_5 t_6 t_5$ ist $\frac{m t_5}{m t_6} > 1$. Es ergiebt Kriterium 4) $\frac{s_5\tau_5}{\tau_5 t_5} < 1$, d. h. τ_5 liegt zwischen $s_5 t_5$.

Es sind demnach die vier Lagen möglich: $\tau_6 s_6 s_5 \tau_5 m t_6 t_5$, $s_6 s_5 m \tau_5 t_6 t_5 \tau_6$, $s_6 s_5 m t_6 \tau_5 \tau_6 t_5$ und $s_6 s_5 m t_6 \tau_6 \tau_5 t_5$. In den drei ersten Fällen ist die Involution $t_5\tau_5$, $t_6\tau_6$ elliptisch, $\frac{m\tau_5}{m\tau_6} < 1$ und $s_7 s_8$ imaginär, im vierten Falle aber hyperbolisch, $\frac{m\tau_5}{m\tau_6} > 1$ und $s_7 s_8$ reell.

Bei der Lage $t_6 t_5 s_6 s_5$ und den beiden noch restirenden ist der Beweis ähnlich. Wir sprechen gleich das Resultat aus:

XV. *Sind zwei Punktepaare* $s_5 t_5$ *und* $s_6 t_6$ *einer Doppelvier reell, so sind die vier Punkte der beiden andern Paare entweder gemeinschaftlich reell oder gemeinschaftlich imaginär. Der erste Fall tritt stets ein, wenn das Paar* $s_5 s_6$

von Einem der Punkte $t_5 t_8$ *getrennt wird. Wenn diese Trennung nicht stattfindet, so tritt dennoch der erste Fall ein, sobald das Paar* $s_5 t_5$ *nicht von Einem der Punkte* $s_6 t_6$ *getrennt wird. Wenn jedoch* $s_5 t_5$ *von Einem der Punkte* $s_6 t_6$ *getrennt werden, so können beide Fälle eintreten, nämlich der erste, wenn die Quotienten*

$$\frac{s_5 t_5 \cdot s_6 t_5}{s_6 t_6 \cdot s_5 t_6} \text{ und } \left(\frac{s_6 s_5 + 2\, t_6 s_5}{s_5 s_6 + 2\, t_5 s_6}\right)^2 \cdot \frac{s_5 t_5 \cdot s_6 t_5}{s_6 t_6 \cdot s_5 t_6}$$

entweder beide grösser oder beide kleiner als Eins sind; sonst findet der zweite Fall statt.

Es bleibt noch zu beweisen, dass, wenn die Punkte $s_7 s_8$ reell resp. imaginär sind, dies auch bei den Punkten $t_7 t_8$ der Fall ist und umgekehrt. Wir suchen zu dem Zweck eine Involution herzustellen, deren Asymptotenpunkte $t_7 t_8$ sind. Es sei

5) $$(s_5 s_6 \sigma_5 t_5)(t_5 t_6 s_5 \tau_5) = -1,$$

wo τ_5 die obige Bedeutung behalten soll. Aus der Gleichung 1) folgt leicht:

$$(s_5 t_5 t_6 s_6) = -\frac{1}{2}(s_5 t_5 t_6 \tau_5)$$

und

$$(s_5 \tau_5 t_5 t_6) = \frac{1}{2}\{3 - (s_5 s_6 t_5 t_6)\}.$$

Früher aber hatten wir (Satz XI)

$$4 = (s_5 t_5 s_6 t_7)(s_6 t_6 s_5 t_7),$$

und es ist

$$(s_5 s_6 t_5 t_7) = 1 - (s_5 t_5 s_6 t_7),$$

$$(s_5 s_6 t_6 t_7) = 1 : \{1 - (s_6 t_6 s_5 t_7)\}.$$

Daher

$$(s_5 s_6 t_5 t_6) = \{1 - (s_5 t_5 s_6 t_7)\} . \{1 - (s_6 t_6 s_5 t_7)\}$$
$$= 5 - \{(s_5 t_5 s_6 t_7) + (s_6 t_6 s_5 t_7)\}.$$

Daher

$$3 - (s_5 s_6 t_5 t_6) = -2 + \{(s_5 t_5 s_6 t_7) + (s_6 t_6 s_5 t_7)\}.$$

Daraus findet man einfach

$$2\,(s_6 \sigma_5 s_5 t_5) = (s_5 t_5 s_6 t_7) + (s_6 t_6 s_5 t_7).$$

Setzen wir noch

6) $$(s_6 s_5 \sigma_6 t_6)(t_6 t_5 s_6 \tau_6) = -1,$$

so ergiebt sich leicht, dass

$$s_5 s_6,\ t_5 t_6,\ \tau_5 \tau_6,\ \sigma_5 \sigma_6$$

eine Involution bilden. Daher ist dann

$$2 = (s_5 t_5 \sigma_5 t_7) + (s_6 t_6 \sigma_6 t_7),$$

$$-1 = (s_5 \sigma_5 t_7 t_8),$$

$$-1 = (s_6 \sigma_6 t_7 t_8)$$

würden wir ebenso aus der Bedingung 6) erhalten haben.

Es sind also $t_7 t_8$ die Asymptotenpunkte einer Involution zweiten Grades, von der $s_5 \sigma_5$ und $s_6 \sigma_6$ conjugirte Punkte sind.

Die Gleichungen 5) und 6) ergeben aber leicht

$$(s_5 s_6 \sigma_5 \sigma_6) = (t_5 t_6 \tau_5 \tau_6).$$

Die Involution $t_5 \tau_5$, $t_6 \tau_6$, deren Asymptotenpunkte $s_7 s_8$ sind, ist aber elliptisch oder hyperbolisch, je nachdem $(t_5 t_6 \tau_5 \tau_6)$ positiv oder negativ ist, ebenso bei $(s_5 s_6 \sigma_5 \sigma_6)$. Daher sind $t_7 t_8$ zugleich mit $s_7 s_8$ reell oder imaginär und umgekehrt.

Die Gleichungen 1) bis 4) verhelfen uns auch zu einer zweiten Construction einer Doppelvier, welche bis auf einen (übrigens nur der Bequemlichkeit wegen verwendeten) Hilfskreis linear ist.

XVI. *Aufgabe. Gegeben seien auf der Geraden* $\mathfrak{S}$ *die Punktepaare* $\mathrm{s}_5 \mathrm{t}_5$ *und* $\mathrm{s}_6 \mathrm{t}_6$ *einer Doppelvier. Gesucht werden die beiden anderen Paare* $\mathrm{s}_7 \mathrm{t}_7$ *und* $\mathrm{s}_8 \mathrm{t}_8$.

Auflösung. Beschreibe über $\mathrm{s}_5 \mathrm{s}_6$ *als Durchmesser den Kreis, errichte in seinem Mittelpunkt senkrecht auf* $\mathfrak{S}$ *den Durchmesser* gh, *verlängere ihn über* g *um sich selbst bis* k, *bestimme die Punkte*

$$\mathrm{m}_5 = (\mathrm{k s}_6,\ \mathrm{g t}_5), \quad \mathrm{m} = (\mathrm{k s}_5,\ \mathrm{g t}_6),$$
$$\mathrm{n}_5 = (\mathrm{h s}_6,\ \mathrm{s}_5 \mathrm{m}_5), \quad \mathrm{n}_5 = (\mathrm{h s}_5,\ \mathrm{s}_6 \mathrm{m}_6).$$

Nenne $\mathrm{T}_5 \mathrm{T}_6 \mathrm{N}_5 \mathrm{N}_6$ *die Schnittpunkte des Kreises mit den Geraden* $\mathrm{g t}_5$, $\mathrm{g t}_6$, $\mathrm{g n}_5$, $\mathrm{g n}_6$ *resp., lege vom Punkte* $(\mathrm{N}_5 \mathrm{T}_5,\ \mathrm{N}_6 \mathrm{T}_6)$ *an den Kreis die Tangenten mit den Berührungspunkten* $\mathrm{S}_7 \mathrm{S}_8$ *und schneide* $\mathfrak{S}$ *in* s_7 *und* s_8 *durch* $\mathrm{g S}_7$ *und* $\mathrm{g S}_8$.

Bestimme $\mathrm{b} = (\mathrm{s}_5 \mathrm{S}_7,\ \mathrm{s}_6 \mathrm{S}_8)$ *und schneide den Kreis in* T_7 *und* T_8 *durch* $\mathrm{b T}_5$ *resp.* $\mathrm{b T}_6$, *dann ist*

$$\mathrm{t}_7 = (\mathfrak{S},\ \mathrm{g T}_7) \quad \textit{und} \quad \mathrm{t}_8 = (\mathfrak{S},\ \mathrm{g T}_8).$$

Der Beweis für diese Construction ist der folgende. Nennen wir noch l_5 den Schnittpunkt von $m_5 s_5$ mit der Tangente in s_6, dann sind folgende harmonische Strahlen vorhanden:

$$s_6\,(g h l_5 s_5) = -1,$$
$$s_6\,(g l_5 h k) = -1,$$

oder auch

$$s_6\,(g h l_5 k) = 2.$$

Daher

$$s_6\,(g h s_5 k) = -2.$$

Projicirt man die vier Strahlen auf $m_5 s_5$, so giebt es $(v_5 n_5 s_5 m_5) = -2$, und wenn man diese Punkte, unter denen also

$$v_5 = (m_5 s_5,\ s_6 g)$$

ist, noch von g auf $\mathfrak{S}$ projicirt, so giebt es

$$(s_6 \tau_5 s_5 t_5) = -2,$$

ebenso

$$(s_5 \tau_6 s_6 t_6) = -2,$$

wobei z. B.

$$\tau_5 = (\mathfrak{G}, gn_5)$$

ist. τ_5 und τ_6 sind also die in Gleichung 1) und 2) auftretenden Punkte. Natürlich ist dann auch

$$(s_6 N_5 s_5 T_5) = -2,$$

und es folgt der Rest der Construction aus der bekannten Methode, nach der man eine Involution auf einem Kegelschnitt construirt (Schröter, Kgsch. pag. 51).

Im Anschluss an Satz X dürfen wir ferner den Satz aussprechen:

XVII. *Zwei auf einander liegende Reihen harmonischer Mittel zweiter Ordnung haben eine Doppelvier gemeinsam.*

Die weitere Begründung desselben ist im Satz XII enthalten.

6. Wie in jeder ein-zweideutigen Beziehung giebt es auch in einer Reihe harmonischer Mittel zweiter Ordnung drei Punkte $a_1 a_2 a_3$, deren jeder ein Paar entsprechender Punkte st vorstellt. Wir betrachten irgend zwei derselben, $a_1 a_2$, als zwei Paar Punkte einer Doppelvier; sind nun $s_7 t_7$ und $s_8 t_8$ die beiden anderen Paare, so finden die Involutionen statt

$$a_1 s_7, \; a_2 s_8, \; a_1 t_7, \; a_2 t_8,$$
$$a_1 s_8, \; a_2 s_7, \; a_1 t_8, \; a_2 t_7.$$

Dies ist nur möglich, wenn a_1 mit dem einen Paare, etwa $s_7 t_7$, und a_2 mit dem andern Paare $s_8 t_8$ zusammenfällt.

XVIII. *In einer Reihe harmonischer Mittel zweiter Ordnung ereignet es sich im Allgemeinen dreimal, dass ein Punkt* a *sein eigenes harmonisches Mittel zweiter Ordnung ist. Diese drei Punkte* a, *von denen mindestens Einer reell sein muss, heissen die „Doppelpunkte" der Reihe. Irgend zwei derselben stellen eine Doppelvier vor, von welcher in jedem Punkte* a *zwei Paar Punkte* st *vereinigt sind.*

Die Punkte a ergeben also, als Punktepaare einer Doppelvier aufgefasst, kein viertes und fünftes Paar Punkte, aus denen wir die Reihe nach den Sätzen XII und I construiren könnten und doch ist die Reihe, wie wir zeigen werden, durch die drei Punkte a bestimmt. Es ist dies analog der Involution zweiten Grades, welche sich aus den Asymptotenpunkten allein vermittelst Doppelschnittverhältnissen nicht herstellen lässt, sondern erst mit Hilfe des Mittelpunktes der Involution. Wir werden uns daher nach einer andern Construction umsehen müssen.

Die Formel auf pag. 17:

$$\frac{2\, s_5 s_6 + t_5 t_6}{2\, s_5 s_7 + t_5 t_7} = \frac{m s_6^2 . m t_6 - m s_5^2 . m t_5}{m s_7^2 . m t_7 - m s_5^2 . m t_5}$$

giebt für $s_5 = t_5 = a_1$, $s_6 = t_6 = a_2$, $s_7 = t_7 = a_3$ sehr leicht

1) $$0 = m a_1 + m a_2 + m a_3.$$

Ebenso erhält man aus der Formel VI auf pag. 7:

$$\frac{mt_5 \,.\, s_6 s'_5}{ms_6^2 - ms_1^2} = \frac{t_5 t_6}{s_5 s_6}$$

sofort

$$\frac{ma_1 \,.\, a_2 a'_1}{ma_2^2 - ms_1^2} = 1,$$

worin a_1 und a'_1 die harmonischen Mittel zweiter Ordnung von a_1 sind; ähnlich später a'_2 und a'_3.

$$3 \,.\, ma_1 \,.\, a_2 a'_1 = 3\, ma_2^2 - 3\, ms_1^2.$$

Aus der Formel auf pag. 17 folgt aber

$$3 \,.\, ms_1^2 = ma_1^2 + ma_1 \,.\, ma_2 + ma_2^2.$$

Daher

$$3 \,.\, ma_1 \,.\, a_2 a'_1 = a_1 a_2 \,.\, a_3 a_2.$$

Ebenso

$$3 \,.\, ma_1 \,.\, a_3 a'_1 = a_1 a_3 \,.\, a_2 a_3$$

und

$$2) \quad \begin{cases} (a_2 a_3 a_1 a'_1) = -1; \text{ ebenso} \\ (a_1 a_3 a_2 a'_2) = -1 \\ (a_1 a_2 a_3 a'_3) = -1. \end{cases}$$

Ferner giebt Satz VII:

$$\frac{s_5 t \,.\, s_6 s}{s_5 s \,.\, s_6 t} = \frac{mt_5 \,.\, ss'_5}{mt_6 \,.\, ss'_6},$$

sofort

$$(a_1 a_2 t s) = \frac{ma_1 \,.\, sa'_1}{ma_2 \,.\, sa'_2}.$$

Aus derselben Formel VII folgt aber für $s = t = a_3$

$$\frac{ma_1}{ma_2} = \frac{a_3 a'_2}{a_3 a'_1}.$$

Daher

$$(a_1 a_2 t s) = (a'_2 a'_1 a_3 s)$$

und

$$(a_3 a_2 t s) = (a'_2 a'_3 a_1 s).$$

Somit ist

$$(a_1 a_2 t s)(a'_2 a'_1 a'_3 a_3) + (a_3 a_2 t s)(a'_2 a'_3 a'_1 a_1) = (a'_2 a'_1 a'_3 s) + (a'_2 a'_3 a'_1 s) = 1.$$

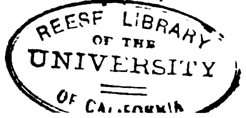
Wegen der Involution

$$a_1 a'_1,\; a_2 a'_2,\; a_3 a'_3$$

und wegen der Gleichungen 2) ist daher

$$3) \quad \begin{cases} (s t a_1 a_2) + (s t a_1 a_3) = -1 \\ (s t a_2 a_3) + (s t a_2 a_1) = -1 \\ (s t a_3 a_1) + (s t a_3 a_2) = -1. \end{cases}$$

XIX. Sind $a_1 a_2 a_3$ die Doppelpunkte einer Reihe harmonischer Mittel zweiter Ordnung, so gehört zu jedem derselben, z. B. zu a_1 noch ein zweiter Punkt a'_1, welcher mit a_1 die beiden harmonischen Mittel zweiter Ordnung von a_1 vorstellt. Die Punkte $a_1 a'_1$ und $a_2 a_3$ sind harmonisch gelegen. Sind überhaupt st ein Paar entsprechende Punkte der Reihe, so besteht die Gleichung



$$(s t a_1 a_2) + (s t a_1 a_3) = -1,$$

in der man die Indices beliebig vertauschen darf. Die Reihe ist durch die drei Doppelpunkte bestimmt.

Dieser Satz ist allbekannt. Die letzte Gleichung kann man unter der Form schreiben

$$\frac{a_1 t}{a_1 s} + \frac{a_2 t}{a_2 s} + \frac{a_3 t}{a_3 s} = 0,$$

oder auch

$$\frac{3}{st} = \frac{1}{s a_1} + \frac{1}{s a_2} + \frac{1}{s a_3}.$$

In dieser letzten Form ist sie die bekannte Gleichung von Poncelet aus dem Jahre 1828 (Mémoire sur les centres des moyennes harmoniques, Crelle's Journal Bd. 3). Wir haben daher auch im Satz XII die Namen gewählt, welche in der deutschen Uebersetzung (pag. 16) der Introduzione von H. Cremona eingeführt worden sind.

Aus dem letzten Satze ergiebt sich nun folgende bekannte* Construction der Punkte st:

Es seien die drei Doppelpunkte $a_1 a_2 a_3$ einer Reihe harmonischer Mittel zweiter Ordnung auf der Geraden $\mathfrak{G}$ gegeben; legt man durch dieselben drei beliebige gerade Linien, so schneidet die Polare eines Punktes s der Geraden $\mathfrak{G}$ in Bezug auf das Dreiseit die Gerade $\mathfrak{G}$ in dem entsprechenden Punkte t.

Es seien nämlich $g_1 g_2 g_3$ die Ecken dieses Dreiseits und z. B. $g_1 g_3 a_2$ in gerader Linie. Die Linien $s g_1$, $s g_2$, $s g_3$ treffen die Gegenseiten des Dreiecks $g_1 g_2 g_3$ in drei Punkten. Construirt man zu diesen und den jedesmaligen Ecken des Dreiecks die vierten harmonischen Punkte, so liegen diese drei, sich so ergebenden vierten harmonischen Punkte auf einer Geraden $\mathfrak{S}$, welche $\mathfrak{G}$ in t schneidet und die Polare von s in Bezug auf das Dreieck $g_1 g_2 g_3$ genannt wird. Sämmtliche Geraden $\mathfrak{S}$ umhüllen bekanntlich einen Kegelschnitt K, welcher die Seiten des Dreiecks berührt. Die Berührungspunkte auf demselben sind die Punkte $h_1 h_2 h_3$, welche zu den Punkten $a_1 a_2 a_3$ und den jedesmaligen Ecken g harmonisch zugeordnet sind, z. B.

$$(a_1 h_1 g_2 g_3) = -1.$$

Dabei liegen bekanntlich

$$a_1 h_2 h_3, \quad a_2 h_1 h_3, \quad a_3 h_1 h_2$$

je in einer Geraden.

Es ist ersichtlich, zunächst, dass dem Punkte $s = a_1$ der Punkt $t = a_1$ entspricht, ebenso bei den beiden andern Doppelpunkten. Die Polare $g_1 h_1$ von a_1 für K schneidet ferner $\mathfrak{G}$ in dem Punkte a'_1, für welche die Bedingung besteht

$$(a_2 a_3 a_1 a'_1) = -1.$$

* Durège, Die ebenen Curven dritter Ordnung 1871, Nr. 291.

Die Polare $\mathfrak{T}'$ von a'_1 in Bezug auf das Dreieck $g_1 g_2 g_3$ geht aber durch a_1, weil $(a_1 h_1 g_2 g_3) = -1$ ist. Diese Polare $\mathfrak{T}'$ ist also die zweite Tangente, die man von a_1 an den Kegelschnitt K legen kann. Wir sehen demnach, dass dem Punkte $s = a'_1$ der Punkt $t = a_1$ entspricht, was ähnlich bei den beiden andern Doppelpunkten zutrifft.

Diese Construction der Reihe aus den drei Doppelpunkten ist aber nur so lange anwendbar, als die drei Doppelpunkte $a_1 a_2 a_3$ reell sind. Wir brauchen daher noch eine allgemeinere Construction, welche gestattet, st zu bestimmen, wenn a_1 reell gegeben ist, und zugleich eine Involution A, deren (reelle oder imaginäre) Asymptotenpunkte $a_2 a_3$ sind.

Zunächst eine Vorbemerkung. In einer Doppelvier seien $s_5 = t_5 = a_1$ und $s_6 t_6$ gegeben. Wie liegen dann die beiden andern Punktepaare? Das eine der restirenden Paare, etwa $s_8 t_8$, muss mit a_1 zusammenfallen, denn es existirt eine Involution $s_5 s_6$, $t_5 t_6$, $t_7 t_8$, $s_7 s_8$, welche in diesem Falle parabolisch wird. Das andere Paar $s_7 t_7$ bestimmt sich dann aus den Gleichungen im Satz XI:

$$(t_6 s_6 a_1 s_7) = -2,$$
$$(s_6 t_6 a_1 t_7) = 4.$$

Aus der Relation

$$(s_6 t_6 a_1 a_2) + (s_6 t_6 a_1 a_3) = -1$$

folgt aber

$$0 = (s_6 t_6 \sigma_6 a_1) + (s_6 t_6 \sigma_6 a_2) + (s_6 t_6 \sigma_6 a_3)$$

für jeden Punkt σ_6 von $\mathfrak{G}$. Nehmen wir insbesondere an

$$(a_2 a_3 s_6 \sigma_6) = -1$$

oder

$$2 = (s_6 t_6 \sigma_6 a_2) + (s_6 t_6 \sigma_6 a_3),$$

so ergiebt sich

$$(t_6 s_6 a_1 \sigma_6) = -2,$$

d. h. s_7 und σ_6 sind identisch.

XX. *Finden sich in einer Doppelvier ein Doppelpunkt* $\mathfrak{a}$ *und ein Paar Punkte* $\mathfrak{s}_1 \mathfrak{t}_1$, *so fällt von den beiden andern Paaren das eine nach* $\mathfrak{a}$; *das andere* $\mathfrak{s}_2 \mathfrak{t}_2$ *ist bestimmt durch die Bedingungen*

$$(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{t}_1 \mathfrak{s}_2 \mathfrak{a}) = -2,$$
$$(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{t}_1 \mathfrak{a} \mathfrak{t}_2) = 4,$$

und es sind $\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2$ *ein Paar conjugirte Punkte der Involution, deren Asymptotenpunkte die beiden andern Doppelpunkte* $\mathfrak{a}$ *sind.*

Es seien nun zunächst $a_1 a_2 a_3$ reell, und wir behalten die Bezeichnungen bei, die wir bei Ableitung der Construction XIX eingeführt. Wir nennen noch $\mathfrak{T}$ die Gerade $a_1 g_2 g_3$ und σ den Punkt von $\mathfrak{G} = a_1 a_2 a_3$, welcher in der Involution A (mit den Asymptotenpunkten $a_2 a_3$) dem Punkte s conjugirt ist: $(a_2 a_3 s \sigma) = -1$. (S. lithogr. Tafel Fig. 1.)

Die Construction der Geraden $\mathfrak{S}$ ergiebt, dass der Punkt Σ von $\mathfrak{T}$, in welchem sich $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{S}$ schneiden, in Bezug auf $g_2 g_3$ harmonisch zu-

geordnet ist zu dem Punkte $S_1 = (\mathfrak{T}, g_1 s)$. Es liegt also Σ auf dem Strahle $g_1 \sigma$, d. h. die Geraden $\mathfrak{S}$ und der Strahl $g_1 \sigma$ schneiden sich auf $\mathfrak{T}$.

Ferner construiren wir die zweite Tangente $\mathfrak{T}'$, welche sich ausser $\mathfrak{T}$ aus a_1 noch an K legen lässt, und welche dem vorhin erwähnten Punkte a'_1 entspricht, bestimmt durch

$$(a_2 a_3 a_1 a'_1) = -1.$$

Nennen wir noch

$$\mathfrak{B} = a_1 g_1$$
$$\mathfrak{L} = a_1 h_2 h_3,$$

so ergiebt sich, dass die vier Strahlen

$$\mathfrak{B}\mathfrak{L},\ \mathfrak{T}\mathfrak{T}'$$

vier harmonische Strahlen sind, weil $h_2 h_3$ die Berührungspunkte des öfters erwähnten Kegelschnittes K bedeuten, welcher $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$, $g_1 h_3$ und $g_1 h_2$ tangirt. Dass ausserdem

$$\mathfrak{B}\mathfrak{T},\ \mathfrak{G}\mathfrak{L}$$

vier harmonische Strahlen sind, folgt aus der Lage der Punkte gah, denn $(g_1 g_3 a_2 h_2) = -1$.

Die Gerade $\mathfrak{S}$ schneide $\mathfrak{T}'$ in S und $\mathfrak{L}$ in R. Aus R lässt sich ausser $\mathfrak{S}$ noch eine zweite Tangente $\mathfrak{S}_1$ an den Kegelschnitt K legen; ihr Schnittpunkt x mit $\mathfrak{T}$ muss zu Σ harmonisch zugeordnet sein in Bezug auf $g_2 g_3$, weil $\mathfrak{L}$ die Polare von g_1 für K ist. Es ist also auch $g_1 (a_2 a_3 \sigma x) = -1$, d. h. x fällt mit S_1 zusammen

$$\mathfrak{S}_1 = R S_1.$$

Die Gerade $\mathfrak{S}_1$ schneide ferner $\mathfrak{T}'$ in Σ_1. Wir wollen nun zeigen, dass die Geraden SS_1 und $\Sigma\Sigma_1$ sich in g_1 treffen, d. h. dass $g_1 s S S_1$ und $g_1 \sigma \Sigma \Sigma_1$ zwei gerade Linien sind.

Dem Kegelschnitt K ist das Vierseit $\mathfrak{T}\mathfrak{T}'\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$ umschrieben. Die Diagonale $\mathfrak{L}$ desselben ist also die Polare des Schnittpunktes $(SS_1, \Sigma\Sigma_1)$ für jeden dem Vierseit einbeschriebenen Kegelschnitt, z. B. für K, daher

$$g_1 = (\Sigma\Sigma_1, SS_1).$$

Damit ist denn eine Construction von t gewonnen, die auch für den Fall passt, dass die Involution A elliptisch, d. h. $a_2 a_3$ imaginär werden. Wir ziehen die Gerade $\mathfrak{B}$ beliebig durch a_1 und nehmen auf ihr irgend einen Punkt g_1 an. Ebenso willkürlich ziehen wir durch a_1 die Gerade $\mathfrak{T}$, bestimmen $\mathfrak{L}$ so, dass

$$a_1 (\mathfrak{B}\mathfrak{T}\mathfrak{G}\mathfrak{L}) = -1,$$

und $\mathfrak{T}'$ so, dass

$$a_1 (\mathfrak{B}\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{T}') = -1.$$

Ferner ziehen wir von g_1 nach zwei conjugirten Punkten $s\sigma$ der Involution A Strahlen, welche $\mathfrak{T}$ in $S_1 \Sigma$ und $\mathfrak{T}'$ in $S\Sigma_1$ treffen. Die Linie ΣS schneidet dann $\mathfrak{G}$ im verlangten Punkte t, und $\Sigma_1 S_1$ trifft $\mathfrak{G}$ ebenso in dem zu σ gehörenden Pol τ.

Damit die Vorbemerkung XX noch mehr als die Grundlage hervortritt, auf welcher die gefundene Construction beruht, projiciren wir noch die Schnittpunkte von $\mathfrak{S}$ mit den Strahlen $\mathfrak{B}\mathfrak{T}\mathfrak{G}\mathfrak{L}\mathfrak{T}'$ von g_1 aus auf $\mathfrak{G}$. Setzen wir

$$r = (\mathfrak{G},\ g_1 R),$$

so erhalten wir

$$-1 = (s\sigma a_1 r),$$
$$-1 = (a_1 \sigma r t),$$

oder, mit Weglassung von r,

$$-2 = (st\sigma a_1).$$

Die letzten Gleichungen bezeugen uns auch, dass stets derselbe Punkt t resultirt, wie wir auch die Constructionselemente $g_1\mathfrak{B}\mathfrak{T}$ wählen mögen.

Aus der Gleichung $(a_2 a_3 s\sigma) = -1$ folgt wieder

$$2 = (st\sigma a_2) + (st\sigma a_3);$$

daher

$$-1 = \frac{(st\sigma a_2)}{(st\sigma a_1)} + \frac{(st\sigma a_3)}{(st\sigma a_1)},$$
$$-1 = (st a_1 a_2) + (st a_1 a_3).$$

Wir haben also auch wirklich eine Reihe harmonischer Mittel zweiter Ordnung vor uns.

XXI. *Eine Reihe harmonischer Mittel zweiter Ordnung auf dem Träger* $\mathfrak{G}$ *ist durch einen reellen Doppelpunkt* a_1 *und durch eine Involution* A *bestimmt, deren (reelle oder imaginäre) Asymptotenpunkte die beiden anderen Doppelpunkte sind. Zu irgend einem Punkte* s *von* $\mathfrak{G}$ *findet man seinen Pol* t *folgendermassen. Man legt durch* a_1 *die beiden willkürlichen Geraden* $\mathfrak{B}$ *und* $\mathfrak{T}$ *und zieht durch* a_1 *die Linien* $\mathfrak{L}$ *und* $\mathfrak{T}'$ *als vierte harmonische Strahlen unter den Bedingungen*

$$\mathrm{a}_1\,(\mathfrak{B}\mathfrak{T}\mathfrak{G}\mathfrak{L}) = -1,$$
$$\mathrm{a}_1\,(\mathfrak{B}\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{T}') = -1;$$

wählt man ferner auf $\mathfrak{B}$ *einen beliebigen Punkt* g_1 *und zieht nach zwei conjugirten Punkten* $\mathrm{s}\sigma$ *der Involution* A *die Strahlen* $\mathrm{g}_1\mathrm{s}$ *und* $\mathrm{g}_1\sigma$ *so, dass*

$$\Sigma = (\mathfrak{T},\ \mathrm{g}_1\sigma),\quad \mathrm{S} = (\mathfrak{T}',\ \mathrm{g}_1\mathrm{s}),$$

so ist der Punkt

$$\mathrm{t} = (\mathfrak{G},\ \mathrm{S}\Sigma)$$

der verlangte.

Wie man auch die Elemente $\mathfrak{B}\mathfrak{T}\mathrm{g}_1$ *annehmen mag, immer resultirt für denselben Punkt* s *derselbe Punkt* t. *Für ihn besteht auch die Gleichung* $-2 = (\mathrm{st}\sigma\mathrm{a}_1)$.

7. Wir haben gesehen, dass die harmonischen Mittelpunkte zweiter Ordnung ss' der Punkte t eine Involution J bilden, es soll diese Involution hergestellt werden, wenn der Doppelpunkt a_1 und die Involution A mit den Doppelpunkten $a_2 a_3$ auf $\mathfrak{G}$ gegeben sind. Wir ziehen wieder die Geraden $\mathfrak{B}\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{T}'$ und haben unter Beibehaltung der vorherigen Bezeichnungen

den Punkt t als den Schnittpunkt einer Geraden $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{G}$ gefunden, welche Gerade Tangente eines Kegelschnittes K war. Die Tangente $\mathfrak{S}$ hing in bestimmter Weise von dem Punkte s ab. Durch t gehen aber zwei Tangenten $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ an K, und es hänge $\mathfrak{S}'$ in derselben Weise vom Punkte s' der Geraden $\mathfrak{G}$ ab, wie $\mathfrak{S}$ von s. Es schneide $\mathfrak{S}$ die Geraden $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ resp. in Σ und S, $\mathfrak{S}'$ entsprechend in Σ' und S'; dann ist

$$s = (\mathfrak{G},\ g_1 S),\ s' = (\mathfrak{G},\ g_1 S'),$$

während

$$\sigma = (\mathfrak{G},\ g_1 \Sigma) \text{ und } \sigma' = (\mathfrak{G},\ g_1 \Sigma').$$

die in der Involution A zu s resp. s' conjugirten Punkte bedeuten. ss' sind dann conjugirte Punkte der Involution J.

Die Involution J hat zwei Asymptotenpunkte. Um dieselben zu erhalten, muss man in den Schnittpunkten ii' von $\mathfrak{G}$ mit K die Tangenten an K legen. Punkt

$$D = (S\Sigma',\ S'\Sigma)$$

ist der Pol von $\mathfrak{G}$ für K; die besagten Tangenten sind also iD und $i'D$. Sie mögen $\mathfrak{T}'$ in i und i' schneiden, die Schnittpunkte von $\mathfrak{G}$ mit $g_1\mathrm{i}$ und $g_1\mathrm{i}'$ sind dann die gesuchten Asymptotenpunkte der Involution J.

Wo liegt nun der Schnittpunkt $(i\mathrm{i}',\ i'\mathrm{i})$? Er liegt erstens auf der Polare Da'_1 von a_1 für K. Besagte Polare trifft auch g_1, da a_1 auf der Polaren $\mathfrak{L}$ von g_1 in Bezug auf K gelegen ist. Ausserdem ist aber Punkt $(i\mathrm{i}',\ i'\mathrm{i})$ auch noch zu D in Bezug auf a'_1 und l harmonisch, wenn wir mit l den Schnittpunkt von $\mathfrak{T}'$ mit der Geraden $g_1 a'_1 D$ bezeichnen. Denn setzen wir $\mathfrak{P} = a_1 D$, so ist

$$1)\qquad a_1(\mathfrak{G}\mathfrak{P}\mathfrak{T}\mathfrak{T}') = -1.$$

Wir hatten aber früher die Doppelverhältnisse

$$2)\qquad a_1(\mathfrak{B}\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{T}') = -1$$

und

$$3)\qquad a_1(\mathfrak{B}\mathfrak{T}\mathfrak{G}\mathfrak{L}) = -1.$$

Aus 1) und 2) folgt, dass folgende von a_1 ausgehende Strahlen in Involution stehen:

$$\mathfrak{T}\mathfrak{T}',\ \mathfrak{B}\mathfrak{G},\ \mathfrak{P}\mathfrak{L}.$$

Daher ist

$$a_1(\mathfrak{T}\mathfrak{T}'\mathfrak{B}\mathfrak{P}\mathfrak{G}\mathfrak{L}) \barwedge a_1(\mathfrak{T}'\mathfrak{T}\mathfrak{G}\mathfrak{L}\mathfrak{B}\mathfrak{P})$$

und speciell

$$a_1(\mathfrak{B}\mathfrak{T}\mathfrak{G}\mathfrak{L}) = a_1(\mathfrak{G}\mathfrak{T}'\mathfrak{B}\mathfrak{P}).$$

Folglich ist nach 1)

$$4)\qquad a_1(\mathfrak{G}\mathfrak{T}'\mathfrak{B}\mathfrak{P}) = -1.$$

Es muss daher Punkt $(i\mathrm{i}',\ i'\mathrm{i})$ auf $\mathfrak{B}$ gelegen sein, d. h.

$$g_1 = (i\mathrm{i}',\ i'\mathrm{i}).$$

Somit sind ii' die Asymptotenpunkte der Involution J, d. h. die Involution ist diejenige, welche „der Geraden $\mathfrak{G}$ in Bezug auf K zugehört" (Schröter, Kgsch. pag. 140).

Nennen wir nun

$$m = (\mathfrak{G}, S\Sigma')$$
$$n = (\mathfrak{B}, S\Sigma'),$$

dann ist noch 4)

$$(DnmS) = -1$$

und wegen 1)

$$(DmS\Sigma') = -1.$$

Projiciren wir die genannten Punkte von g_1 auf $\mathfrak{G}$, so erhalten wir

$$(a'_1 a_1 m s) = -1,$$
$$(a'_1 m s \sigma') = -1.$$

Ist nun $a_1 s$ und die Involution A gegeben, so findet man nach einander die Punkte $a'_1 m \sigma' s'$. (S. lithogr. Tafel Fig. 2.)

XXII. *Die harmonischen Mittel zweiter Ordnung* $\mathrm{s s'}$ *der Punkte* t *einer Geraden* $\mathfrak{G}$ *bilden eine Involution* J. *Ist von der Reihe ein reeller Doppelpunkt* a_1 *und die Involution* A *gegeben, deren Asymptotenpunkte die beiden andern Doppelpunkte* $\mathrm{a}_2 \mathrm{a}_3$ *sind, so kann man die Involution* J *folgendermassen construiren.*

Ist die Involution A hyperbolisch, so lege man durch $a_1 a_2 a_3$ drei beliebige Gerade, die ein Dreieck $g_1 g_2 g_3$ bilden und construire auf jeder Dreiecksseite zu den beiden Ecken g und dem jedesmaligen Punkte a den vierten harmonischen, a zugeordneten Punkt h. Dem Kegelschnitte K, welcher die Dreiecksseiten in den Punkten h berührt, gehört auf der Geraden $\mathfrak{G}$ die geforderte Involution J zu.

In jedem Falle findet man zu einem gegebenen Punkte s *den conjugirten* s' *folgendermassen. Man legt durch* a_1 *die willkürlichen Geraden* $\mathfrak{T}\mathfrak{T}'$, *zieht durch* a_1 *die Linien* $\mathfrak{P}$ *und* $\mathfrak{B}$ *als vierte harmonische Strahlen unter den Bedingungen*

$$\mathrm{a}_1 (\mathfrak{T}\mathfrak{T}'\mathfrak{G}\mathfrak{P}) = -1,$$
$$\mathrm{a}_1 (\mathfrak{G}\mathfrak{T}'\mathfrak{P}\mathfrak{B}) = -1,$$

wählt auf $\mathfrak{B}$ *einen beliebigen Punkt* g_1 *und zieht von* g_1 *nach den Punkten* s *und* a'_1, *welcher letztere zu* a_1 *in der Involution* A *conjugirt ist, Strahlen, so dass*

$$\mathrm{S} = (\mathfrak{T}', \mathrm{g}_1 \mathrm{s}), \ \mathrm{D} = (\mathfrak{P}, \mathrm{g}_1 \mathrm{a}'_1)$$

wird, und construirt

$$\Sigma' = (\mathfrak{T}, \mathrm{DS}), \ \sigma' = (\mathfrak{G}, \mathrm{g}_1 \Sigma');$$

dann ist der zu σ' *in der Involution* A *conjugirte Punkt* s' *der gesuchte.*

Wie man auch die Elemente $\mathfrak{T}\mathfrak{T}'\mathrm{g}_1$ *annehmen mag, immer resultirt für denselben Punkt* s *derselbe Punkt* s'. *Bestimmt man die vierten harmonischen Punkte* m *und* σ' *unter den Bedingungen:*

$$(\mathrm{a}_1 \mathrm{a}'_1 \mathrm{s m}) = -1, \ (\mathrm{m a}'_1 \mathrm{s} \sigma') = -1,$$

so ist der zu σ' *in der Involution* A *conjugirte Punkt* s' *der gesuchte.*

Statt der beiden letzten Gleichungen können wir unter Weglassung von m auch setzen

$$(a'_1 a_1 s \sigma') = -3.$$

Die angegebene Construction des Punktes s' hat eine grosse Aehnlichkeit mit einer von Herrn Schröter gelieferten (Zur Construction eines äquianharmonischen Systems, Mathem. Annalen, Bd. X, pag. 426). Unsere Construction lässt sich leicht auf die dortige reduciren.

Aus den Gleichungen 1) und 2) ist ersichtlich, dass folgende von a_1 ausgehende Strahlenpaare in Involution sind:

$$\mathfrak{T}\mathfrak{T}', \ \mathfrak{B}\mathfrak{P}, \ \mathfrak{G}\mathfrak{L}.$$

Daher ist

$$a_1(\mathfrak{G}\mathfrak{T}'\mathfrak{B}\mathfrak{P}) = a_1(\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{P}\mathfrak{B}).$$

Wegen 4) ist nun

5) $$a_1(\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{P}\mathfrak{B}) = -1.$$

Schneiden wir die Linie $\Sigma S'$ durch die Geraden $\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{T}'\mathfrak{B}\mathfrak{P}$ und projiciren die Schnittpunkte von g_1 auf $\mathfrak{G}$, so erhalten wir, wenn wir setzen

$$U = (\mathfrak{L}, \ \Sigma S'), \ u = (\mathfrak{G}, \ g_1 U),$$

wegen 5)

$$(a_1 a'_1 \sigma u) = -1,$$

wegen 2)

$$(a_1 u \sigma s') = -1.$$

XXIII. Beschränken wir uns auf $\mathfrak{G}$ als Operationsfeld, so lässt sich der Punkt s' des vorigen Satzes noch auf andere Art finden. Man construirt den Pnnkt u als vierten harmonischen Punkt unter der Bedingung $(a_1 a'_1 \sigma u) = -1$, dann findet man s' aus $(a_1 u \sigma s') = -1$. Die Asymptotenpunkte ii' der Involution J sind die Doppelelemente eines äquianharmonischen Systems der drei cyklisch vertauschbaren Elemente $a_1 a_2 a_3$. Von den Involutionen AJ ist die eine elliptisch, die andere hyperbolisch.

Die Schlusssätze lese man im citirten Aufsatze nach; beweisen lassen sie sich aus den Gleichungen

$$(ii'a_1 a_2) + (ii'a_1 a_3) = -1,$$
$$(i'ia_1 a_2) + (i'ia_1 a_3) = -1.$$

Endlich ist es sehr einfach, den Pol t zu bestimmen, wenn seine harmonischen Mittel zweiter Ordnung s und s' gegeben sind. Es bilden die Strahlen von g_1 nach $\Sigma S'$, $\Sigma' S$, $a_1 t$ eine Involution, woraus der Satz folgt:

XXIV. *Ist ein Paar harmonischer Mittel zweiter Ordnung* $\mathrm{s}\mathrm{s}'$ *gegeben, so suche man die Punkte* $\sigma\sigma'$, *welche den Punkten* $\mathrm{s}\mathrm{s}'$ *resp. in der Involution* A *(mit den Asymptotenpunkten* $\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3$*) conjugirt sind. Die Punktepaare* $\mathrm{s}'\mathrm{s}$ *und* $\mathrm{s}\mathrm{s}'$ *bestimmen eine neue Involution, in welcher* t, *der zu* a_1 *conjugirte Punkt, der Pol von* $\mathrm{s}\mathrm{s}'$ *ist.*

8. Es erübrigt nun noch, für irgend einen Punkt t seine beiden harmonischen Mittel ss' ohne Benutzung des Kegelschnittes K zu construiren, immer unter der Voraussetzung, dass a_1 und die Involution A (mit den Asymptotenpunkten $a_2 a_3$) bekannt seien.

Die drei Punkte $h_1 h_2 h_3$ bilden die Ecken des Diagonaldreiseits im vollständigen Viereck $g_1 g_2 g_3 D$. Da der Kegelschnitt K die Punkte $h_1 h_2 h_3$ enthält und in ihnen die Seiten des Dreiseits $g_1 g_2 g_3$ berührt, d. h. also auch diejenigen Punkte enthält, welche je einem der Punkte a in Bezug auf je zwei Punkte g harmonisch zugeordnet sind, so liegt nichts näher, als dass wir uns die Punkte $g_1 g_2 g_3 D$ als die Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels B denken und nun denjenigen Kegelschnitt aufsuchen, welcher die Pole von $\mathfrak{G}$ in Bezug auf die Bestandtheile des Büschels B enthält (Schröter, Kgsch. pag. 300). Auf ihm liegen denn auch die Punkte, welche den Punkten von $\mathfrak{G}$ für B conjugirt sind. Wir beweisen, dass K dieser Kegelschnitt ist.

Es seien wieder $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ die den Punkten s und s' resp. entsprechenden Tangenten von K; $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ schneiden sich in dem Punkte t von $\mathfrak{G}$, dem Pole von s und s'. Die Berührungspunkte von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ mit K seien s_0 und s'_0. Bekanntlich erhält man z. B. s_0, indem man den Punkt

$$d_1 = (g_1 s,\ h_2 h_3)$$

mit h_1 verbindet und $\mathfrak{S}$ durch $h_1 d_1$ in s_0 schneidet, oder indem man

$$d_2 = (g_2 s,\ h_1 h_3)$$

mit h_2 verbindet und $\mathfrak{S}$ durch $h_2 d_2$ in s_0 schneidet u. s. w. Die Strahlen $h_1 d_1$ und $h_1 s$ sind aber in Folge der Gleichung

$$a_1 (\mathfrak{B}\mathfrak{T}\mathfrak{G}\mathfrak{L}) = -1$$

harmonisch zu den Strahlen $h_1 g_3$ und $h_1 g_1$, d. h. $h_1 s_0$ ist die Polare von s für den in das Linienpaar $h_1 g_2 g_3$ und $h_1 D g_1$ zerfallenden Kegelschnitt des Büschels B. Ebenso ist $h_2 s_0$ die Polare von s für den Kegelschnitt $h_2 g_2 D + h_2 g_1 g_3$ u. s. w., d. h. s_0 ist der zu s conjugirte Punkt in Bezug auf das Büschel B, s'_0 der conjugirte zu s'. Da nun s_0 und s'_0 auf K gelegen sind, so ist unsere Behauptung erwiesen.

Will man also zu einem Punkte s als harmonischem Mittel zweiter Ordnung den Pol t construiren, so suche man zu s den in Bezug auf das Büschel B conjugirten Punkt s_0 und lege in demselben an K die Tangente, welche dann $\mathfrak{G}$ in t schneiden wird.

Die Gerade $s_0 s'_0$ muss als Polare von t für K durch D, den Pol von $\mathfrak{G}$ für K laufen. Bestimmen wir die Punkte

$$t'_0 = (s s'_0,\ s' s_0),$$
$$t' = (s s',\ s_0 s'_0),$$

so müssen dieselben (Schröter, Kgsch. pag. 153) ebenfalls für B conjugirt sein; der eine t' liegt auf $\mathfrak{G}$, der andere t'_0 also auf K. Da t' auf $s_0 D$ gelegen ist, sind tt' für K conjugirt, d. h. ein Paar conjugirte Punkte der

Involution J (mit den Asymptoten ii'), auch muss deshalb der zu t für K conjugirte Punkt t_0 auf der Geraden $t'_0 D$ gelegen sein, d. h.

$$t_0 = (s'_0 s',\ s_0 s).$$

Die Tangenten in t_0 und t'_0 schneiden sich in einem Punkte u der Geraden $\mathfrak{G}$ (s. lithogr. Tafel Fig. 3), und es ist daher u der Pol zu t und t' als harmonischen Mitteln zweiter Ordnung. Setzen wir noch

$$u' = (\mathfrak{G},\ D t_0),$$

wobei also uu' auch ein Paar conjugirte Punkte der Involution J sind, so ist

$$(s s' t' u') = -1.$$

Die für K zugehörenden Polaren sind nun auch vier harmonische Strahlen

$$D\,(s' s t u) = -1,$$

und somit endlich

$$(s' s t u) = -1.$$

XXIV. *Will man zu* t *als Pol die harmonischen Mittel zweiter Ordnung* ss' *construiren, so suche man den Pol* u *von* t *(Satz XXI), bestimme die Punkte* t' *und* u', *welche mit* t *resp.* u *ein Paar harmonischer Mittel zweiter Ordnung ausmachen (Satz XXII oder XXIII) und suche endlich die Asymptotenpunkte des Punktsystems, welches durch die Paare* tu *und* t'u' *bestimmt ist; dies sind dann die gewünschten Punkte.*

XXV. *Wenn die Involution* A *(mit den Asymptoten* $a_2 a_3$*) hyperbolisch, also die Involution* J *(mit den Asymptoten* ii'*) elliptisch ist, so gehören zwei conjugirten Punkten* t *und* t' *von* J *je ein Paar reelle harmonische Mittel zweiter Ordnung* s *zu, und es sind diese zwei Paar Punkte* s *vier harmonische.*

Ueberhaupt können wir nebenbei den Satz aussprechen:

Sind aα *und* xξ *irgend zwei Paar conjugirter Punkte einer Involution* A, *und construirt man die Punkte* y *und* η *unter den Bedingungen*

$$(x\xi a y) = -1,\ (x\xi\alpha\eta) = -1,$$

so sind yη *wieder ein Paar conjugirter Punkte derselben Involution. Ist die Involution* A *elliptisch, so existirt ein reelles Punktepaar* x'ξ' *derselben, für welches*

$$(x'\xi' a\eta) = -1,\ (x'\xi'\alpha y) = -1,$$

und es ist dann auch

$$(x\xi x'\xi') = -1.$$

Ist die Involution A *hyperbolisch, so sind* x'ξ' *imaginär.*

9. Eine Reihe harmonischer Mittel zweiter Ordnung ist auch bestimmt durch einen reellen Doppelpunkt a_1 und zwei Paar entsprechender Punkte $s_1 t_1$ und $s_2 t_2$. Denn die letzteren bestimmen eine Doppelvier, die mit a_1 zusammen fünf Punktepaare ausmacht. Man kann die Construction der Reihe auf die vorhergehenden reduciren.

a_1 und $s_1 t_1$ bestimmen eine Doppelvier, in der ausserdem noch Ein Punktepaar $s_3 t_3$ auftritt (Satz XX); ebenso sind a_1, $s_2 t_2$, $s_4 t_4$ in einer Doppelvier enthalten. Den Punkt s_3 kann man z. B. nach den Gleichungen construiren:

$$-1 = (a_1 t_1 s_1 r_3),$$
$$-1 = (s_1 t_1 r_3 s_3),$$

welche unter Beseitigung von r_3 die Gleichung

$$-2 = (a_1 s_3 t_1 s_1)$$

(Satz XX) ergeben. Bekanntlich bilden dann $s_1 s_3$, $s_2 s_4$ eine Involution A, deren Doppelpunkte $a_2 a_3$ sind.

XXVI. *Ist eine Reihe harmonischer Mittel zweiter Ordnung durch einen Doppelpunkt* $\mathfrak{a}_1$ *und zwei Punktepaare* $\mathfrak{s}_1 \mathfrak{t}_1$ *und* $\mathfrak{s}_2 \mathfrak{t}_2$ *gegeben, so bestimme die Punkte* $\mathfrak{s}_3$ *und* $\mathfrak{s}_4$, *welche in der Doppelvier* $\mathfrak{a}_1$ *und* $\mathfrak{s}_1 \mathfrak{t}_1$ *resp.* $\mathfrak{a}_1$ *und* $\mathfrak{s}_2 \mathfrak{t}_2$ *noch vorkommen nach den Gleichungen*

$$-1 = (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{t}_1 \mathfrak{s}_1 \mathfrak{r}_3), \quad -1 = (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{t}_2 \mathfrak{s}_2 \mathfrak{r}_4)$$
$$-1 = (\mathfrak{s}_1 \mathfrak{t}_1 \mathfrak{r}_3 \mathfrak{s}_3), \quad -1 = (\mathfrak{s}_2 \mathfrak{t}_2 \mathfrak{r}_4 \mathfrak{s}_4).$$

Die Involution $\mathfrak{A}$, *gebildet aus* $\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_3$ *und* $\mathfrak{s}_2 \mathfrak{s}_4$, *hat zwei (reelle oder imaginäre) Asymptotenpunkte* $\mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3$, *welche die beiden andern Doppelpunkte der Reihe sind. Hierdurch ist die Construction der Reihe auf die früheren Sätze zurückgeführt.*

Wir wollen noch bemerken, dass eine Doppelvier $s_5 t_5$, $s_6 t_6$, $s_7 t_7$, $s_8 t_8$ stets zwei Punkte $a_2 a_3$ liefert, wenn wir noch a_1 als gegeben annehmen. Mit der Aenderung von a_1 und unter Beibehaltung der Doppelvier ändern sich auch $a_2 a_3$. Solche drei Punkte $a_1 a_2 a_3$ haben aber die Eigenthümlichkeit, dass, wenn man z. B. vermittelst der Doppelvier und a_2 operirt, man dieselben Punkte $a_1 a_3$ wiedererhält, weil die Reihe eben durch die gegebenen Elemente bestimmt ist. Es sind also $a_1 a_2 a_3$ conjugirte Punkte einer Involution dritten Grades.

Tritt vielleicht der Fall ein, dass, wenn a_1 die Punktreihe $\mathfrak{G}$ durchläuft, die Punkte $a_2 a_3$ zusammenfallen? Es müsste dann, wenn wir $a_2 = a_3 = a$ annehmen, die aus $s_5 t_5$ und $a_1 a_2$ gebildete Doppelvier ein Paar Punkte $a t_1$ aufweisen und es wäre nach Satz XX

$$(s_5 t_5 a a_1) = -2,$$

ebenso

$$(s_6 t_6 a a_1) = -2,$$

weil die Reihe durch die Doppelvier und durch a_1 bestimmt ist. Daraus folgt dann

$$(s_5 t_5 s_6 a_1) = -2\ (s_5 t_5 s_6 a),$$
$$(s_6 t_6 s_5 a_1) = -2\ (s_6 t_6 s_5 a),$$

und endlich

$$(s_5 s_6 t_5 t_6) = \{1 + 2\ (s_6 t_6 s_5 a)\} . \{1 + 2\ (s_5 t_5 s_6 a)\}.$$

Vergleichen wir dies mit Formel 7 Satz XI, so ergiebt sich, dass a sowohl mit s_7 als auch mit s_8 identisch sein kann. Viermal können daher die Punkte $a_2 a_3$ zusammenfallen und zwar an den Stellen $s_5 s_6 s_7 s_8$. Die Richtigkeit der eben gekennzeichneten Verhältnisse erhellt auch daraus, dass (XXI) die beiden Involutionen A (mit den Asymptotenpunkten $a_2 a_3$) und J (mit den Asymptoten $i i'$) nicht nur zugleich parabolisch werden, sondern dann auch die vier Punkte $a_2 a_3 i i'$ in a auf einander fallen. Von zwei Punkten s und s' eines Paares harmonischer Mittel zweiter Ordnung liegt dann stets der eine in a; sonst gehört jedem Punkte s von $\mathfrak{S}$ je Ein Punkt t von $\mathfrak{S}$ zu, s und t beschreiben zwei projectivische Punktreihen; nur der Punkt a hat jeden Punkt t von $\mathfrak{S}$ zum Pol.

Jedem der vier, nun bestimmten Punkte a entspricht aber, wenn wir immer dieselbe Doppelvier festhalten, je ein einziger Punkt a_1. Nennen wir diese vier, den Punkten $s_5 s_6 s_7 s_8$ resp. zugehörende Punkte a_1 nun $b_5 b_6 b_7 b_8$, so haben wir etwa

$$1) \qquad \begin{cases} (s_5 t_5 s_7 b_7) = -2, \\ (s_6 t_6 s_7 b_7) = -2, \\ (s_8 t_8 s_7 b_7) = -2, \end{cases}$$

oder wegen

$$(s_5 t_5 s_7 b_7) = (t_6 s_6 b_7 s_7)$$

die Involution

$$2) \qquad s_5 t_6, \; s_6 t_5, \; s_6 b_7, \; s_8 b_8,$$

und noch fünf andere, durch Vertauschung der Indices zu erhaltende. Hierdurch sind die vier Punkte b vollständig bestimmt.

Die Punkte b sind noch, von einer andern Seite betrachtet, interessant. Analog dem Verfahren von vorhin finden wir aus den Gleichungen

$$(t_5 s_5 a_1 a) = -2,$$
$$(t_6 s_6 a_1 a) = -2$$

die Gleichung

$$(t_5 t_6 s_5 s_6) = \{1 + 2(t_6 s_6 t_5 a_1)\}.\{1 + 2(t_5 s_5 t_6 a_1)\}.$$

Denken wir uns in der Doppelvier die Punkte s_5 und t_5, ebenso s_6 und t_6 gegen einander vertauscht, so giebt Formel 7, Satz XI:

$$(t_5 t_6 s_5 s_6) = \{1 + 2(s_5 t_5 S_7 t_6)\}.\{1 + 2(s_6 t_6 S_7 t_5)\},$$
$$(t_5 t_6 s_5 s_6) = \{1 + 2(s_5 t_5 S_8 t_6)\}.\{1 + 2(s_6 t_6 S_8 t_5)\}:$$

Es folgt daraus, dass a_1 d. h. b_7 und b_8 mit S_7 und S_8 identisch sind. Auch ergiebt sich dann nach Satz XI die Involution

$$3) \qquad t_5 t_6, \; s_5 s_6, \; b_7 b_8$$

und noch fünf andere, durch Vertauschung der Indices zu erhaltende.

XXVII. *Vertauscht man in einer Doppelvier* $s_5 t_5$, $s_6 t_6$, $s_7 t_7$, $s_8 t_8$ *die Punkte* t *mit ihren zugehörenden Punkten* s *dergestalt, dass z. B.* s_5 *ein* t-*Punkt,* t_5 *sein entsprechender* s-*Punkt wird, so kann man aus den so gebildeten*

Punktepaaren sechs Doppelvieren construiren. Die s-*Punkte derselben sind (abgesehen von den Punkten* $t_5 t_6 t_7 t_8$*) noch vier andere Punkte* $b_5 b_6 b_7 b_8$, *indem derselbe Punkt z. B.* b_5 *in den drei Doppelvieren wiederkehrt, in welchen das Paar* $s_5 t_5$ *nicht vorkommt.*

XXVIII. *Die Tripel der Doppelpunkte* $a_1 a_2 a_3$ *aller Reihen harmonischer Mittel zweiter Ordnung, welche eine Doppelvier* ($s_5 t_5$, $s_6 t_6$, $s_7 t_7$, $s_8 t_8$) *gemeinsam haben, bilden eine Involution dritter Ordnung. Die Construction derselben lässt sich nach Satz XXVI ausführen. In der Involution stellen* $s_5 s_6 s_7 s_8$ *die vier Punkte vor, in denen zwei conjugirte Punkte* a *derselben zusammenfallen; die vier dritten conjugirten Punkte sind die Punkte* $b_5 b_6 b_7 b_8$ *des vorigen Satzes.*

Wir verfolgen diese noch viel versprechenden Betrachtungen zunächst nicht weiter, wollen vielmehr noch eine Specialisirung vornehmen, nämlich diejenige des Satzes XIII:

$$t_5 = t_6 = s_7 = s_8 = t,\ t_7 = t_8 = u,\ s_5 = s,\ s_6 = s'.$$
$$(tuss') = -1.$$

Es sind also ss' die harmonischen Mittel zweiter Ordnung von t, und u der Pol von t. Die Involutionen 2) ergeben, dass b_7 und b_8 unbestimmt werden, dass dagegen b_5 und b_6 mit ss' zugleich reell oder imaginär sind. Aus Involution 4):

$$t_7 t_8,\ s_7 s_8,\ b_5 b_6$$

erhalten wir die Involution

$$uu,\ tt,\ b_5 b_6,$$

d. h.

$$(tub_5 b_6) = -1.$$

XXIX. *Zerfällt die im Satze XXVIII besprochene Doppelvier in einen Punkt* t, *in seine beiden harmonischen Mittel zweiter Ordnung* ss' *und in den Pol* u *von* t *(Satz XIII), so werden von den dort behandelten Punkten* b *zwei unbestimmt, die beiden andern,* s *und* s' *entsprechenden Punkte* b *resp.* b' *sind mit* ss' *gleichzeitig reell oder imaginär, liegen zu* tu *harmonisch und sind bestimmt durch die Gleichungen*

$$(tusb) = -2;\ (tus'b') = -2.$$

Bildet die specialisirte Doppelvier einen Bestandtheil einer Reihe harmonischer Mittel zweiter Ordnung, von welcher zwei Doppelpunkte mit s *oder* s' *zusammenfallen, so ist* b *resp.* b' *der dritte Doppelpunkt.*

Strassburg (Elsass), den 13. Juli 1883.

II.

Ueber die eindeutige Beziehung von Räumen mittelst projectiver Ebenenbüschel und ihre Anwendung auf Constructionsaufgaben.

Von

FRANZ FREIHERRN VON KRIEG

in Strassburg.

Lithogr. Tafel Fig. 4—7.

Einleitung.

Obwohl bereits die allgemeine ein-eindeutige cubische Verwandtschaft synthetisch und analytisch untersucht worden ist, und viele Specialfälle derselben wenigstens mit ihren Transformationsformeln und einigen wesentlichen Eigenschaften gegeben worden sind*, so haben diese doch noch keine nennenswerthe constructive Anwendung gefunden; es möge mir daher diesmal erlaubt sein zu zeigen, wie gerade die speciellsten cubischen Verwandtschaften wegen ihrer ausserordentlichen Einfachheit und Uebersichtlichkeit insbesondere zu Constructionsaufgaben von Raumcurven dritter** und vierter Ordnung zweiter Art und Flächen zweiter und dritter Ordnung aus gegebenen Stücken sehr geeignet sind. Diese Constructionsaufgaben lösen sich immer in der Weise, dass sie auf bekannte oder wenigstens bekanntere algebraische Probleme zurückgeführt werden.*** August† hat gezeigt, wie die Fläche dritter Ordnung durch duploprojectivische Beziehung als Bild einer Ebene aufgefasst werden kann. Es kommt dies geometrisch darauf hinaus, dass man beliebig gelegene drei Paar Ebenenbüschel nimmt und jedes Paar projectiv in sich bezieht.††

Nenne ich die Ebenenbüschel nach den Axen $s_1 s'_1$, $s_2 s'_2$, $s_3 s'_3$, so soll $s_1 \barwedge s'_1$, $s_2 \barwedge s'_2$, $s_3 \barwedge s'_3$ sein. Durchläuft der Schnittpunkt dreier

* Noether, Mathem. Annalen, Bd. 3, eindeutige Raumtransformationen. Cremona, Theorie der Oberflächen.

** Vergl. Sturm's Untersuchungen über Raumcurven dritter Ordnung. Crelle, Bd. 80.

*** Wegen der Zahl der Lösungen verweise ich auf Schubert's „Abzählende Geometrie".

† August, Disquisitiones de superficiebus tertii ordinis, Berolini 1862.

†† Sturm, Flächen dritter Ordnung, pag. 44. Lpz. 1867.

Ebenen von $s_1 s_2 s_3$ eine Ebene, so beschreibt der Schnittpunkt der drei entsprechenden Ebenen, welche durch $s'_1 s'_2 s'_3$ gehen, eine Fläche dritter Ordnung. August studirt nun die Fläche dritter Ordnung mit Hilfe dieser Abbildung, die er sich mit seiner Duploprojectivität herstellt.

Doch ist die räumliche Verwandtschaft, die durch diese Abbildung gegeben ist, noch kaum eingehend studirt worden*, und es ist dies vielleicht darin zu suchen, dass auch diese Verwandtschaft wegen ihrer Complicirtheit noch keine besondere Verwendung finden konnte. Ich werde daher auch nicht lange bei dieser allgemeinen Verwandtschaft, welche die Willkürlichkeit der Axen der Ebenenbüschel voraussetzt, selbst verweilen, da insbesondere durch das Auftreten von Raumcurven dritter Ordnung, die eine besonders singuläre Rolle spielen, nur fern liegende Probleme ihre Lösung finden können.

Vielmehr will ich nur vier Specialfälle einer näheren Untersuchung unterziehen und diese diesmal nur zu Constructionsaufgaben verwenden. Es wird sich aber im Laufe der Untersuchung recht deutlich zeigen, wie diese speciellen Verwandtschaften recht fruchtbar zu Untersuchungen von Curven- und Flächensystemen zu verwenden wären.

Capitel I.

Die Verwandtschaft.

§ 1.

Nach anfänglichen Auseinandersetzungen habe ich somit drei Paar Ebenenbüschel, welche nach ihren beliebig gelegenen Axen $s_1 s'_1$, $s_2 s'_2$, $s_3 s'_3$ heissen mögen, zu nehmen und $s_1 \barwedge s'_1$, $s_2 \barwedge s'_2$, $s_3 \barwedge s'_3$ zu setzen.

Die Ebenenbüschel $s_1 s_2 s_3 (s'_1 s'_2 s'_3)$ denke ich mir im Raume $\Sigma(\Sigma')$ und die Punkte dieses Raumes von ihnen projicirt. Entsprechende Punkte werden dann von entsprechenden Ebenen projicirt.

Wenn nun ein Punkt des Raumes Σ eine Gerade durchläuft, so werden $s_1 s_2 s_3$, indem sie den laufenden Punkt zugleich projiciren, zu einander projectiv. Somit projiciren die entsprechenden Ebenen der drei Ebenenbüschel $s'_1 s'_2 s'_3$, da letztere zu einander projectiv sind, die Punkte einer Raumcurve dritter Ordnung. Dabei treten $s'_1 s'_2 s'_3$ als Sehnen der Raumcurve auf.

Ich kann somit sagen:

Einer Geraden des Raumes $\Sigma(\Sigma')$ entspricht in $\Sigma'(\Sigma)$ eine Raumcurve dritter Ordnung, die die Axen $s_1 s_2 s_3 (s'_1 s'_2 s'_3)$ zu Sehnen hat.

---

* Siehe Noether, Mathem. Annalen, Bd. 3, Eindeutige Raumtransformation.

Wenn nun der Schnittpunkt von drei beweglichen Ebenen von $s_1 s_2 s_3 (s'_1 s'_2 s'_3)$ in $\Sigma (\Sigma')$ eine Fläche n^{ter} Ordnung durchläuft, so durchläuft der Schnittpunkt der drei entsprechenden Ebenen durch $s'_1 s'_2 s'_3 (s_1 s_2 s_3)$ in $\Sigma' (\Sigma)$ eine Fläche von einer sogleich zu bestimmenden Ordnung. Eine beliebige Gerade in $\Sigma' (\Sigma)$ schneidet sie in so viel Punkten, als die Raumcurve dritter Ordnung in $\Sigma (\Sigma')$, die der beliebigen Geraden entspricht, die Fläche n^{ter} Ordnung schneidet. Das Bild der Fläche n^{ter} Ordnung ist somit von der Ordnung $3n$. Ferner sehen wir, wenn wir eine Gerade a betrachten, welche der Schnitt einer Ebene α von s_i mit einer Ebene E ist, dass dieser Geraden im andern Raume der Schnitt einer Ebene durch s'_i mit einem Hyperboloide entspricht. Lassen wir nun α alle Lagen annehmen, so beschreibt a ein Strahlenbüschel, somit die ganze Ebene, und diesen Geraden entsprechen dann die Schnitte homologer Elemente eines Ebenenbüschels s_i und eines Hyperboloidbüschels, die zu einander projectiv sind, wie leicht zu ersehen ist.*

Wir können somit sagen:

Den Punkten einer Fläche n^{ter} Ordnung entsprechen im andern Raume im Allgemeinen die Punkte einer Fläche $3n^{\text{ter}}$ Ordnung.

Wenn wir das Bild einer beliebig gegebenen Curve n^{ter} Ordnung mit einer Ebene zum Durchschnitt bringen, so entsprechen diesen Schnittpunkten diejenigen einer Fläche dritter Ordnung mit der gegebenen Curve n^{ter} Ordnung. Und da die Algebra lehrt, dass letztere $3n$ Schnittpunkte besitzen, so wollen wir sagen:

Jeder Curve n^{ter} Ordnung entspricht im andern Raume eine von der Ordnung $3n$.

Dies natürlich auch nur im Allgemeinen, und es wird eine Hauptaufgabe sein, die Ausnahmen zu untersuchen.

Betrachten wir jetzt die Regelschaar, von welcher $s_1 s_2 s_3$ Leitlinien sind, so sehen wir, dass den einzelnen Geraden dieser Regelschaar die Punkte einer Raumcurve dritter Ordnung entsprechen, die wir die Hauptcurve des Raumes $\Sigma' (H'_3)$ nennen, und die $s'_1 s'_2 s'_3$ zu Sehnen hat. Desgleichen entsprechen den einzelnen Geraden der Regelschaar, von welcher $s'_1 s'_2 s'_3$ Leitlinien sind, die Punkte einer Raumcurve dritter Ordnung (H_3), (Hauptcurve des Raumes Σ), die die Axen $s_1 s_2 s_3$ zu Sehnen hat.

Ferner ist eben so leicht ersichtlich, dass den Punkten von $s_1 s_2 s_3 (s'_1 s'_2 s'_3)$ im andern Raume Gerade entsprechen. Z. B. entsprechen den Punkten von s_1 die Transversalen von $s'_2 s'_3 (H'_3)$ u. s. w.

---

* August, Disquisitiones ...

Wir können daher sagen:

Jeder der Räume Σ und Σ' besitzt je drei Gerade und eine Raumcurve dritter Ordnung (Hauptcurve des Raumes), deren Punkten im andern Raume Gerade entsprechen.

Durch $s_1 s_2 s_3 (s'_1 s'_2 s'_3)$ ist eine Regelschaar bestimmt, zu der auch $s_1 s_2 s_3 (s'_1 s'_2 s'_3)$ gehören. Jeder Geraden dieser Regelschaar entspricht im andern Raume die Hauptcurve desselben punktweise.

Wir sagen daher:

In jedem der Räume Σ und Σ' befindet sich eine Regelschaar, deren Geraden den Punkten der Hauptcurve des andern Raumes entsprechen.

Wir wollen nun nach dem Bilde einer Curve n^{ter} Ordnung fragen, die mit den Geraden $s_i (s'_i)$ und der in diesem Raume gelegenen Hauptcurve p Punkte gemein hat. Wir haben gesehen, dass jedem dieser Schnittpunkte im andern Raume eine Gerade entspricht — das heisst aber: „das Bild ist zerfallen in p Gerade und eine Curve $(3n - p)^{\text{ter}}$ Ordnung.“ Wir wollen zur leichteren Ausdrucksweise als eigentliches Bild einer Curve dasjenige bezeichnen, das dem Originale punktweise entspricht. Wenn einem Punkte einer Curve dem entgegengesetzt z. B. eine Gerade entspricht, so will ich die Gerade ein uneigentliches Bild vom Punkte nennen.

Mit dieser Bezeichnung ergiebt sich der Satz:

Einer Curve n^{ter} Ordnung, welche die Geraden $s_i (s'_i)$ und die zu diesem Raume gehörige Hauptcurve dritter Ordnung im Ganzen $p$mal schneidet, entspricht im andern Raume als eigentliches Bild eine Curve von der Ordnung $3n - p$.

Betrachten wir schliesslich noch die drei Hyperboloide, die als Erzeugniss der drei Paar projectivischen Ebenenbüschel $s_1 s'_1$, $s_2 s'_2$, $s_3 s'_3$ sich ergeben, so durchdringen sich diese in acht Punkten. Durch jeden derselben gehen drei Ebenen von $s_1 s_2 s_3$ und drei Ebenen durch $s'_1 s'_2 s'_3$, die jenen entsprechen.

Daher gilt der Satz:

Unsere Verwandtschaft besitzt im Allgemeinen acht sich selbst entsprechende Punkte.

Im „Allgemeinen“, weil in speciellen Fällen es sich gestalten kann, dass eine Gerade, ein Kegelschnitt oder auch eine Raumcurve dritter Ordnung sich punktweise selbst entspricht. Wir brauchen z. B. nur drei Punkte einer Geraden als sich selbst entsprechende Punkte zu fixiren, damit sich schon alle Punkte der Geraden entsprechen.

Ich bemerke endlich noch, dass die Verwandtschaft festgelegt ist, wenn die drei Axen jedes Raumes und drei Punkte mit ihren entsprechenden gegeben sind. Denn damit ist die Projectivität der drei Paar Ebenenbüschel fixirt.

§ 2.

Allgemeines über die Specialfälle.

Wir gehen nun zu Specialfällen über und werden während ihrer Untersuchung zeigen, wie dieselben ein einheitliches Princip zur Reduction einer grossen Zahl von Constructionen der Raumcurve dritter Ordnung aus gegebenen Stücken auf einfachere algebraische Probleme bilden.* Aehnliches gilt bei Constructionen der Fläche dritter Ordnung, wenn auch nicht in derselben Ausdehnung. Auch die geradlinige Fläche zweiter Ordnung lässt sich unter gewissen Bedingungen, denen man meines Wissens noch nicht gerecht werden konnte, construiren. Schliesslich möchte ich die gegebenen Constructionen von rationalen Raumcurven vierter Ordnung und Kegelschnitten im Raume erwähnen.

Vor Allem wollen wir zeigen, dass unsere Verwandtschaft die Collineation als Specialfall in sich enthält. Wir brauchen in der That nur den Transversalen von $s_1 s_2 s_3$ die Transversalen von $s'_1 s'_2 s'_3$ projectiv zuzuweisen, damit dieser Fall sich ergebe. Dasselbe erreichen wir, wenn wir $s_1 s_2 s_3$ und auch $s'_1 s'_2 s'_3$ in Ebenen legen, die sich entsprechen sollen.

Capitel II.

Erster Specialfall.

§ 3.

Zu einem zu Constructionen recht brauchbaren Specialfall gelangen wir, wenn wir die drei Axen des einen Raumes $\Sigma : s_1 s_2 s_3$ in eine Ebene legen, die drei Axen des andern Raumes $\Sigma' : s'_1 s'_2 s'_3$ jedoch windschief lassen. Es ist leicht zu sehen, dass in dem Raume Σ, wo alle Axen sich schneiden, eine Raumcurve dritter Ordnung, deren Punkten die Transversalen von $s'_1 s'_2 s'_3$ entsprechen, die also Hauptcurve (H_3) ist, auftritt. Diese Raumcurve geht, da sie durch die projectiven Ebenenbüschel $s_1 s_2 s_3$ erzeugt wird, durch die drei Schnittpunkte der Axen (s. lithogr. Tafel Fig. 4). Dabei soll der Schnittpunkt von $s_1 s_2$ H_3, der von $s_1 s_3$ H_2 und schliesslich der von $s_2 s_3$ H_1 heissen. Im Raume Σ' giebt es statt der Hauptcurve einen ausgezeichneten Punkt H', den wir Hauptpunkt des Raumes Σ' nennen wollen, während $H_1 H_2 H_3$ die Hauptpunkte von Σ heissen sollen. H' entspricht allen Punkten der Ebene $s_1 s_2 s_3$.

Jeder Geraden des Raumes Σ entspricht eine Raumcurve dritter Ordnung, die aber stets durch H' gehen und die drei Geraden $s'_1 s'_2 s'_3$ zu Sehnen haben wird.

---

* Man vergleiche Sturm's Untersuchungen über Raumcurven dritter Ordnung. Crelle, Bd. 79 u. 80, ferner Schröter's Flächen zweiter Ordnung, Leipzig 1880.

Und umgekehrt:

Jeder Raumcurve dritter Ordnung, die durch H' geht und $s'_1 s'_2 s'_3$ zu Sehnen hat, entspricht in Σ eine Gerade.* Denn das Erzeugniss dreier projectiver Ebenenbüschel, die eine Ebene entsprechend gemein haben, ist eine Gerade. Es lassen sich mit diesen Bemerkungen mit Hilfe dieses Specialfalles der Verwandtschaft im Raume Σ' bereits Constructionen von Raumcurven dritter Ordnung ausführen, die aber immer, da wir sie als Bilder der Geraden des Raumes Σ ansehen wollen, drei Sehnen $s'_1 s'_2 s'_3$ und einen Punkt H' mit einander gemein haben. Das heisst, wir können, indem wir die Raumcurve dritter Ordnung als das Bild von einer Geraden auffassen, in den einzelnen verschiedenen Specialfällen der Verwandtschaft nur immer Raumcurven dritter Ordnung, die einem entsprechenden vierstufigen System angehören, construiren. Es ist damit sichtbar, wie jeder Specialfall unserer Verwandtschaft zum Studium der auftretenden Systeme von Raumcurven und Flächen dritter Ordnung einladet; wir wollen aber diesmal uns mit diesem Hinweis begnügen, um dem Titel der Arbeit gerecht zu werden.

§ 4.

Constructionen von Raumcurven dritter Ordnung mittels des ersten Specialfalles.

Um den gegebenen Specialfall zu Constructionen von Raumcurven dritter Ordnung, von denen stets die Sehnen $s'_1 s'_2 s'_3$ und der Punkt H' gegeben sein sollen, in Anwendung zu bringen, wollen wir für alle diese Constructionen uns einen Raum Σ' construiren, der $s'_1 s'_2 s'_3$ zu Axen und H' als Hauptpunkt hat. Die Construction des Raumes Σ bleibt in unserm Belieben, nur müssen sich die Axen dieses Raumes in drei beliebigen Punkten $H_1 H_2 H_3$ schneiden. Den Ebenen $s_1 H_1$, $s_2 H_2$, $s_3 H_3$, die hier in einer Ebene vereinigt liegen, haben die Ebenen $s'_1 H'$, $s'_2 H'$, $s'_3 H'$ zu entsprechen. Nun kann man noch immer irgend zwei beliebigen Punkten von Σ zwei beliebige Punkte von Σ' als entsprechende zuweisen, damit die Projectivität der drei Paar Ebenenbüschel vollkommen bestimmt ist. Wir wollen zur Einfachheit jede Raumcurve dritter Ordnung, die $s'_1 s'_2 s'_3$ zu Sehnen hat und durch H' geht, mit dem Symbol $C'_3(s'_1 s'_2 s'_3 H')$ bezeichnen. Wird eine solche Curve durch weitere Bedingungen bestimmt, so wollen wir diese noch in die Klammer setzen. Wir bezeichnen einen Punkt, durch welchen die Curve noch gehen soll, mit P', oder wenn es noch mehrere sein sollen, mit $P'_1 P'_2 \ldots$, Sehnen, die die Curve noch besitzen

* Die Umkehrungen dieser Sätze, die sich stets leicht ergeben, sind für uns darum wichtig, weil sie den Beweis enthalten, dass die folgenden Constructionen alle Lösungen erschöpfen.

soll, mit $s's^*$. Wenn die Raumcurve dritter Ordnung gegebene Secanten† besitzen soll, so werden wir diese mit $l'_1 l'_2 l'_3 \dots$ bezeichnen. Eine einfache Berührungsebene soll mit π', eine Osculationsebene mit π'^2 bezeichnet werden. Wenn die Osculation im Punkte P' erfolgen soll, so soll dies durch $\overline{\pi'^2 P'}$ ausgedrückt werden. Wenn die Berührung von π' in einer Geraden l' oder in einem bestimmten Punkte P' stattfinden soll, so will ich dies mit $\overline{\pi' l'}$, $\overline{\pi' P'}$ ausdrücken. Eine Tangente soll mit b', der Berührungspunkt mit B' gegeben sein. Die Bilder dieser bestimmenden Stücke wollen wir mit den gleichen Buchstaben, aber ohne Accent bezeichnen. Die Constructionen wollen wir nur skizziren, da dieselben sich aus der Verwandtschaft unmittelbar ergeben. Dabei werden wir auch meist voraussetzen, dass die gegebenen Stücke bereits in den andern Raum transformirt worden sind.

Die Construction der Raumcurve dritter Ordnung $C'_3(s'_1 s'_2 s'_3 H' l'_1 l'_2 P')$ reducirt sich auf die der gemeinschaftlichen Strahlen der beiden Kegel dritter Ordnung, die im Punkte P ihren Scheitel und $l_1 l_2$ zu Leitlinien haben. Dabei sind drei Strahlen auszuschliessen, die von P zu den Hauptpunkten des Raumes Σ gehen, denn diese Strahlen liefern Bilder, die keine eigentlichen Raumcurven dritter Ordnung sind.

Die Construction der Raumcurve dritter Ordnung $C'_3(s'_1 s'_2 s'_3 H' s' l'_1 l'_2)$ besteht, nachdem wir $s' l'_1 l'_2$ nach Σ transformirt haben, in dem Aufsuchen der Sehnen von s, welche mit l_1 und l_2 je einen von $H_1 H_2 H_3$ verschiedenen Punkt gemein haben. Die Bilder dieser Geraden geben die Lösungen der Aufgabe.

Die Construction der Raumcurve dritter Ordnung $C'_3(s'_1 s'_2 s'_3 H' P' l' \pi')$ wird auf die der Geraden zurückgeführt, die durch P gehen, die Fläche dritter Ordnung π berühren und die Raumcurve dritter Ordnung l einfach schneiden.

Da die Flächen dritter Ordnung, die den Ebenen des Raumes Σ' entsprechen, in $H_1 H_2 H_3$ Doppelpunkte haben, wie wir noch sehen werden, so haben wir die Geraden, die von P an die Hauptpunkte $H_1 H_2 H_3$ gehen, doppelt gezählt zum Abzug zu bringen. Wir haben somit nur zwölf Lösungen.

Die Construction der Raumcurve dritter Ordnung $C'_3(s'_1 s'_2 s'_3 H' l' \pi' s')$ wird zurückgeführt auf die Aufgabe, Sehnen von s zu suchen, die l schneiden und π berühren. Die Bilder dieser Geraden lösen die Aufgabe.

Die Construction der Raumcurve dritter Ordnung $C'_3(s'_1 s'_2 s'_3 H' P' \pi'_1 \pi'_2)$ reducirt sich auf die Aufgabe, Gerade zu finden, die durch P gehen und $\pi_1 \pi_2$ berühren. Allein die Geraden, die von P zu $H_1 H_2 H_3$ gehen, sind Doppelgerade für jeden der beiden Tangentenkegel von P zu π_1 und π_2 und keine eigentlichen Tangenten der Flächen, daher haben diese keine Lösungen zu ihren Bildern. Da in diesen drei Geraden zwölf Schnittlinien der beiden Tangentialkegel vereinigt liegen, so ist die Zahl der Lösungen 24.

---

† Secante nennen wir eine Gerade, die eine Raumcurve nur einmal schneidet.

Die Construction der Raumcurve dritter Ordnung $C'_3(s'_1 s'_2 s'_3 H' s' \pi'_1 \pi'_2)$ reducirt sich auf die Auffindung der Sehnen von s, die die Flächen dritter Ordnung $\pi_1 \pi_2$ berühren. Die Bilder dieser Geraden lösen die Aufgabe.

Die Construction der Raumcurve dritter Ordnung $C'_3(s'_1 s'_2 s'_3 H' P' \pi^{2\prime})$ reducirt sich auf die Construction der Haupttangenten von π, die durch P gehen. Es giebt deren bekanntlich sechs und diese lösen mit ihren Bildern die Aufgabe.

Die Construction der Raumcurve dritter Ordnung $C'_3(s'_1 s'_2 s'_3 H' P' \overline{\pi' l'})$ wird auf die Auffindung der Geraden durch P reducirt, welche π in einem Punkte von l berühren; π geht durch l.

Die Construction der Raumcurve dritter Ordnung $C'_3(s'_1 s'_2 s'_3 H' \overline{b' B'})$ reducirt sich auf die des Bildes der Tangente von b in B.

Die Construction der Raumcurve dritter Ordnung $C'_3(s'_1 s'_2 s'_3 H' b' l')$ reducirt sich auf das Aufsuchen jener Tangenten von b, die von der Raumcurve dritter Ordnung l geschnitten werden. Die Aufgabe wird um drei Einheiten reducirt, da die Tangenten von b, die $H_1 H_2 H_3$ zu Berührungspunkten haben, keine Lösungen geben.

Die Construction der Raumcurve dritter Ordnung $C'_3(s'_1 s'_2 s'_3 \overline{\pi' \mathsf{P}'} l')$ reducirt sich auf das Auffinden der drei Geraden, die π im Punkte P berühren und l schneiden. Somit haben wir drei Lösungen.

Die Construction der Raumcurve dritter Ordnung $C'_3(s'_1 s'_2 s'_3 H' \overline{\pi'^2 P'})$ reducirt sich auf das Auffinden der Haupttangenten der Fläche π im Punkte P.

Zu anderen interessanten Constructionen der Raumcurve dritter Ordnung wird man geführt, wenn man sich fragt, was in diesem Specialfall der Verwandtschaft den einzelnen Punkten der Axen $s'_1 s'_2 s'_3$ entspricht. Wir sehen sofort, dass hier statt der früheren Geraden von Regelflächen zweiten Grades die Geraden von Kegeln auftreten, die ihre Scheitel in $H_1 H_2 H_3$ haben.

Wir können somit sagen:

Den Punkten der Axen $s'_1 s'_2 s'_3$ des Raumes Σ' entsprechen die Strahlen der Kegel mit den Scheiteln $H_1 H_2 H_3$ in Σ, die die Hauptcurve zur Leitlinie haben.

Damit sind wir nun in die Lage gesetzt, eine Raumcurve dritter Ordnung als das Bild einer Geraden des Raumes Σ zu construiren, die eine oder mehrere der Axen $s'_1 s'_2 s'_3$ zu Tangenten hat. Z. B. jede Tangente des Kegels, welcher die Hauptcurve projicirt und H_1 zum Scheitel hat, wird zum Bilde eine Raumcurve dritter Ordnung haben, die s'_1 zur Tangente, $s'_2 s'_3$ zu Sehnen hat, und die schliesslich noch durch H' gehen wird.

Damit lösen sich unter andern die Aufgaben:

Es ist eine Raumcurve dritter Ordnung zu construiren, wenn von derselben zwei Punkte, zwei Sehnen, eine Tangente und eine sie schneidende

Gerade gegeben ist. Es zerfällt hier, wie leicht zu ersehen, die Aufgabe vierten Grades in zwei des zweiten.

Oder auch:

Es sind von einer Raumcurve dritter Ordnung eine Sehne, zwei Tangenten und zwei Punkte gegeben. Es ist die Raumcurve dritter Ordnung zu construiren. Die Aufgabe vierten Grades zerfällt in zwei vom zweiten und besteht in der Construction der beiden Paare von Tangentialebenen, die von einem Punkte an zwei der oben erwähnten Kegel zweiten Grades gehen.

Durch weitere Combination von Bedingungen ergeben sich weitere Aufgaben, die dem Leser überlassen bleiben.

§ 5.

Weitere den ersten Specialfall betreffende Sätze. Verwendung derselben zu Constructionen von rationalen Raumcurven vierter Ordnung.

Nachdem wir gezeigt haben, dass man mit diesem Specialfall, ohne ihn genauer erörtert zu haben, so manche Construction von Raumcurven dritter Ordnung ausführen kann, wollen wir zum weiteren Studium desselben übergehen.

Betrachten wir die Punkte einer Geraden des Raumes Σ', die durch H' geht, so sehen wir, dass den drei Ebenen der Ebenenbüschel $s'_1 s'_2 s'_3$, die durch H' gehen, drei zusammenfallende Ebenen der Ebenenbüschel $s_1 s_2 s_3$ entsprechen.

Wir schliessen daraus:

Einer Geraden des Raumes Σ', die durch H' geht, entspricht eine Gerade des Raumes Σ, die eine Sehne der Hauptcurve (H_3) des Raumes Σ ist.

Da dem Punkte H' die ganze Ebene $s_1 s_2 s_3$ entspricht, so wird einer Ebene E' durch H' als eigentliches Bild nur eine Fläche zweiter Ordnung E entsprechen können.

Es ergiebt sich somit der Satz:

Einem Strahlenbüschel des Raumes Σ', mit dem Scheitel H', entspricht im Raume Σ eine Regelschaar, auf welcher die Hauptcurve (H_3) liegt.

Wir können durch H' zu den Axen $s'_1 s'_2 s'_3$ drei Transversalen ziehen, die im Raume Σ' eine Rolle spielen. Wir bezeichnen die Transversale zu $s'_1 s'_2$ mit t'_3, die zu $s'_1 s'_3$ mit t'_2 und schliesslich die zu $s'_2 s'_3$ mit t'_1 (s. lithogr. Tafel Fig. 4). Jede dieser Transversalen ist der Schnitt zweier Ebenen von zwei der Ebenenbüschel $s'_1 s'_2 s'_3$, welche H' projiciren.

Daher ergiebt sich:

Der Transversalen t'_i und jedem ihrer Punkte entspricht die Axe s_i und umgekehrt.

Einem Hauptpunkte H_k entsprechen in Σ' die Punkte der Ebene, die H' mit s'_k verbindet. Daraus folgt:

Einer Ebene des Raumes Σ, die durch einen der Hauptpunkte H_k geht, entspricht eine Fläche zweiter Ordnung, die $s'_i s'_l$ enthält.

Letzteres ergiebt sich sofort bei Betrachtung der Kegel, die den Punkten der Axen $s'_1 s'_2 s'_3$ entsprechen.*

Da ein Kegelschnitt des Raumes Σ, der durch einen der Hauptpunkte H_k geht, als eigentliches Bild nur mehr eine rationale Raumcurve vierter Ordnung haben kann, da $t'_i t'_l$, als uneigentliche Bilder des Hauptpunktes H_k angesehen werden können, so haben wir es in der Hand, rationale Raumcurven vierter Ordnung zu construiren, die bestimmten Bedingungen unterliegen. So wird z. B. ein Kegelschnitt durch H_1 eine C'_4 liefern, die s'_1 zur Sehne oder Tangente, $s'_2 s'_3$ aber zu Doppelsehnen hat. Dies folgt aus den Schnittpunkten des Kegelschnitts mit den Kegeln, deren Strahlen den Punkten der Axen $s'_1 s'_2 s'_3$ entsprechen. Ferner wird die Raumcurve vierter Ordnung noch durch H' gehen müssen. Wollen wir also eine rationale Raumcurve vierter Ordnung construiren, die die Gerade s'_1 zur Sehne oder Tangente, $s'_2 s'_3$ zu Doppelsehnen hat und die durch den Punkt H' geht, so brauchen wir nur $s'_1 s'_2 s'_3$ zu Axen und H' zum Hauptpunkt eines Raumes Σ' zu machen. Die Axen des Raumes Σ unterliegen der einzigen Bedingung, in einer Ebene liegen zu müssen. Wir haben nur noch die weiteren Bestimmungsstücke, die die Raumcurve vierter Ordnung fixiren und der verschiedensten Art sein können, hinzuzufügen; z. B. könnte verlangt sein eine rationale Raumcurve vierter Ordnung zu construiren, wenn von ihr ausser den bekannten Bestimmungsstücken $s'_1 s'_2 s'_3$ und H' noch zwei Punkte und zwei Secanten gegeben sind. Oder: wenn von ihr eine Tangente s'_1, zwei Doppelsehnen $s'_2 s'_3$, zwei Punkte $H' P'$ und drei Secanten $l'_1 l'_2 l'_3$ gegeben sind. Im letzten Falle reducirt sich, wie leicht zu sehen, die Aufgabe auf die Construction eines Kegelschnitts, der in einer Tangentialebene des Kegels H_1 (H_3)** liegt, welche durch P geht. Die fünf bestimmenden Punkte des Kegelschnitts sind H_1 P und je ein Schnittpunkt der Raumcurven $l'_1 l'_2 l'_3$. Weitere Constructionen ergeben sich durch Combinationen von noch möglichen Bedingungen, die wir dem Leser überlassen.

---

* Dies ergiebt sich auch daraus, weil die zerfallene Fläche dritter Ordnung die drei Axen $s'_1 s'_2 s'_3$ enthalten muss.

** H_i (H_3) soll der Kegel sein, dessen Spitze H_i ist und der die singuläre Hauptcurve (H_3) projicirt.

Constructionen von rationalen Raumcurven vierter Ordnung, die nicht durch den Hauptpunkt H' gehen, ergeben sich, wenn man das Bild eines Kegelschnitts betrachtet, der zwei der Axen $s_1 s_2 s_3$ in irgend welchen zwei Punkten schneidet. Zu Früherem zurückkehrend, fragen wir nach dem Bilde einer beliebig gelegenen Ebene E' des Raumes Σ'. Die Ebene E' schneidet $s'_1 s'_2 s'_3$, $t'_1 t'_2 t'_3$ in sechs Punkten, denen Gerade entsprechen, von welchen je drei durch jeden der Punkte $H_1 H_2 H_3$ gehen.

Somit ergiebt sich:

Einer Ebene des Raumes Σ' entspricht eine Fläche dritter Ordnung mit drei Doppelpunkten in $H_1 H_2 H_3$.

Nach Früherem wissen wir auch, dass sie durch die Hauptcurve geht, denn die Transversalen von $s'_1 s'_2 s'_3$ schneiden E' in den Punkten eines Kegelschnittes, dessen Bild die Hauptcurve (H_3) ist.

Einer Ebene des Raumes Σ entspricht eine Fläche dritter Ordnung, die $s'_1 s'_2 s'_3$ enthält und H' zum Doppelpunkte hat.

Denn eine Ebene E des Raumes Σ schneidet $s_1 s_2 s_3$ in drei Punkten, denen die Transversalen $t'_1 t'_2 t'_3$ entsprechen, die dem Bilde E' von E angehören. Somit gehört der Schnittpunkt H' der drei Geraden $t'_1 t'_2 t'_3$ als Doppelpunkt der Fläche an. E wird ferner von den drei Kegeln H_1 (H_3), H_2 (H_3), H_3 (H_3) in Kegelschnitten geschnitten, denen als eigentliche Bilder die Axen $s'_1 s'_2 s'_3$ entsprechen.

Einer Fläche dritter Ordnung, die $s'_1 s'_2 s'_3$ enthält, und H' zum Doppelpunkte hat, entspricht in Σ eine Ebene.

Denn einer Fläche dritter Ordnung in Σ' entspricht im Allgemeinen in Σ eine Fläche neunter Ordnung. In unserem Falle zerfällt die Fläche neunter Ordnung in die drei Kegel H_1 (H_3), H_2 (H_3), H_3 (H_3) und die Doppelebene $H_1 H_2 H_3$ und in das eigentliche Bild der Fläche dritter Ordnung, welches als Rest nur mehr eine Ebene sein kann.

§ 6.

Constructionen von Flächen dritter Ordnung.

Wir sind nun in der Lage, Constructionen von Flächen dritter Ordnung, die drei gegebene Gerade $s'_1 s'_2 s'_3$ und einen Doppelpunkt H' besitzen, mittelst weiteren Bedingungen zu fixiren und auf einfachere algebraische Probleme zurückzuführen. Wir brauchen uns nur einen Raum Σ' zu construiren, der die gegebenen Geraden $s'_1 s'_2 s'_3$ zu Axen und H' zum Hauptpunkte hat. Die drei Axen des Raumes Σ $s_1 s_2 s_3$ unterliegen nur der Bedingung, sich in drei Punkten zu schneiden. Schliesslich muss noch die Projectivität der Ebenenbüschel $s_i s'_i$ auf beliebige Weise vollkommen festgelegt werden.

Die weiteren Bestimmungsstücke der zu construirenden Fläche, die im Raume Σ' gelegen gedacht wird, transformiren wir nach Σ, wo wir dann Ebenen zu construiren haben, deren Bilder die Lösungen liefern. Wir wollen einige Beispiele geben:

Dabei sollen $s'_1 s'_2 s'_3$ Gerade der Fläche, H' einen Doppelpunkt, h' eine Haupttangente, $\overline{h'B'}$ eine Haupttangente mit dem Berührungspunkt, $b'_1 b'_2 \dots$ Tangenten, $P'_1 P'_2 \dots$ Punkte, $\pi'_1 \pi'_2 \dots$ Berührungsebenen, $\overline{\pi' B'}$ eine Berührungsebene, $\overline{b' B'}$ eine Tangente mit ihren Berührungspunkten bedeuten. Wir werden die zu construirende Fläche mit F'_3 bezeichnen und die Bestimmungsstücke derselben hinzusetzen.

Die Construction der Fläche $F'_3(s'_1 s'_2 s'_3 H' P' h')$ reducirt sich auf die der Bilder der drei Schmiegungsebenen, die sich von P an die Raumcurve dritter Ordnung h legen lassen. Wenn statt der Bedingungen $P' h'$ die Bedingungen $\overline{h' B'}$ gegeben sind, so gehen die drei Lösungen in eine über.

Die Construction der Fläche $F'_3(s'_1 s'_2 s'_3 H' b'_1 b'_2 P'_1)$ reducirt sich auf die der Bilder der gemeinsamen Tangentialebenen der beiden Kegel vierter Klasse, die P_1 zur Spitze und $b_1 b_1$ zu Leitlinien haben.

Wird in dieser Aufgabe eine Tangente z. B. b'_2 durch einen Punkt P'_2 ersetzt, so reducirt sich die Zahl der Lösungen auf vier.

Die Construction der Fläche $F'_3(s'_1 s'_2 s'_3 H' b'_1 b'_2 b'_3)$ reducirt sich auf die der Bilder der gemeinschaftlichen Tangentenebenen der drei Raumcurven dritter Ordnung $b_1 b_2 b_3$.

Die Construction der Fläche $F'_3(s'_1 s'_2 s'_3 H' \pi' P' b')$ reducirt sich auf die der Bilder der gemeinschaftlichen Berührungsebenen des Tangentenkegels von P an π und des Kegels, der P zur Spitze und b zur Leitlinie hat.

Tritt statt der Bedingungen $\pi' P' b'$ die Bedingung $\overline{\pi' B'}$, so haben wir nur die Tangentialebene in B an π zu construiren und deren Bild zu suchen.

Die Construction der Fläche $F'_3(s'_1 s'_2 s'_3 H' \pi'_1 \pi'_2 P')$ reducirt sich auf die der Bilder der gemeinsamen Berührungsebenen der Tangentenkegel von P an $\pi_1 \pi_2$. Wenn nun P durch eine dritte Berührungsebene π'_3 ersetzt wird, so besteht die Reduction der Aufgabe in der Construction der gemeinsamen Berührungsebenen von $\pi_1 \pi_2 \pi_3$.

Capitel III.

Zweiter Specialfall.

§ 7.

Wir gehen nun zu einer weiteren Specialisirung dieses Specialfalles der Verwandtschaft über (s. lithogr. Tafel Fig. 5). Wir legen den Hauptpunkt des Raumes Σ' d. i. H' auf eine beliebige Transversale s'_4 von $s'_1 s'_2 s'_3$.

Dadurch aber werden alle Punkte der Transversalen s'_4 zu Hauptpunkten, denn jedem Punkte von s'_4 entspricht jetzt die Ebene $s_1 s_2 s_3$. s'_4 möge die Hauptlinie des Raumes Σ' heissen.

Es folgt nun:

Die Hauptcurve (H_3) des Raumes Σ geht in eine Gerade s_4 über.

Denn die Punkte, die den Transversalen von $s'_1 s'_2 s'_3$ entsprechen, erhalten wir als Erzeugniss von drei projectiven Ebenenbüschel $s_1 s_2 s_3$, die die Ebene ihrer Axen entsprechend gemein haben.

Umgekehrt gilt der Satz:

Geht die Hauptcurve (H_3) in eine Gerade s_4 über, so wird der Hauptpunkt H' durch eine Hauptlinie s'_4 ersetzt.

Da jedem Punkte der Ebene $s_1 s_2 s_3$ die ganze Hauptlinie s'_4 entspricht, so folgt:

Einer Geraden des Raumes Σ entspricht als eigentliches Bild ein Kegelschnitt, der jede der Axen $s'_1 s'_2 s'_3$ und die Hauptlinie s'_4 je einmal schneidet.

Denn unsere früheren Kegel, deren Strahlen den Punkten der Axen des Raumes Σ' entsprechen, sind hier in Strahlenbüschel mit den Scheiteln $H_1 H_2 H_3$ übergegangen, die die singuläre Gerade s_4 des Raumes Σ projiciren. Da nun jede Gerade nur einen Strahl eines jeden dieser Büschel $H_1 s_4$, $H_2 s_4$, $H_3 s_4$ schneidet, so enthält das Bild der Geraden auch nur einen Punkt jeder der Axen $s'_1 s'_2 s'_3$.

Auf gleiche Weise ergiebt sich:

Einer Curve n^{ter} Ordnung des Raumes Σ entspricht als eigentliches Bild eine Curve von der Ordnung $3n - n$, die jede der Axen $s'_1 s'_2 s'_3$ und die Hauptlinie s'_4 $n$fach schneidet.

Jedem Kegelschnitt, der $s'_1 s'_2 s'_3$ und s'_4 je einmal schneidet, entspricht in Σ eine Gerade.

Denn das Bild des Kegelschnittes wird durch drei projective Ebenenbüschel $s_1 s_2 s_3$, welche die Ebene $(s_1 s_2 s_3)$ entsprechend gemein haben, erzeugt.

Der Axe s_i und deren Punkten entspricht der Schnittpunkt von s'_4 mit s'_i.

Dem Hauptpunkte H_i entsprechen alle Punkte der Ebene $s'_i s'_4$.

Jeder Ebene E des Raumes Σ durch s_4 entspricht in Σ' eine Ebene E', die s'_4 enthält.

Denn den Punkten von s_4 entspricht eine Fläche zweiten Grades, die als ein uneigentliches Bild der Ebene E anzusehen ist. Ferner schneidet E die Ebene $(s_1 s_2 s_3)$ in einer Geraden, deren Punkten s'_4 entspricht. Somit muss die Ebene E' s'_4 enthalten.

Es ergiebt sich nun weiter:

Die Ebenen des Ebenenbüschels s_4 stehen mit den entsprechenden Ebenen des Ebenenbüschels s'_4 in projectiver Beziehung.*

Denn schneiden wir irgend vier Ebenen des Ebenenbüschels s_4 mit einer beliebigen Geraden g des Raumes Σ, so erhalten wir vier Schnittpunkte $ABCD$, denen vier Punkte $A'B'C'D'$ einer Ebene des Raumes Σ' entsprechen. Diese Ebene enthält das Bild von g, welches ein Kegelschnitt ist. Letzterer enthält ausser $A'B'C'D'$ noch die Schnittpunkte der Axen $s'_1 s'_2 s'_3$ und der Hauptlinie s'_4 mit der Ebene. Nach Construction der Verwandtschaft besteht nun die Relation

$$s_i(ABCD) \barwedge s'_i(A'B'C'D'),$$
$$i = 1, 2, 3.$$

Da aber s'_4 das Bild von g schneidet, so folgt:

$$s_4(ABCD) \barwedge s'_4(A'B'C'D').$$

Es ergiebt sich weiter:

Den Geraden des linearen Complexes mit der Axe s_4 entsprechen die Geraden des linearen Complexes mit der Axe s'_4.

Denn jeder Geraden g, die s_4 schneidet, entspricht ein in zwei Gerade zerfallender Kegelschnitt und die Hauptlinie s'_4.

Dem Schnittpunkte von g mit s_4 entspricht als uneigentliches Bild eine Transversale zu $s'_1 s'_2 s'_3$. Das eigentliche Bild von g, d. i. die Gerade g', wird daher letztere Transversale und s'_4 schneiden. Anderseits entspricht jeder Geraden g', die s'_4 schneidet, eine Gerade g, die s_4 schneidet, als das Erzeugniss dreier projectiver Ebenenbüschel $s_1 s_2 s_3$, die die Ebene $(s_1 s_2 s_3)$ entsprechend gemein haben.

Es folgt weiter aus ähnlichen Gründen:

Den Geraden des Raumes Σ der linearen Strahlensysteme mit den Axen $s_i s_4$ entsprechen die Strahlen der Bündel mit den Scheiteln $(s'_i s'_4)$.

Einer Geraden g' des Raumes Σ' entspricht eine Curve dritter Ordnung, die s_4 zur Sehne hat und durch die drei Punkte $H_1 H_2 H_3$ geht.

Denn jede Gerade g' schneidet zwei Transversalen von $s'_1 s'_2 s'_3$ und die Ebenen, die $H_1 H_2 H_3$ entsprechen, je einmal.

Jeder Raumcurve dritter Ordnung, die durch $H_1 H_2 H_3$ geht und s_4 zur Sehne hat, entspricht in Σ' eine Gerade.

Denn einer Raumcurve dritter Ordnung entspricht, wenn sie durch $H_1 H_2 H_3$ geht, das Erzeugniss dreier projectiver Ebenenbüschel $s'_1 s'_2 s'_3$

* s_4 und s'_4 spielen daher die Rollen von Axen.

Da aber die Raumcurve dritter Ordnung zweimal s_4 schneidet, und jedem dieser Schnittpunkte eine Transversale von $s'_1 s'_2 s'_3$ entspricht, so ist ihr eigentliches Bild eine Gerade.

Jedem Kegelschnitt K'_2 des Raumes Σ', der zwei der Axen $s'_1 s'_2 s'_3$ schneidet, entspricht eine Raumcurve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt in jenem Hauptpunkt, der andern Index als die beiden Axen hat. Diese Raumcurve vierter Ordnung hat s_4 zur Sehne und enthält auch die beiden andern Hauptpunkte.*

Um dies einzusehen, braucht man nur die Schnittpunkte der drei Ebenen, die den Hauptpunkten $H_1 H_2 H_3$ entsprechen, ferner die der Regelschaar, von der $s'_1 s'_2 s'_3$ Leitlinien sind, mit dem Kegelschnitt K'_2 zu betrachten.

Wir sind damit in den Stand gesetzt, alle Constructionen von Raumcurven vierter Ordnung, von denen eine Sehne s_4, ein Doppelpunkt z. B. H_1 und zwei andere Punkte $H_2 H_3$ gegeben sind, durch Combination der noch fehlenden Bedingungen auf andere meist einfache algebraische Probleme zurückzuführen. Wir brauchen nur die gegebene Verwandtschaft der Art zu construiren, dass die gegebenen Punkte $H_1 H_2 H_3$ die Hauptpunkte und die gegebene Sehne s_4 die singuläre Linie des Raumes Σ werden. Alles andere bleibt der Willkür überlassen. Wir werden dann nach Construction der Verwandtschaft die weiteren Bestimmungsstücke der Raumcurve vierter Ordnung nach dem Raume Σ' transformiren. In diesem Raume haben wir dann aus gegebenen Bestimmungsstücken einen Kegelschnitt oder deren mehrere zu construiren, deren Bilder uns alle Lösungen der Aufgabe liefern werden.

Z. B. wenn eine Raumcurve vierter Ordnung zu construiren wäre, die in H_1 einen Doppelpunkt hat und von der noch eine Sehne s_4 und fünf Punkte $H_2 H_3 P_1 P_2 P_3$ gegeben sind, so haben wir nach angegebener Construction der Verwandtschaft $P_1 P_2 P_3$ nach Σ' zu transformiren und daselbst den Kegelschnitt zu construiren, der durch $P'_1 P'_2 P'_3$ geht und die beiden Axen $s'_2 s'_3$ schneidet. Das Bild dieses Kegelschnitts löst die Aufgabe. Schliesslich füge ich noch hinzu, dass wenn der Kegelschnitt die Ebene berührt, die H_1 entspricht, dass dann der Doppelpunkt in einen Rückkehrpunkt übergeht. Wir haben somit ein Mittel zur Construction von Raumcurven vierter Ordnung, wenn unter anderen Bedingungen von diesen der Rückkehrpunkt H_1, zwei Punkte $H_2 H_3$ und eine Sehne gegeben sind, gefunden.

Betrachten wir das Bild einer beliebigen Ebene E des Raumes Σ, so ist dies nach Früherem eine Fläche dritter Ordnung, die $s'_1 s'_2 s'_3$ enthält.

---

* Die Umkehr dieses Satzes ergiebt sich aus der Art der Fläche, die einer Ebene im Raume Σ' entspricht.

Wir behaupten nun:

Einer Ebene des Raumes Σ entspricht eine geradlinige Fläche dritter Ordnung, die ausser $s'_1 s'_2 s'_3$ s'_4 als Doppellinie enthält.

Um dies zu beweisen, suchen wir die Bilder der Geraden der Ebene E, die s_4 schneiden. Dies sind aber nach Früherem Gerade, die s'_4 und die Gerade t' schneiden, die dem Schnittpunkte von s_4 mit E entspricht. Sie bilden die Regelfläche dritter Ordnung. Einer beliebigen Geraden g der Ebene E entspricht ein Kegelschnitt, der nach Früherem s'_4 schneidet.

Dieser Kegelschnitt bildet mit den Geraden $s'_4 t'$ die Leitlinien der Regelfläche dritter Ordnung, die E entspricht, d. h. dem Strahlenbüschel der Ebene E mit dem Scheitel $(s_4 E)$ entsprechen die Geraden, die den Kegelschnitt und die Geraden $s'_4 t'$ schneiden.

Einer geradlinigen Fläche dritter Ordnung, die ausser $s'_1 s'_2 s'_3$ noch s'_4 als Doppellinie enthält, entspricht in Σ eine Ebene als eigentliches Bild.

Denn jede Fläche, die durch eine der Geraden $s'_1 s'_2 s'_3$, z. B. $s_i s'_i$ geht, hat zum uneigentlichen Bilde die Ebene $(H_i s_4)$. Geht ferner eine Fläche zweimal durch s'_4, so wird eben so oft die Ebene $(s_1 s_2 s_3)$ als uneigentliches Bild der Fläche auftreten.

Einer beliebigen Ebene E' des Raumes Σ' entspricht eine Fläche zweiten Grades als eigentliches Bild, die s_4 und die Hauptpunkte $H_1 H_2 H_3$ enthält.

Denn jede solche Ebene E' schneidet s'_4 in einem Punkte, dem schon die Ebene $(s_1 s_2 s_3)$ entspricht, und $s'_1 s'_2 s'_3$ in drei Punkten, denen Gerade durch $H_1 H_2 H_3$ entsprechen, die s_4 in drei Punkten schneiden.

Einer Fläche zweiten Grades, die $H_1 H_2 H_3$ und s_4 enthält, entspricht in Σ' als eigentliches Bild eine Ebene.

Denn H_i hat die Ebene $(s'_i s'_4)$ und s_4 die Fläche zweiten Grades, von welcher $s'_1 s'_2 s'_3$ Erzeugende sind, zu Bildern.

§ 8.

Constructionen von geradlinigen Flächen zweiten Grades und Raumcurven dritter Ordnung.

Wir haben nun hinreichende Mittel zu Constructionsaufgaben gewonnen, und wir wollen, am letzten Satz anknüpfend, Constructionen von geradlinigen Flächen zweiten Grades vorerst geben. Da die zu construirende Fläche zweiten Grades als das Bild einer Ebene des Raumes Σ' aufgefasst werden muss, so müssen von derselben stets eine Gerade s_4 und drei Punkte $H_1 H_2 H_3$ gegeben sein. Weitere Bestimmungsstücke können dann nach Belieben combinirt werden. Die Gerade s_4 werden wir dann als singuläre Gerade, $H_1 H_2 H_3$ als Hauptpunkte des Raumes Σ annehmen.

Die Axen und die Hauptlinie des Raumes Σ' und die weitere Fixirung der Verwandtschaft bleibt in unserem Belieben. Wir werden nun die weiteren Bestimmungsstücke der Fläche zweiten Grades nach Σ' transformiren und diejenigen Ebenen hier construiren, deren Bilder uns die verlangten Flächen liefern.

Aehnliches werden wir auszuführen haben, wenn es sich um die Construction von Raumcurven dritter Ordnung handelt, die s_4 zur Sehne haben und durch $H_1 H_2 H_3$ gehen. Die Bezeichnung soll der früheren analog sein.

Wir skizziren einige Beispiele:

Die Construction der Fläche $F_2\,(H_1 H_2 H_3\, s_4\, P_1 P_2 P_3)$ reducirt sich auf die des Bildes der Ebene $P'_1 P'_2 P'_3$.

Die Construction der Fläche $F_2\,(H_1 H_2 H_3\, s_4 b_1\, \overline{bB})$ reducirt sich auf die der Bilder der beiden Ebenen, die durch die Tangente von b' in B' gehen und den Kegelschnitt b'_1 berühren.

Ganz ähnlich löst sich die Construction der Fläche $F_2\,(H_1 H_2 H_3\, s_4 b_1 b_2 P)$. Wir haben hier vier Lösungen.

Die Construction der Fläche $F_2\,(H_1 H_2 H_3\, s_4\, b_1 b_2 b_3)$ reducirt sich auf die der Bilder der acht Berührungsebenen der drei Kegelschnitte $b'_1 b'_2 b'_3$.

Die Construction der Raumcurve dritter Ordnung $C_3\,(s_4 H_1 H_2 H_3 P l_1 l_2)$ reducirt sich auf die der Bilder der vier gemeinsamen Geraden der beiden Kegel $(P' l'_1)\,(P' l'_2)$.

Die Construction der Raumcurve dritter Ordnung $C_3\,(s_4 H_1 H_2 H_3 s l_1 l_2)$ reducirt sich auf die Auffindung der Sehnen von s', die l'_1 und l'_2 schneiden.

Die Construction der Raumcurve dritter Ordnung $C_3\,(s_4 H_1 H_2 H_3 P l \pi)$ ist zurückgeführt auf die der Geraden des Tangentenkegels $(P'\pi')$, die von l' geschnitten werden. Die Aufgabe hat acht Lösungen, denn die Schnittpunkte von l' mit der Doppelebene, die von P' zur Doppellinie geht, liefern keine Lösungen.

Die Construction der Raumcurve dritter Ordnung $C_3\,(s_4 H_1 H_2 H_3 s l \pi)$:

Die Ebene des Kegelschnitts s' schneidet π' in einer Curve vierter Classe. Der Kegelschnitt l' schneidet letztere Ebene in zwei Punkten, von welchen je vier Tangenten an die Curve gehen, deren Bilder unsere Aufgabe lösen.

Die Construction der Raumcurve dritter Ordnung $C_3\,(s_4 H_1 H_2 H_3 P \pi_1 \pi_2)$ reducirt sich auf die der gemeinschaftlichen Tangenten von P' an beide Flächen $\pi'_1 \pi'_2$. Die Aufgabe hat, wie sofort folgt, sechszehn Lösungen.

Die Construction der Raumcurve dritter Ordnung $C_3\,(s_4 H_1 H_2 H_3 s \pi_1 \pi_2)$ reducirt sich auf die der Bilder der sechszehn gemeinsamen Tangenten, die sich in der Ebene von s' an die Schnittcurven von $\pi'_1 \pi'_2$ ziehen lassen.

Die Construction der Raumcurve dritter Ordnung $C_3(s_4 H_1 H_2 H_3 P \pi^2)$ reducirt sich auf die Construction der Haupttangenten, die von P' an π' gehen.

Die Construction der Raumcurve dritter Ordnung $C_3\ (s_4 H_1 H_2 H_3 s \pi^2)$ reducirt sich auf die Construction der Bilder der drei Wendetangenten der Schnittcurve der Ebene des Kegelschnittes s' mit der Fläche π'.

Auf ganz gleiche Art lösen sich die Constructionen der Raumcurven dritter Ordnung:

$$C_3\ (s_4 H_1 H_2 H_3 \overline{\pi l} P),\ C_3\ (s_4 H_1 H_2 H_3 s \overline{\pi l}),\ C_3\ (s_4 H_1 H_2 H_3 b l)$$

u. s. w.

§ 9.

Constructionen von Flächen dritten Grades.

Wir können nun schliesslich auch den Raum Σ' zu Constructionen von Flächen dritten Grades, von welchen aber immer die Doppelgerade s'_4 und drei diese schneidende Gerade $s'_1 s'_2 s'_3$ gegeben sein müssen, und zu Constructionen von Kegelschnitten, von denen aber immer vier Secanten $s'_1 s'_2 s'_3 s'_4$ gegeben sein müssen, von welchen s'_4 die drei übrigen schneidet, verwenden. Wir haben unsere Verwandtschaft nur der Art zu construiren, dass $s'_1 s'_2 s'_3$ die Axen des Raumes Σ', und s'_4 die Hauptlinie desselben Raumes werden. Die Axen des Raumes Σ unterliegen der Bedingung, sich in drei Punkten schneiden zu müssen. Wir haben dann die weiteren Bestimmungsstücke des in Σ' zu construirenden Gebildes nach Σ zu transformiren und hier Ebenen oder Gerade zu construiren, deren Bilder die verlangten Lösungen liefern. Wir wollen einige Beispiele mit früher analogen Bezeichnungen geben.

Die Construction der Fläche dritten Grades $F'_3\ (s'_4 \,.\, s'_1 s'_2 s'_3 P'_1 P'_2 b')$ besteht nach Construction der Verwandtschaft in der Transformation der Bestimmungsstücke $P'_1 P'_2 b'$ in den Raum Σ. Hier haben wir Ebenen zu construiren, die b berühren und durch $P_1 P_2$ gehen müssen. Da der Kegel, dessen Spitze einer der Punkte $P_1 P_2$ und dessen Leitlinie die Curve dritter Ordnung b ist, von der vierten Classe, so erhalten wir vier Ebenen, deren Bilder unsere Aufgabe lösen.

Ganz ähnlich construiren sich die Flächen dritten Grades $F'_3\ (s'_4 \,.\, s'_1 s'_2 s'_3 P' b'_1 b'_2)$ und $F'_3\ (s'_4 \,.\, s'_1 s'_2 s'_3 b'_1 b'_2 b'_3)$.

Die Construction der Fläche dritten Grades $F'_3\ (s'_4 \,.\, s'_1 s'_2 s'_3 h' P')$ ist zurückführbar auf die Construction der drei Schmiegungsebenen vom Punkte P an die Raumcurve dritter Ordnung h. Die Bilder dieser Ebenen werden dann gewiss durch P' gehen und h' dreipunktig berühren.

Die Construction der Fläche dritten Grades $F'_3\ (s'_4 \,.\, s'_1 s'_2 s'_3 P'_1 P'_2 \pi'_1)$ reducirt sich auf die Construction der beiden Berührungsebenen, die sich von $P_1 P_2$ an die Fläche zweiter Ordnung π_1 legen lassen.

Setzt man statt P'_2 eine zweite Berührungsebene π'_2, so hat man von P_1 die vier gemeinsamen Berührungsebenen an $\pi'_1 \pi'_2$ und deren Bilder, die die Aufgabe lösen, zu suchen.

Die Construction der Fläche dritten Grades F'_3 $(s'_4 \,.\, s'_1 s'_2 s'_3 \pi'_1 \pi'_2 \pi'_3)$ reducirt sich auf die Construction der Bilder der acht gemeinsamen Berührungsebenen der drei Flächen zweiten Grades $\pi_1 \pi_2 \pi_3$.

§ 10.

Constructionen von rationalen Raumcurven vierter Ordnung.

Bevor wir zu Constructionen von Kegelschnitten im Raume Σ' übergehen, wollen wir noch einige Constructionen von rationalen Raumcurven vierter Ordnung geben, um diese mit den folgenden Kegelschnittsconstructionen in Verbindung setzen zu können.

Wir behaupten vorerst:

Einem Kegelschnitt des Raumes Σ entspricht eine rationale Raumcurve vierter Ordnung in Σ', die die Axen $s'_1 s'_2 s'_3$ und die Hauptlinie s_4 zu Sehnen hat.

Dieser Satz folgt daraus, dass den Schnittpunkten des Kegelschnittes mit den Ebenen $(s_1 s_2 s_3)$ $(H_1 s_4)$ $(H_2 s_4)$ $(H_3 s_4)$ Punkte auf s'_4 $s'_1 s'_2 s'_3$ des Bildes entsprechen.

s'_4 tritt zweimal als uneigentliches Bild vom Kegelschnitt auf, weshalb das eigentliche Bild eine rationale Raumcurve vierter Ordnung ist.

Ferner gilt der Satz:

Eine rationale Raumcurve vierter Ordnung, die $s'_1 s'_2 s'_3 s'_4$ zu Sehnen hat, besitzt zum eigentlichen Bilde einen Kegelschnitt.

Denn eine solche Raumcurve hat mit Regelflächen dritter Ordnung, die s'_4 zur Doppellinie und die Axen $s'_1 s'_2 s'_3$ enthält, nur zwei bewegliche Schnittpunkte.

Wir wollen diese beiden letzten Sätze zu Constructionen benützen. In allen diesen wird es uns nur möglich sein, rationale Raumcurven vierter Ordnung zu construiren, die $s'_1 s'_2 s'_3 s'_4$ zu Sehnen haben.

Aber es ergiebt sich sofort, dass wir es in der Hand haben, diese Sehnen zum Theil in Tangenten übergehen zu lassen. Denn betrachten wir die schon erwähnten Ebenen $(s_1 s_2 s_3)$ $(H_1 s_4)$ $(H_2 s_4)$ $(H_3 s_4)$, so ist klar, dass einem Kegelschnitt des Raumes Σ, der mit einer oder mehreren dieser Ebenen eine Berührung hat, eine rationale Raumcurve vierter Ordnung entspricht, die mit den homologen Geraden s'_4 $s'_1 s'_2 s'_3$ eine Berührung hat.

Aber wir können nicht blos verlangen, dass die Sehnen in Tangenten der Raumcurve übergehen, wir können es vielmehr auch einrichten, dass die Raumcurve vierter Ordnung einen Doppelpunkt erhält und dass dieser auf einer der Axen $s'_1 s'_2 s'_3$ zu liegen kommt. Denn allen Punkten jeder

Verbindungslinie einer der Hauptpunkte $H_1 H_2 H_3$ mit irgend einem Punkte von s_4 entspricht ein und nur ein Punkt der Axen $s'_1 s'_2 s'_3$. Legen wir nun den Kegelschnitt der Art, dass er eine solche Gerade zweimal schneidet, so muss das Bild desselben zwei Punkte in einem Punkte der Axen haben. Dies ist aber ein Doppelpunkt.

Um zu Constructionen überzugehen, werden wir immer die gegebenen Geraden $s'_1 s'_2 s'_3 s'_4$, die immer die Stelle von Sehnen der zu construirenden Raumcurve vierter Ordnung spielen, als Axen und Hauptlinie des Raumes Σ' anzunehmen haben. Die weitere Fixirung der Verwandtschaft ist willkürlich, wie wir schon gesehen haben, nur müssen $s_1 s_2 s_3$ sich in drei Punkten schneiden.

Wir wollen die Bezeichnungen festhalten, die bei Raumcurven dritter Ordnung gewählt wurden, nur soll ferner bedeuten:

$\overline{D' s'_i}$ einen Doppelpunkt auf s'_i,
s'^2, s'^2_i Tangenten,
s'^3 eine Tangente mit dreipunktiger Berührung.

Die Construction der Raumcurve vierter Ordnung $C_4(s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 s' P'_1 P'_2 P'_3)$. Wir transformiren $s' P'_1 P'_2 P'_3$ nach dem Raume Σ und construiren hier in der Ebene $P_1 P_2 P_3$ durch diese Punkte und immer zwei von den Schnittpunkten der Raumcurve dritter Ordnung s einen Kegelschnitt. Die Bilder der drei möglichen Kegelschnitte liefern die Lösungen der Aufgabe. Es ist leicht ersichtlich, dass fast auf gleiche Weise sich die Construction der Raumcurve vierter Ordnung $C'_4\,(s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 l'_1 l'_2 P'_1 P'_2 P'_3)$ ergiebt. Wir erhalten neun Lösungen durch Lösung zweier Aufgaben dritten Grades.

Die Construction der Raumcurve vierter Ordnung $C_4(s'_1 s'_2 s'_3 s'^2_4 l' P'_1 P'_2 P'_3)$ reducirt sich auf die von Kegelschnitten im Raume Σ, die durch $P_1 P_2 P_3$ gehen, die Ebene $(s_1 s_2 s_3)$ berühren und einen der Schnittpunkte ihrer Ebene mit der Raumcurve dritter Ordnung l enthalten. Die sechs Lösungen sind auf eine Aufgabe vom dritten und drei vom zweiten Grade reducirt.

Die Construction der Raumcurve vierter Ordnung $C'_4(s'_1 s'_2 s'_3 s'^2_4 s'^3 P')$ verlangt vorerst die der drei Schmiegungsebenen, die sich von P an die Raumcurve dritter Ordnung s legen lassen. Wir haben dann Kegelschnitte zu construiren, die in je einem Schmiegungspunkte die Raumcurve s osculiren, durch P gehen und die Ebene $(s_1 s_2 s_3)$ berühren. Wir erhalten sechs Lösungen.

Die Construction der Raumcurve vierter Ordnung $C'_4(s'_1 s'_2 s'^2_3 s'^2_4 P'_1 P'_2 P'_3)$ verlangt die von Kegelschnitten, die durch $P_1 P_2 P_3$ gehen und die Ebenen $(H_3 s_4)$ $(s_1 s_2 s_3)$ berühren.

Die Construction der Raumcurve vierter Ordnung $C'_4(s'_1 s'^2_2 \overline{D' s'_3} s'^2_4 P'_1 P'_2)$ kommt zurück auf die der Kegelschnitte der Ebene $(H_3 P_1 P_2)$, welche durch $P_1 P_2$ gehen und die drei Ebenen $(H_2 s_4)$ $(H_3 s_4)$ $(s_1 s_2 s_3)$ berühren.

Weitere Combinationen der Bestimmungsstücke ausser $s'_1 s'_2 s'_3 s'_4$ ergeben sich leicht, weshalb wir es mit diesen Beispielen bewenden lassen.

§ 11.

Kegelschnittconstructionen.

Wir gehen nun zu einigen Beispielen von Constructionen von Kegelschnitten im Raume Σ' über. Wir wollen Gerade, welche mit dem zu construirenden Kegelschnitt je einen Punkt gemein haben, mit $s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 l'_1 l'_2 \ldots$ bezeichnen. Die anderen Bezeichnungen sollen denen bei Curven dritter Ordnung analog sein.

Die Construction des Kegelschnitts $K'_2(s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 P'_1 P'_2)$ reducirt sich auf die des Bildes der Geraden $P_1 P_2$.

Die Construction des Kegelschnitts $K'_2(s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 l'_1 l'_2 P')$ reducirt sich auf die der Geraden, die durch P gehen und $l_1 l_2$ schneiden. Dabei liefern die Geraden PH_1, PH_2, PH_3 keine Lösungen.

Die Construction der Kegelschnitte

$$K'_2(s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 l'_1 l'_2 l'_3 \pi'),$$
$$K'_2(s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 l'_1 l'_2 \pi'_1 \pi'_2),$$
$$K'_2(s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 l'_1 \pi'_1 \pi'_2 \pi'_3),$$
$$K'_2(s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 \pi'_1 \pi'_2 \pi'_3 \pi'_4)$$

kommen darauf hinaus, die gemeinsamen Strahlen von vier Complexen zu bestimmen. Strahlen durch die Hauptpunkte geben keine Lösungen.

Die Construction des Kegelschnitts $K'_2(s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 P' \pi' l')$ verlangt die Construction der gemeinsamen Geraden der beiden Kegel $(P\pi)$ und (Pl), von welchen der erste zweiten und der zweite dritten Grades ist. Wir haben somit sechs Lösungen.

Die Construction des Kegelschnitts $K'_2(s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 P' \pi'_1 \pi'_2)$ führt auf die Construction der gemeinsamen Strahlen der beiden Tangentenkegel von P an die Flächen zweiten Grades $\pi_1 \pi_2$, deren Bilder die Aufgabe lösen.

Wir wollen uns nun die Aufgabe stellen, Kegelschnitte zu construiren, die vier gegebene Sehnen $s'_1 s'_2 s'_3 s'_4$ einer rationalen Raumcurve vierter Ordnung schneiden.* s'_4 ist eine Transversale von $s'_1 s'_2 s'_3$. Um die Kegelschnitte völlig zu bestimmen, wollen wir weitere Bedingungen combiniren. Wir haben gesehen, dass einer rationalen Raumcurve vierter Ordnung, die in unserer Verwandtschaft $s'_1 s'_2 s'_3 s'_4$ zu Sehnen hat, in Σ ein Kegelschnitt entspricht. Wir werden daher die gegebenen Sehnen der gegebenen rationalen Raumcurve vierter Ordnung zu Axen und Hauptlinie des Raumes Σ'

---

* Siehe Lüroth's Abhandlung: Eine Aufgabe über Kegelschnitte im Raume, Math. Annalen, Bd. 3.

der schon oft benutzten Verwandtschaft machen. Die anderen Bestimmungen derselben bleiben uns frei. Wir werden dann im Raume Σ Gerade zu construiren haben, deren Bilder uns die gewünschten Kegelschnitte liefern. Wir wollen einige Beispiele geben. Dabei führen wir folgende Bezeichnung ein:

$P'_1 P'_2 \ldots$ Der Kegelschnitt K'_2 geht durch die gegebenen Punkte $P'_1 P'_2 \ldots$, die nicht auf der Raumcurve liegen.

$C'_1 C'_2$; er enthält die festen auf der Raumcurve liegenden Punkte $C'_1 C'_2$.

$l'_1 l'_2$, $s'_1 s'_2 s'_3 s'_4$; er schneidet die festen Geraden $l'_1 l'_2$, $s'_1 s'_2 s'_3 s'_4$ einmal.

l'^2; er soll die feste Gerade l' berühren.

$\overline{l'l'}$; er soll die feste Gerade l' zweimal schneiden.

C'_4; er soll die gegebene Raumcurve vierter Ordnung einmal schneiden.

C'^2_4; er soll sie berühren.

$\overline{C'_4 C'_4}$; er soll sie zweimal schneiden.

$\pi'_1 \pi'_2$; er soll die gegebenen Ebenen $\pi'_1 \pi'_2$ berühren.

Die Construction des Kegelschnittes $K'_2(s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 l'^2 C'_4)$ reducirt sich auf die der Tangenten der Raumcurve dritter Ordnung l, die das Bild von C'_4 (wir wollen dies mit K_2 bezeichnen) schneiden.

Die Construction des Kegelschnittes $K'_2(s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 \overline{l'l'} l'_1 C'_4)$ reducirt sich auf die der Sehnen von l, die K_2 und l_1 schneiden.

Die Construction des Kegelschnittes $K'_2(s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 C'_1 P'_1)$ löst sich durch das Bild der Geraden $C_1 P$.

Die Construction des Kegelschnittes $K'_2(s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 l' P' C'_4)$ führt auf die der gemeinsamen Strahlen der beiden Kegel (Pl) und (PK_2).

Die Construction des Kegelschnittes $K'_2(s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 l' C'^2_4)$ führt auf die Aufgabe, die Tangenten von K_2 zu ermitteln, die l schneiden. Die Aufgabe sechsten Grades zerfällt in drei des zweiten und eine des dritten Grades.

Die Construction des Kegelschnittes $K'_2(s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 \pi' C'^2_4)$ verlangt die der Tangenten von K_2, die auch π berühren.

Die Construction des Kegelschnittes $K'_2(s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 l'_1 l'_2 \overline{C'_4 C'_4})$ reducirt sich auf die der in der Ebene von K_2 liegenden Geraden, welche l_1 und l_2 schneiden.

Die Aufgabe neunten Grades reducirt sich auf zwei des dritten.

Die Construction des Kegelschnittes $K'_2(s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 \pi'_1 \pi'_2 \overline{C'_4 C'_4})$ führt auf die der gemeinsamen Tangenten der beiden Kegelschnitte, die die Ebene von K_2 aus den Flächen π_1 und π_2 herausschneidet.

Capitel IV.

Dritter Specialfall.

§ 12.

Wir gehen nun zu einem weiteren Specialfall* der Verwandtschaft über (s. lithogr. Tafel Fig. 6).

Die Axen jedes Raumes nehmen wir windschief zu einander. Die singuläre Hauptcurve (H'_3) dritter Ordnung des Raumes Σ' lassen wir in drei Gerade zerfallen. Dies erreichen wir, wenn wir drei Punkte irgend einer Geraden s'_4 des Raumes Σ' drei beliebigen Transversalen der Axen des Raumes Σ zuweisen. Damit ist die Verwandtschaft festgelegt und es folgt aus früheren Betrachtungen, dass allen Transversalen der Axen des Raumes Σ eine Raumcurve dritter Ordnung entsprechen muss, von der aber hier drei Punkte in einer Geraden s'_4 liegen. Das heisst aber: Die Hauptcurve (H'_3) dritter Ordnung des Raumes Σ' ist in eine Gerade s'_4 und die beiden Transversalen zu $s'_1 s'_2 s'_3 s'_4$, die wir mit $t'_1 t'_2$ bezeichnen wollen, zerfallen. Denn die Transversalen $t'_1 t'_2$ gehen durch zwei Punkte von s'_4, denen auch zwei Transversalen von $s_1 s_2 s_3$, wir nennen sie $t_1 t_2$, entsprechen müssen. Daraus folgt aber, dass die Hauptcurve (H_3) dritter Ordnung des Raumes Σ aus $t_1 t_2$ und einer diese schneidende Gerade s_4 bestehen muss.

Es ergiebt sich somit:

Zerfällt die Hauptcurve dritter Ordnung in einem Raume in Gerade, so muss dies auch die des andern Raumes thun.

Dabei spielen die Theile der zerfallenen Raumcurve ungleiche Rollen. Wir bezeichnen obige Theile s_4 und s'_4 mit Axen der betreffenden Räume. Ihren Punkten entsprechen die Transversalen von $s'_1 s'_2 s'_3$, beziehungsweise die von $s_1 s_2 s_3$.

Die anderen Theile $t_1 t_2 t'_1 t'_2$ der zerfallenen Raumcurven sollen schlechtweg die Transversalen der Räume genannt werden. Dabei entspricht jedem Punkte von t_i die ganze Transversale t'_i und umgekehrt.

Jeder Punkt einer der Axen, z. B. s_1, wird durch Ebenen von s_2 und s_3 und irgend einer Ebene von s_1 im Raume Σ fixirt. Daher entspricht einem solchen Punkte in Σ' eine Gerade, die $s'_2 s'_3 s'_4$ schneidet.

Daraus ergiebt sich:

Jedem Punkte einer Axe eines Raumes entspricht im andern Raume eine Gerade, die die Axen des letzteren schneiden, die andere Indices haben als die Axe, auf welcher der Punkt liegt und umgekehrt.

---

* Siehe Noether, Math. Annalen, Bd. 3, pag. 571.

Aus der Umkehrung des Satzes folgt dann, wenn man noch beachtet, dass jedem Punkte einer Transversalen von drei Axen ein Punkt einer Axe im andern Raume entspricht:

Jeder Geraden des Raumes $\Sigma(\Sigma')$ entspricht in $\Sigma'(\Sigma)$ eine Raumcurve dritter Ordnung, die $s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 (s_1 s_2 s_3 s_4)$ zu Sehnen hat.

Jeder Ebene des Raumes $\Sigma(\Sigma')$ entspricht eine Fläche dritter Ordnung, die die Axen $s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 (s_1 s_2 s_3 s_4)$ des andern Raumes enthält.

Ebenso gelten die Umkehrungen dieser beiden Sätze, wie leicht zu sehen.

Legen wir durch die Axe $s_4 (s'_4)$ eine Ebene $E(E')$, so kann dieser nur wieder eine Ebene als eigentliches Bild entsprechen. Denn der Geraden $s_4 (s'_4)$ der Ebene entsprechen die Transversalen von $s'_1 s'_2 s'_3 (s_1 s_2 s_3)$, die eine Fläche zweiter Ordnung bilden. Das Bild der Ebene $E(E')$ ist somit in eine Fläche zweiter Ordnung und in eine Ebene zerfallen, von der wir behaupten, dass sie durch $s'_4 (s_4)$ geht.

$E(E')$ schneidet die Axen $s_1 s_2 s_3 (s'_1 s'_2 s'_3)$ in drei Punkten, denen nach Früherem Gerade entsprechen, die $s'_4 (s_4)$ schneiden. $s'_4 (s_4)$ enthält somit von dem Bilde von $E(E')$, welches eine Ebene ist, drei Punkte, muss daher in demselben liegen.

Betrachten wir nun vier Ebenen durch s_4: $E_1 E_2 E_3 E_4$ und schneiden diese mit einer Geraden g des Raumes Σ, so erhalten wir vier Schnittpunkte $(E_1 g)(E_2 g)(E_3 g)(E_4 g)$. Diesen vier Schnittpunkten entsprechen vier Punkte $(E'_1 g')(E'_2 g')(E'_3 g')(E'_4 g')$ auf den entsprechenden Ebenen durch s'_4: $E'_1 E'_2 E'_3 E'_4$. Sie liegen zudem auf einer Raumcurve dritter Ordnung g', welche das Bild von g ist. und die $s'_1 s'_2 s'_3 s'_4$ zu Sehnen hat. Da nun nach der Definition der Verwandtschaft:

$$s_i\,[(E_1 g)(E_2 g)(E_3 g)(E_4 g)] \barwedge s'_i\,[(E'_1 g')(E'_2 g')(E'_3 g')(E'_4 g')],$$

wobei $i = 1, 2, 3$, so folgt aus der Projectivität der vier Ebenenbüschel mit den Axen $s_1 s_2 s_3 s_4$, die die Punkte der Geraden g projiciren, die Projectivität der vier g' projicirenden Ebenenbüschel mit den Axen $s'_1 s'_2 s'_3 s'_4$, welche Sehnen der Raumcurve dritter Ordnung g' sind.

Es ergiebt sich somit:

Den Ebenen des Ebenenbüschels des Raumes Σ mit der Axe s_4 entsprechen die Ebenen des Ebenenbüschels mit der Axe s'_4 projectiv.

Jede Curve eines Raumes, welche eine oder mehrere Axen oder Transversalen desselben schneidet, hat in den Schnittpunkten Gerade zu uneigentlichen Bildern, weshalb die Ordnung des eigentlichen Bildes sich um die Zahl dieser Schnittpunkte erniedrigt. Wenn nun eine Gerade des

Raumes Σ beide Transversalen $t_1 t_2$ dieses Raumes schneidet, so entsprechen den Schnittpunkten die Transversalen $t'_1 t'_2$ und es ergiebt sich:

Den Geraden des linearen Strahlensystems mit den Fundamentalgeraden $t_1 t_2$ entsprechen die Geraden des linearen Strahlensystems mit den Fundamentalgeraden $t'_1 t'_2$ als eigentliche Bilder.

Beachtet man die Transversalen von je drei der Axen $s_1 s_2 s_3 s_4$, so wissen wir, dass jedem Punkte einer solchen Transversalen ein Punkt einer der Axen $s'_1 s'_2 s'_3 s'_4$ des andern Raumes entspricht, und es ergiebt sich:

Jeder Curve C_n in Σ entspricht im andern Raume eine Curve C'_{3n}, die $2n$mal jede der Axen $s'_1 s'_2 s'_3 s'_4$ schneidet.

Jeder Fläche F_n in Σ entspricht im Raume Σ' eine Fläche F'_{3n}, die $n$mal durch jede der Axen $s'_1 s'_2 s'_3 s'_4$ geht. — Und analog im andern Raume.

Betrachtet man die Strahlen eines Strahlenbüschels, welches einen Punkt von t_i zum Scheitel hat und die Punkte von t_k projicirt, so ergiebt sich:

Einer Ebene durch eine der Transversalen des Raumes t_k entspricht eine geradlinige Fläche dritter Ordnung, welche t'_k zur Doppelgeraden und t'_i zur Leitlinie hat.

§ 13.

Allgemeines über Constructionsaufgaben.

Wir gehen nun über zu Constructionsaufgaben von Raumcurven dritter und vierter Ordnung und Flächen dritter Ordnung, welche wir als die Bilder von Geraden, Kegelschnitten und Ebenen des Raumes Σ auffassen wollen. Es ist klar, dass unser dritter Specialfall auch Gelegenheit giebt, rationale Raumcurven vierter Ordnung als die Bilder von Kegelschnitten zu construiren, die zwei der Axen $s_1 s_2 s_3 s_4$ oder die zwei Transversalen $t_1 t_2$ von Σ, oder eine Axe und eine Transversale des Raumes schneiden. Schneidet der Kegelschnitt zwei der Axen, z. B. $s_1 s_2$, so wird das Bild desselben aus den beiden Geraden, welche den Schnittpunkten des Kegelschnittes mit den Axen $s_1 s_2$ entsprechen, ferner aus einem eigentlichen Bilde, welches als Rest eine rationale Raumcurve vierter Ordnung sein muss, bestehen. In unserm Falle besteht das uneigentliche Bild des Kegelschnittes aus einer Transversalen zu $s'_2 s'_3 s'_4$ und einer zu $s'_1 s'_3 s'_4$. Da nun im Allgemeinen einem Kegelschnitte von Σ eine Raumcurve sechster Ordnung, die jede der Axen $s'_1 s'_2 s'_3 s'_4$ viermal schneidet, entspricht, so folgt in unserm Falle, wo letztere Raumcurve zerfallen ist, dass das eigentliche Bild des Kegelschnittes $s'_1 s'_2$ zu Doppelsehnen, s'_3 und s'_4 aber nur zu einfachen Sehnen hat. Dies ergiebt sich indess auch aus directen Betrachtungen sofort.

Schneidet hingegen der Kegelschnitt die beiden Transversalen des Raumes Σ t_1 und t_2, so hat das eigentliche Bild aus gleichen Gründen $s'_1 s'_2 s'_3 s'_4$ zu Sehnen, $t'_1 t'_2$ zu Secanten.

Wenn schliesslich der Kegelschnitt eine Axe und eine Transversale schneidet, z. B. s_1 und t_1, so werden $s'_2 s'_3 s'_4$ Sehnen, t'_1 eine Secante und s'_1 eine Doppelsehne des Bildes.

Wir haben es somit in der Hand, solche Raumcurven vierter Ordnung, die zu vier Geraden $s'_1 s'_2 s'_3 s'_4$ und ihre beiden Transversalen $t'_1 t'_2$ in obiger Beziehung stehen, durch weitere Bestimmungsstücke festzulegen und zu construiren. Dass die Zahl der Lösungen der gestellten Aufgaben vollständig ist, ergiebt sich wie früher, indem man zeigt, dass alle rationalen Raumcurven vierter Ordnung, die den gegebenen Bedingungen genügen, Kegelschnitte zu Bilder haben.

Der Umstand, dass das Bild einer Geraden, welche eine der Axen des Raumes oder eine der Transversalen $t_1 t_2$ desselben schneidet, ein Kegelschnitt ist, ladet ebenso zu Constructionen ein. So entspricht z. B. einer Geraden, die s_1 schneidet, ein Kegelschnitt, der s'_1 zur Sehne, $s'_2 s'_3 s'_4$ aber zu Secanten hat. Schneidet hingegen die Gerade eine Transversale des Raumes, z. B. t_1, so entspricht der Geraden ein Kegelschnitt, der jede der Geraden $t'_1 s'_1 s'_2 s'_3 s'_4$ nur einmal schneidet. Also auch Kegelschnitte solcher Systeme sind uns nach Angabe weiterer Bestimmungsstücke zu construiren möglich. Indem wir die früheren Bezeichnungen so weit als möglich festhalten, beginnen wir mit Constructionen von Raumcurven und Flächen dritter Ordnung, die $s'_1 s'_2 s'_3 s'_4$ zu Sehnen haben, resp. enthalten. Aber auch bei Constructionen von Raumcurven vierter Ordnung und Kegelschnitten, die zu vier Geraden $s'_1 s'_2 s'_3 s'_4$ und ihren Transversalen in obiger Beziehung stehen, haben wir uns die Verwandtschaft so zu construiren, dass die Geraden $s'_1 s'_2 s'_3 s'_4$ die Axen des Raumes Σ' werden.

Drei Axen des Raumes Σ, die windschief zu einander zu liegen haben, können wir beliebig wählen. Dann weisen wir irgend drei Punkten einer der Axen des Raumes Σ' drei beliebige Transversale der drei Axen des Raumes Σ projectiv zu.

Damit ist nun die Verwandtschaft festgelegt und wir werden die weiteren Bestimmungsstücke des zu construirenden Gebildes nach Σ transformiren, welche nun so transformirt Bestimmungsstücke jener einfacheren Gebilde sind, deren Bilder uns die Lösungen liefern.

§ 14.

Constructionen von Raumcurven dritter Ordnung.

Die Construction der Raumcurve dritter Ordnung $C'_3(s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 P'_1 P'_2)$ reducirt sich auf die des Bildes der Geraden $P_1 P_2$.

Die Construction der Raumcurve dritter Ordnung $C_3(s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 s' P')$ reducirt sich auf die des Bildes der Sehne der Raumcurve dritter Ordnung s, welche vom Punkte P gezogen werden kann.

Die Construction der Raumcurve dritter Ordnung $C'_3(s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 s' s^{*\prime})$ reducirt sich auf die der sechs noch fehlenden gemeinschaftlichen Sehnen der beiden Raumcurven dritter Ordnung ss^*. Die Bilder dieser sechs Sehnen geben uns die verlangten Lösungen.† Wenn sich nur zwei der Sehnen, z. B. $s' s^{*\prime}$ schneiden, so bestehen nur vier eigentliche Lösungen; zwei sind zerfallen.

Denn jede eigentliche Lösung muss durch den Schnittpunkt von $s' s^{*\prime}$ gehen. Betrachten wir aber ss^*, so sehen wir, dass durch den entsprechenden Schnittpunkt (ss^*) nur vier gemeinsame Sehnen gehen. Die übrigen beiden gemeinschaftlichen Sehnen ausser $s_1 s_2 s_3 s_4$ von ss^* können daher nur zerfallene Raumcurven dritter Ordnung zu Bilder haben.

Es ist nun sehr leicht, die beiden zerfallenen Raumcurven dritter Ordnung, von denen $s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 s' s^{*\prime}$ Sehnen sind, direct zu construiren. Nennen wir die beiden Transversalen von $s'_1 s'_2 s'_3 s'_4$ $t'_1 t'_2$, so sind die beiden zerfallenen Raumcurven dritter Ordnung: t'_1 mit dem Kegelschnitte in der Ebene $s' s^{*\prime}$, der $t'_1 s'_1 s'_2 s'_3 s'_4$ und: t'_2 mit dem Kegelschnitte in der Ebene $s' s^{*\prime}$, der $t'_2 s'_1 s'_2 s'_3 s'_4$ schneidet. Die Bilder dieser zerfallenen Raumcurven liefern uns aber die noch fehlenden zwei gemeinschaftlichen Sehnen von ss^*. Da nun zu diesen Bildern t_1 und t_2 gehören, so ergiebt sich:

Zwei sich in einem Punkte schneidende Raumcurven dritter Ordnung haben ausser den vier gemeinschaftlichen Sehnen, die durch den Schnittpunkt gehen, noch sechs, die sich so verhalten, dass stets eine Transversale von vieren derselben eine fünfte schneidet.

Die Construction der Raumcurve dritter Ordnung $C'_3(s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 \overline{b' B'})$ reducirt sich auf die des Bildes der Tangenten von b in B.

Die Construction der Raumcurve dritter Ordnung $C'_3(s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 b' l')$ reducirt sich auf die der Bilder jener Tangenten von b, die von l geschnitten werden. Die Aufgabe ist also zwölften Grades.

Die Construction der Raumcurve dritter Ordnung $C'_3(s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 \overline{s' A'}\, l')$†† reducirt sich auf die der Sehnen von s, die durch A gehen und l schneiden. Wir erhalten sechs Lösungen.

---

† Damit sind die beiden Sätze Cremona's: „zwei Raumcurven dritter Ordnung haben zehn gemeinschaftliche Sehnen, und es giebt sechs Raumcurven dritter Ordnung, die sechs beliebige Gerade zu Sehnen haben“, auf einander zurückgeführt.

†† $\overline{s' A'}$ bedeutet eine Sehne mit einem Schnittpunkt A' mit der zu construirenden Raumcurve dritter Ordnung.

§ 15.

Constructionen von rationalen Raumcurven vierter Ordnung.

Wir wollen nun einige Beispiele für Constructionen von Raumcurven vierter Ordnung als Bilder von Kegelschnitten des Raumes Σ geben, die zwei der Axen oder Transversalen des Raumes Σ schneiden. Wir wollen dabei die Bezeichnungen festhalten: $s's'_i$ sollen Sehnen der Raumcurve bezeichnen, $\overline{(3s'_i)}$ eine Doppelsehne, b'^3_i eine Tangente mit dreipunktiger Berührung, $\overline{b'_iB'_i}$ eine Tangente mit dem Berührungspunkt derselben. P'_i einen Punkt der Raumcurve, $l'_it'_i$ einfach schneidende Gerade. Wenn t'_i als einfach schneidende Gerade der zu construirenden Raumcurve auftritt, so ist sie eine Transversale von den immer gegebenen vier Geraden $s'_1s'_2s'_3s'_4$. C'_3 endlich soll bezeichnen, dass die zu suchende Raumcurve vierter Ordnung die Raumcurve dritter Ordnung C'_3 zweimal schneidet. C'_3 hat $s'_1s'_2s'_3s'_4$ zu Sehnen.

Die Construction der rationalen Raumcurve vierter Ordnung $C'_4[(3s'_1)(3s'_2)s'_3s'_4P'_1P'_2P'_3]$ ist eindeutig zurückgeführt auf die Construction des Bildes des Kegelschnittes, der durch $P_1P_2P_3$ geht und s_1s_2 schneidet.

Die Construction der rationalen Raumcurve vierter Ordnung $C'_4[(3s'_1)(3s'_2)s'_3s'_4s'C'_3P']$ besteht zunächst in der der Ebene PC_3.* In derselben haben wir dann einen Kegelschnitt, der durch P und zwei Schnittpunkte von s und jene von s_1s_2 geht, zu legen. Die Bilder der drei möglichen Kegelschnitte lösen die Aufgabe.

Die Construction der rationalen Raumcurve vierter Ordnung $C'_4[(3s'_1)(3s'_2)s'_3s'_4\overline{b'^3B'}]$ verlangt die des Kegelschnittes, der s_1s_2 schneidet und die Raumcurve b in B osculirt.

Die Construction der rationalen Raumcurve vierter Ordnung $C'_4(s'_1s'_2s'_3s'_4t'_1t'_2P'_1P'_2P'_3)$ reducirt sich auf die des Bildes des Kegelschnittes, der durch $P_1P_2P_3$ geht und t_1t_2 schneidet. Auf ähnliche Weise lassen sich die rationalen Raumcurven vierter Ordnung $C'_4(s'_1s'_2s'_3s'_4t'_1t'_2\overline{b_1^3B'})$, $C'_4[(3s'_1)s'_2s'_3s'_4t'_1P'_1P'_2P'_3]$, $C'_4[(3s'_1)s'_2s'_3s'_4t'_1\overline{b_1^3B'}]$ construiren u. s. w.

§ 16.

Constructionen von Flächen dritter Ordnung.

Wir gehen nun zu Constructionsaufgaben von Flächen dritter Ordnung, die die vier windschiefen Geraden $s'_1s'_2s'_3s'_4$ enthalten. Wir gebrauchen dabei die Bezeichnungen der früheren Constructionen und begnügen uns gleich früher mit einer blossen Skizzirung.

---

* C_3 bedeutet eine Gerade und ist das Bild der Raumcurve dritter Ordnung C'_3, die $s'_1s'_2s'_3s'_4$ zu Sehnen hat.

Die Construction der Fläche dritter Ordnung $F'_3(s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 P'_1 P'_2 P'_3)$ reducirt sich auf die des Bildes der Ebene $(P_1 P_2 P_3)$.

Die Construction der Fläche dritter Ordnung $F'_3(s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 b'_1 P'_1 P'_2)$ reducirt sich auf die der Bilder der vier Berührungsebenen von $P_1 P_2$ an die Raumcurve dritter Ordnung b_1.

Die Construction der Fläche dritter Ordnung $F'_3(s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 b'_1 b'_2 P')$ reducirt sich auf die der Bilder der gemeinsamen Tangentialebenen der beiden Kegel vierter Classe (Pb_1) (Pb_2).

Die Construction der Fläche dritter Ordnung $F'_3(s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 b'_1 b'_2 b'_3)$ reducirt sich auf die der Bilder der gemeinsamen Berührungsebenen von $b_1 b_2 b_3$.

Die Construction der Fläche dritter Ordnung $F'_3(s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 \overline{h' B'})$ verlangt die des Bildes der Schmiegungsebene von h* in B.

Die Construction der Fläche dritter Ordnung $F'_3(s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 h' P')$ reducirt sich auf die der Bilder der drei Schmiegungsebenen, die von P an h gehen.

Die Construction der Fläche dritter Ordnung $F'_3(s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 P'_1 P'_2 \pi')$ reducirt sich auf die der Bilder der Berührungsebenen von $P_1 P_2$ an π.

Die Construction der Fläche dritter Ordnung $F'_3(s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 \pi'_1 \pi'_2 P')$ verlangt die der Bilder der gemeinsamen Berührungsebenen von P zu $\pi_1 \pi_2$. Aehnlich löst sich die Construction der Fläche dritter Ordnung $F'_3(s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 \pi'_1 \pi'_2 \pi'_3)$.

Die Construction der Fläche dritter Ordnung $F'_3(s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 \pi'_1 h')$ reducirt sich auf die der Bilder der gemeinsamen Berührungsebenen der Tangentenfläche von h und der Fläche dritter Ordnung π. Ebenso ergiebt sich die Construction der Fläche dritter Ordnung $F'_3(s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 \pi'_1 b'_1 b'_2)$ u. s. w.

Capitel V.

Vierter Specialfall.

§ 17.

Wir gehen nun zu einem weiteren Fall der Verwandtschaft über (s. lithogr. Tafel Fig. 7). Die drei Axen des Raumes Σ legen wir in eine Ebene und ebenso die des Raumes Σ'.**

Der Ebene $(s_1 s_2 s_3)$, die wir mit s_{123} bezeichnen wollen, entspricht in Σ' der Punkt S'_{123}. Ebenso entspricht der Ebene $(s'_1 s'_2 s'_3) = s'_{123}$ in Σ ein Punkt, den wir mit S_{123} bezeichnen. Wir haben somit durch die Schnittpunkte der drei Axen und den Punkt, der der Ebene der Axen des andern Raumes entspricht, in jedem der Räume Σ und Σ' vier Punkte,

* h' bedeutet, wie früher, eine Haupttangente der Fläche F'_3.

** Vergl. Noether's „Eindeutige Raumtransformationen" in den Math. Annalen, Bd. 3.

die ein Tetraeder, das Haupttetraeder des bezüglichen Raumes bilden, bekommen. Wir wollen die Kanten des Haupttetraeders im Raume Σ mit $s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6$ bezeichnen. Und zwar sollen den Kanten $s_1 s_2 s_3$ respective die Kanten $s_4 s_5 s_6$ gegenüberliegen. Ganz analog soll dies auch im Raume Σ' gelten.

Es ergiebt sich nun sofort:

Zwei Kanten des Haupttetraeders, die sich nicht schneiden, entsprechen im andern Raume die mit gleichen Indices versehenen Kanten, aber in verkehrter Reihenfolge.

Jedem Punkte einer Kante entspricht im andern Raume die letzterer entsprechende Kante.

Wenn wir jede Tetraederecke als einen Hauptpunkt und nach den Indices der Kanten der gegenüberliegenden Fläche $(s_i s_k s_l)$ mit S_{ikl} bezeichnen, und jede Ebene der drei Kanten $s_i s_k s_l$ eine Hauptebene nennen und analog im Raume Σ', so ergiebt sich:

Jedem Hauptpunkt des einen Raumes entspricht im andern Raume die mit gleichem Index bezeichnete Hauptebene.

Studiren wir das Bild einer Ebene E durch irgend eine der drei Kanten $s_4 s_5 s_6$, z. B. s_4, so wissen wir, dass den beiden Hauptpunkten dieser Kante s_4 zwei Hauptebenen des andern Raumes entsprechen. Somit kann das eigentliche Bild der Ebene nur wieder eine Ebene sein. E schneidet nun s_1 in einem Punkte, welchem die Kante s'_4 entspricht, somit geht E' durch s'_4.

Betrachten wir nun vier Ebenen durch s_4, so entsprechen diesen vier Ebenen durch s'_4, und da die ersteren vier Ebenen irgend eine Gerade, deren Bild in Σ' eine Raumcurve dritter Ordnung ist, die durch die Hauptpunkte geht, in vier Punkten schneiden, deren entsprechende von jeder der drei Axen $s'_1 s'_2 s'_3$ unter demselben Doppelverhältniss projicirt werden, als die Axen $s_1 s_2 s_3$ die ursprünglichen Punkte projiciren, so folgt, dass der Ebenenbüschel mit der Axe s_4 in Σ' einen Ebenenbüschel mit der Axe s'_4 zum Bilde hat, welcher mit ersterem projectiv ist.

Es ergiebt sich somit:

Jedem Ebenenbüschel des Raumes Σ, welcher eine der Kanten dieses Raumes zur Axe hat, entspricht ein projectiver Ebenenbüschel mit der Kante als Axe, die mit ersterer gleichen Index hat, und umgekehrt.

Suchen wir das Bild einer beliebigen Ebene E des Raumes Σ, so entsprechen den Schnittpunkten von E mit den sechs Kanten $s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6$ die sechs Kanten des andern Raumes, und da das Bild der Ebene nach Früherem eine Fläche dritter Ordnung ist, so folgt:

Einer beliebigen Ebene eines Raumes entspricht im andern Raume eine Fläche dritter Ordnung, die die sechs Kanten desselben und somit die vier Hauptpunkte als Doppelpunkte enthält.

Ebenso gilt die Umkehrung dieses Satzes:

Einer Ebene durch einen der Hauptpunkte S_{ikl} entspricht im andern Raume ein Kegel zweiter Ordnung, der S'_{ikl} zur Spitze hat und die übrigen Hauptpunkte enthält.

Betrachten wir das Bild einer beliebigen Curve des Raumes Σ, so ergiebt sich, da jedem Schnittpunkte der Curve mit einer Hauptebene der entsprechende Hauptpunkt des andern Raumes entspricht:

Einer Curve n^{ter} Ordnung des Raumes Σ entspricht eine von der Ordnung $3n$ in Σ', die die Hauptpunkte des letzteren Raumes zu $n$fachen Punkten hat, und umgekehrt.

Einer Geraden des Raumes Σ, welche eine der Kanten desselben schneidet, entspricht ein Kegelschnitt, der die zu letzterer entsprechende Kante einmal und die Kante des Raumes Σ', die mit der von g geschnittenen gleichen Index hat, in den Hauptpunkten schneidet.

Einer Geraden g des Raumes Σ, die zwei gegenüberliegende sich nicht schneidende Kanten schneidet, entspricht eine Gerade in Σ', die die beiden entsprechenden Kanten schneidet.

Jeder Geraden durch einem der Hauptpunkte entspricht eine Gerade durch den gleichnamigen Hauptpunkt.

§ 18.

Ueber Constructionsaufgaben.

Wir wollen nun diesen Specialfall zu einigen Constructionen verwenden. Wir werden die vier Hauptpunkte des Raumes Σ, da diese bei Constructionen von Raumcurven dritter Ordnung als Punkte, und bei Constructionen von Flächen dritter Ordnung als Doppelpunkte derselben immer auftreten, kurz mit $H'_1 H'_2 H'_3 H'_4$ bezeichnen, wo dann diese Buchstaben einfache oder Doppelpunkte bezeichnen, je nachdem sie bei Raumcurven oder Flächen dritter Ordnung benutzt werden.

Da somit die Verwandtschaft nur Constructionen zulässt, wo $H'_1 H'_2 H'_3 H'_4$ in obiger Bedeutung vorkommen, so müssen also von einer zu construirenden Raumcurve dritter Ordnung stets vier Punkte und von einer zu construirenden Fläche dritter Ordnung stets vier Doppelpunkte gegeben sein.

Wir werden dann immer diese vier Punkte im Raume Σ' als Hauptpunkte wählen und die weiteren Bestimmungsstücke des zu construirenden Gebildes in Σ' nach Σ transformiren, wo dann dieselben Bestimmungsstücke

von zu construirenden Geraden und Ebenen werden, wodurch eben die Aufgabe reducirt wird. Der Raum Σ muss der Verwandtschaft entsprechend fixirt werden.

§ 19.

Constructionen von Raumcurven dritter Ordnung.

Die Construction der Raumcurve dritter Ordnung $C'_3(H'_1H'_2H'_3H'_4P'_1P'_2)$ reducirt sich auf die des Bildes der Geraden P_1P_2.

Die Construction der Raumcurve dritter Ordnung $C'_3(H'_1H'_2H'_3H'_4P's')$ reducirt sich auf die der Sehne von P an s.

Die Construction der Raumcurve dritter Ordnung $C'_3(H'_1H'_2H'_3H'_4P'l'_1l'_2)$ besteht in der der einfachen Secanten von P zu l_1 und l_2. Da die Geraden, die von P zu den Hauptpunkten von Σ gehen, keine Lösungen geben, so haben wir nur fünf Lösungen.

Die Construction der Raumcurve dritter Ordnung $C'_3(H'_1H'_2H'_3H'_4P'l'\pi')$ reducirt sich auf die der gemeinsamen Strahlen der beiden Kegel (Pl) und $(P\pi)$. Da durch die Hauptpunkte von Σ doppelt zu zählende gemeinsame Strahlen der Kegel gehen, die keine Lösungen geben, so haben wir zehn Lösungen der Aufgabe.

Die Construction der Raumcurve dritter Ordnung $C'_3(H'_1H'_2H'_3H'_4s'l'\pi')$ verlangt die der Sehnen von s, die l schneiden und π berühren.

Die Construction der Raumcurve dritter Ordnung $C'_3(H'_1H'_2H'_3H'_4b'l')$ reducirt sich auf die der Tangenten von b, die l schneiden, wobei wieder diejenigen Tangenten auszuschliessen sind, deren Bilder zerfallen.

Die Construction der Raumcurve dritter Ordnung $C'_3(H'_1H'_2H'_3H'_4P'\pi'^2)$ reducirt sich auf die der sechs Haupttangenten von P an π.*

Ist statt P' der Osculationspunkt von π' gegeben, so hat die Aufgabe nur zwei Lösungen.

Aehnlich reduciren sich die Constructionen der Raumcurven dritter Ordnung $C'_3(H'_1H'_2H'_3H'_4P'\pi'_1\pi'_2)$, $C'_3(H'_1H'_2H'_3H'_4P'\overline{\pi'l'})$, $C'_3(H'_1H'_2H'_3H'_4s'\pi'_1\pi'_2)$, $C'_3(H'_1H'_2H'_3H'_4s'\pi'^2)$.

Die Construction der Raumcurve dritter Ordnung $C'_3(H'_1H'_2H'_3H'_4l'_1l'_2l'_3l'_4)$, wobei die vier gegebenen einfachen Secanten $l'_1l'_2l'_3l'_4$ sich in einem Punkte schneiden sollen, reducirt sich auf die der gemeinschaftlichen Secanten der Raumcurven dritter Ordnung $l_1l_2l_3l_4$, welche fünf Punkte, wovon vier die Hauptpunkte von Σ, gemein haben.** Es ist wohl leicht einzusehen, dass diese Aufgabe mit jener identisch ist, die die Construction der ebenen Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt aus acht

* Siehe „Abzählende Geometrie von Schubert, pag. 180." Leipzig 1879.

** Aus der folgenden Aufgabe ist ersichtlich, dass vier Raumcurven dritter Ordnung, die fünf Punkte gemein haben, zwölf gemeinschaftliche Secanten besitzen.

gegebenen einfachen Punkten verlangt. Denn wir können von letzteren acht Punkten drei $H'_1 H'_2 H'_3$ zu Hauptpunkten des Raumes Σ' nehmen. Dann nehmen wir irgend einen Punkt des Raumes Σ' als ein Projectionscentrum und projiciren die übrig gebliebenen fünf Punkte. In einem solchen Projectionsstrahl nehmen wir den vierten Hauptpunkt des Raumes Σ' an. Die weitere Construction der Verwandtschaft verlangt nur noch die Existenz von vier Hauptpunkten im Raume Σ, die nach Belieben gewählt werden können. Die Raumcurven dritter Ordnung nun, die die vier Hauptpunkte des Raumes Σ' enthalten und die die vier noch übrig bleibenden Projectionsstrahlen zu einfachen Secanten haben, liefern als Projectionen von jenem beliebig angenommenen Projectionscentrum die gesuchten ebenen Curven dritter Ordnung.

§ 20.

Ueber Constructionen von rationalen Raumcurven vierter Ordnung.

Es ergiebt sich durch Specialisirung:

Einem Kegelschnitt des einen Raumes entspricht im andern Raum eine Raumcurve sechster Ordnung, die die Hauptpunkte desselben zu Doppelpunkten hat, und umgekehrt.

Schneidet aber der Kegelschnitt zwei der Kanten des Haupttetraeders, z. B. s_1 und s_2, so entspricht dem Kegelschnitte als eigentliches Bild eine Raumcurve vierter Ordnung, die S'_{345} zum Doppelpunkt, S'_{246} S'_{156} zu einfachen Punkten und $s'_4 s'_5$ zu Sehnen hat. Letzteres ist der Fall, weil s'_4 und s'_5 als uneigentliche Bilder vom Kegelschnitte auftreten.

Wir haben es daher in der Hand, Raumcurven vierter Ordnung zu construiren, wenn von denselben der Doppelpunkt, zwei einfache Punkte, von welchen zwei sich schneidende Sehnen auslaufen, und weitere festlegende Bedingungen gegeben sind. Z. B. erhalten wir eine einzige Lösung, wenn von der Raumcurve vierter Ordnung noch weitere drei Punkte gegeben sind. Schneidet nun ein Kegelschnitt des Raumes Σ zwei gegenüberliegende Kanten des Haupttetraeders, z. B. s_2 und s_5, so entspricht diesem, da $s'_2 s'_5$ als uneigentliche Bilder auftreten, eine rationale Raumcurve vierter Ordnung, die durch die vier Hauptpunkte des Raumes Σ' geht und die Kanten $s'_2 s'_5$ zu Doppelsehnen besitzt.

Wir haben es somit in der Hand, derartige Raumcurven vierter Ordnung zu construiren. So ist z. B. die Construction einer rationalen Raumcurve vierter Ordnung, wenn von derselben sieben Punkte mit der Bestimmung gegeben sind, dass die Verbindungslinie von zwei Paaren dieser Punkte Doppelsehnen sind, eindeutig und leicht zu ersehen.

§ 21.

Constructionen von Flächen dritter Ordnung.

Wir wollen schliesslich noch einige Constructionen von Flächen dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten $H'_1 H'_2 H'_3 H'_4$ kurz andeuten.

Die Construction der Fläche dritter Ordnung $F'_3(H'_1 H'_2 H'_3 H'_4 P'_1 P'_2 P'_3)$ reducirt sich auf die des Bildes der Ebene $P_1 P_2 P_3$.

Die Construction der Fläche dritter Ordnung $F'_3(H'_1 H'_2 H'_3 H'_4 b'_1 \overline{b' B'})$ verlangt die der vier Ebenen, die durch die Tangente von b in B an die Raumcurve dritter Ordnung b_1 gehen. Die Bilder dieser Ebenen lösen die Aufgabe.

Diesen Methoden analog lösen sich die Constructionen der Flächen dritter Ordnung:

$$F'_3(H'_1 H'_2 H'_3 H'_4 P'_1 P'_2 b'),$$
$$F'_3(H'_1 H'_2 H'_3 H'_4 P' b'_1 b'_2),$$
$$F'_3(H'_1 H'_2 H'_3 H'_4 h' P'),$$
$$F'_3(H'_1 H'_2 H'_3 H'_4 P'_1 P'_2 \pi'_1),$$
$$F'_3(H'_1 H'_2 H'_3 H'_4 \pi'_1 \pi'_2 \pi'_3)$$

u. s. w.

§ 22.

Ueber Kegelschnittconstructionen.

Dass sich mit dieser Verwandtschaft Kegelschnittconstructionen im Raume ausführen lassen, geht aus einem der obigen Sätze hervor, der über das Bild einer Geraden Auskunft giebt, die eine der Kanten schneidet. Immer müssen aber von dem zu construirenden Kegelschnitt zwei Punkte $H_i H_k$ und eine Secante s_l gegeben sein. So z. B. sind Lösungen leicht ersichtlich, wenn von dem zu construirenden Kegelschnitte zwei Punkte und vier Secanten gegeben sind. Sie ergeben sich als die Bilder von Geraden, die eine der Tetraederkanten und drei Raumcurven dritter Ordnung einfach schneiden. Letztere schneiden sich in vier Punkten.

§ 23.

Schluss.

Wir hätten nun, um eine vollständige Untersuchung der Verwandtschaft der drei Paar Ebenenbüschel zu geben, die Axen der beiden Räume in die noch möglichen speciellen Lagen zu bringen und die dadurch gegebenen neuen Specialfälle zu untersuchen.

Die drei Axen eines Raumes können folgende vier wesentlich verschiedene Lagen haben:

1. Alle drei Axen liegen windschief.
2. Zwei von den drei Axen schneiden sich.
3. Die drei Axen schneiden sich in drei Punkten.
4. Die drei Axen schneiden sich in zwei Punkten.
5. Die drei Axen schneiden sich in einem Punkte.

Wir haben die Fälle 1) und 3) in den Räumen Σ und Σ' ausführlich behandelt, es wären nun noch die Fälle 2), 4), 5) in Σ anzunehmen und mit den Fällen 1) bis 5) in Σ' zu combiniren, um das Gebiet dieser Verwandtschaften zu erschöpfen. Alle diese Verwandtschaften bieten, wie die behandelten, so manche interessante Seite und zeigen sich durch ihre grosse Durchsichtigkeit zu Constructionsaufgaben und Untersuchungen von Curven- und Flächensystemen insbesondere sehr geeignet. Wir begnügen uns für jetzt indess mit dem Gegebenen und möchten nur auf letztere Specialfälle aufmerksam gemacht haben.

III.

Die algebraische Transformation der doppeltperiodischen Functionen.

Von

W. Veltmann,

Docent an der landwirthschaftlichen Akademie zu Poppelsdorf.

Lithogr. Tafel Fig. 8—10.

Der allgemeinen algebraischen Transformation der doppeltperiodischen Functionen wird gewöhnlich die rationale Transformation zu Grunde gelegt. Zwei rationale Transformationen, die eine im directen, die andere im umgekehrten Sinne ausgeführt, stellen zusammen eine beiderseits irrationale Transformation dar. Man kann jedoch auch unter Benutzung gewisser functionentheoretischer Sätze unmittelbar zu der betreffenden allgemeinen algebraischen Beziehung gelangen, wie im Folgenden gezeigt werden soll.

I. Eine Function $f(x)$ sei doppeltperiodisch nach den Intervallen K und L. Die Summe zweier Werthe von x, für welche $f(x)=0$ wird, sei $= s + n_i K + n_i L$, wo s eine bestimmte Grösse, n_i ein Zeichen für den Ausdruck „ganze Zahl" ist. Für eine andere doppeltperiodische Function $\varphi(x)$ sollen s', K', L' dieselbe Bedeutung haben. Es sollen die Bedingungen ermittelt werden, unter welchen $f(x)$ und $\varphi(x)$ durch eine algebraische Gleichung verbunden sind und die Form dieser Gleichung bestimmt werden.

Damit $f(x)$ und $\varphi(x)$ durch eine algebraische Gleichung verbunden seien, welche in $f(x)$ vom m^{ten}, in $\varphi(x)$ vom n^{ten} Grade ist, ist es nothwendig und genügend, dass $f(x)$ eine m deutige Function von $\varphi(x)$ und $\varphi(x)$ eine n deutige Function von $f(x)$ sei. $\varphi(x)$ möge den besonderen Werth $\varphi(x_1)$ haben. wo x_1 irgend eine willkürlich gewählte Grösse ist. Um alle zugehörigen Werthe von $f(x)$ zu erhalten, hat man diejenigen Werthe von x zu ermitteln, für welche $\varphi(x)$ denselben Werth $\varphi(x_1)$ erhält, und diese in $f(x)$ einzusetzen.

Den Werth $\varphi(x_1)$ erhält $\varphi(x)$ nun auch für

$$x = x_1 + m'K' + n'L'$$

und für

$$x = s' - x_1 + m'K' + n'L',$$

m' und n' beliebige ganze Zahlen. Setzt man diese Argumente in $f(x)$ ein, so erhält man sämmtliche Werthe von $f(x)$ für $\varphi(x) = \varphi(x_1)$, nämlich:

1) $$f(x_1 + m'K' + n'L') = f_1,$$

2) $$f(s' - x_1 + m'K' + n'L') = f_2.$$

Ein Werth f_1 mit $m' = g$, $n' = h$ und ein Werth f_2 mit $m' = p$, $n' = q$ sind gleich, wenn entweder

3) $$-s' + 2x_1 + (g-p)K' + (h-q)L' = n_i K + n_i L$$

oder

4) $$s' + (g+p)K' + (h+p)L' = s + n_i K + n_i L$$

ist. Die Gleichung 3) kann nicht für jedes x_1 stattfinden, wohl aber 4).

In letzterem Falle sind dann aber nicht blos jene beiden Werthe einander gleich. Denn wenn man in f_1 $m' = g'$, $n' = h'$ setzt, wo g' und h' beliebige ganze Zahlen, so erhält man einen demselben gleichen Werth von f_2, wenn man in f_2 $m' = p + g - g'$, $n' = g + h - h'$ setzt. Es ist somit jeder Werth von f_1 einem Werthe f_2 und ebenso jeder Werth f_2 einem Werthe f_1 gleich. Je nachdem also eine Gleichung 4), d. h. eine Gleichung von der Art

5) $$s + kK + lL = s' + k'K' + l'L',$$

wo k, l, k', l' irgend welche ganze Zahlen sind, existirt oder nicht, stimmen f_1 und f_2 in allen oder in keinen Werthen überein.

In beiden Fällen aber muss, damit die Zahl der in f_1 enthaltenen verschiedenen Werthe von x eine endliche sei, bei constantem n' und stets um 1 wachsenden m' irgend einmal ein früherer Werth f_1 wiederkehren.

Sind m'_1 und m'_2 die betreffenden Werthe von m', so muss also entweder

6) $$(m'_2 - m'_1)K' = n_i K + n_i L$$

oder

7) $$2x_1 + (m'_1 + m'_2)K' + 2n'L' = n_i K + n_i L$$

sein. Die Gleichung 7) kann nicht für jedes x_1 stattfinden, wohl aber 6).

Da nun Gleiches für n' gilt, so müssen zwei Gleichungen bestehen von der Art:

8) $$k'K' = n_i K + n_i L,$$

9) $$l'L' = n_i K + n_i L,$$

wo k' und l' ganze von 0 verschiedene Zahlen sind. Und umgekehrt, sobald zwei solche Gleichungen existiren, ist die Anzahl der in f_1 enthaltenen Werthe eine endliche. Zu eben solchen Gleichungen wie 8) und 9) führt die Forderung, dass auch f_2 eine endliche Anzahl Werthe liefere. In allgemeinerer Form müssen als nothwendige und genügende Bedingung für eine endliche Anzahl Werthe f_1 und f_2 zwei Gleichungen bestehen von der Art:

10) $$k'K' + l'L' = kK + lL,$$

11) $$k'_1K' + l'_1L' = k_1K + l_1L,$$

wo $k', l', k'_1, l'_1, k, l, k_1, l_1$ beliebige ganze Zahlen sind, jedoch mit der Einschränkung, dass die Determinante der Coefficienten $k'l'_1 - k'_1l'$ nicht $= 0$ sein darf, da die Gleichungen sonst nicht mit solchen von der Art 8) und 9) gleichbedeutend sein könnten.

Ganz auf dieselbe Weise ergeben sich die Bedingungen dafür, dass $\varphi(x)$ für einen bestimmten Werth $f(x_1)$ von $f(x)$ eine endliche Anzahl verschiedener Werthe erhalte. Für $f(x) = f(x_1)$ erhält $\varphi(x)$ die Werthe

12) $$\varphi(x_1 + mk + nL) = \varphi_1,$$

13) $$\varphi(s - x_1 + mK + nL) = \varphi_2,$$

wo für m und n alle ganzen Zahlen zu setzen sind. φ_1 und φ_2 stimmen entweder in allen oder in keinen Werthen überein und die Bedingung für ersteres ist die (rückwärts gelesene) Gleichung 5).

Damit ferner sowohl in φ_1 als in φ_2 eine endliche Anzahl Werthe enthalten seien, müssen zwei Gleichungen:

$$kK + lL = n_iK' + n_iL',$$
$$k_1K + l_1L = n_iK' + n_iL'$$

bestehen derart, dass die Determinante $kl_1 - k_1l$ nicht $= 0$ ist. Solche sind aber die Gleichungen 10) und 11); denn wenn in diesen die Determinante $kl_1 - k_1l = 0$ wäre, so würde aus 10) und 11) folgen

$$(k_1k' - kk'_1)K' + (k_1l' - kl'_1)L' = 0.$$

Da K' und L' kein reelles Verhältniss haben, so würden die Coefficienten von K' und L' einzeln $= 0$ sein, mithin

$$\frac{k_1}{k} = \frac{k'_1}{k'} = \frac{l'_1}{l'},$$

also $k'l'_1 - k'_1l' = 0$, d. h. es wäre dann auch die Determinante der Coefficienten von K' und L' in 10) und 11) der Null gleich. Demnach kann nur gleichzeitig $f(x)$ für jeden Werth von $\varphi(x)$ und $\varphi(x)$ für jeden Werth von $f(x)$ eine endliche Anzahl verschiedene Werthe haben und die Bedingungen hierfür sind Gleichungen von der Art 10) und 11), in welchen auf beiden Seiten die Determinanten nicht $= 0$ sind. Ebenso stellt, wie schon bemerkt, eine und dieselbe Gleichung 5) die Bedingung dafür dar, dass sowohl f_1 und f_2 in Gleichung 1) und 2), als auch φ_1 und φ_2 in Gleichung 12) und 13) in allen Werthen übereinstimmen.

II. In I. ist gezeigt, dass, wenn $f(x)$ und $\varphi(x)$ durch eine algebraische Gleichung verbunden sind, zwei Gleichungen

14) $$kK + lL = k'K' + l'L',$$

15) $$k_1K + l_1L = k'_1K' + l'_1L'$$

bestehen derart, dass die beiden Determinanten $\begin{vmatrix} k & l \\ k_1 & l_1 \end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix} k' & l' \\ k'_1 & l'_1 \end{vmatrix}$ nicht $= 0$ sind. Wir nennen diese Determinanten die Hauptdeterminanten der beiden Gleichungen. Letztere, welche Grundgleichungen der Transformation heissen mögen, stellen K und L als Functionen von K' und L' und umgekehrt dar. Vergleicht man sämmtliche Paare von Grundgleichungen, welche ein und dieselbe Beziehung zwischen K und L einerseits und K' und L' andererseits enthalten, so wird die Hauptdeterminante links in denselben verschiedene Werthe haben. Wir nennen die Paare von Grundgleichungen mit kleinster Determinante reducirte Grundgleichungen. Es soll jetzt gezeigt werden, dass jedes Paar von Grundgleichungen aus irgend einem reducirten Paare mittels ganzen Coefficienten linear zusammengesetzt werden kann.

Die Gleichungen 14) und 15) mögen ein reducirtes Paar darstellen. Irgend ein anderes Paar sei

16) $$\mu K + \nu L = \mu' K' + \nu' L',$$

17) $$\mu_1 K + \nu_1 L = \mu'_1 K' + \nu'_1 L'.$$

Unter α und β beliebige Coefficienten verstanden, folgt aus 14), 15) und 16):

18) $$(\alpha k + \beta k_1 - \mu)K + (\alpha l + \beta l_1 - \nu)L = (\alpha k' + \beta k'_1 - \mu')K' + (\alpha l' + \beta l'_1 - \nu')L'.$$

Man kann α und β so bestimmen, dass die Coefficienten von K und L hier $= 0$ werden. Aus demselben Grunde wie pag. 75 sind dann auch die Coefficienten von K' und $L' = 0$ und es entsteht also die Gleichung 16) aus 14) und 15), indem man 14) mit α, 15) mit β multiplicirt und addirt. Setzt man nun $\alpha = a + \xi$, $\beta = b + \eta$, wo a und b ganze Zahlen (0 nicht ausgeschlossen), ξ und η kleiner als 1, so wird die Gleichung 18):

$$[\xi k + \eta k_1 + (ak + bk_1 - \mu)]K + [\xi l + \eta l_1 + (al + bl_1 - \nu)]L$$
$$= [\xi k' + \eta k'_1 + (ak' + bk'_1 - \mu')]K' + [\xi l' + \eta l'_1 + (al' + bl'_1 - \nu')]L'.$$

Da die Cofficienten von K und $L = 0$ sind, so ist:

19) $$\xi = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & ak + bk_1 - \mu \\ l_1 & al + bl_1 - \nu \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & k_1 \\ l & l_1 \end{vmatrix}}, \quad \eta = \frac{\begin{vmatrix} ak + bk_1 - \mu & k \\ al + bl_1 - \nu & l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & k_1 \\ l & l_1 \end{vmatrix}}.$$

Aus 14), 15) und 16) folgt aber

20) $$(ak + bk_1 - \mu)K + (al + bl_1 - \nu)L = (ak' + bk'_1 - \mu')K' + (al' + bl'_1 - \nu')L'.$$

Der Zähler des Ausdruckes für ξ in 19) ist die Determinante der Gleichungen 15) und 20) links. Da $\xi < 1$, so ist also diese Determinante kleiner als diejenige von 14) und 15). Dieselbe kann aber dann nur $= 0$ sein; denn wäre sie es nicht, so würden 15) und 20) Grundgleichungen mit noch kleinerer Determinante sein als 14) und 15), gegen die Voraussetzung. Es ist demnach ξ und ebenso $\eta = 0$; obige Coefficienten α und β sind ganze Zahlen. Auf gleiche Weise folgt, dass Gleichung 17) aus 14) und 15) mittels ganzen Coefficienten α_1 und β_1 zusammengesetzt werden kann. Die Determinante $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta$ dieser vier Coefficienten ist mindestens $= 1$. Es ist nun nicht blos die Determinante der Gleichungen 16) und 17) links, sondern auch diejenige rechts das $(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)$fache derjenigen von 14) und 15), so dass also in einem reducirten Paare beide Determinanten den kleinsten Werth haben, und in weiterer Ausdehnung gilt dies von sämmtlichen Determinanten des Systems

$$\begin{matrix} k & l & k' & l', \\ k_1 & l_1 & k'_1 & l'_1. \end{matrix}$$

In einem Paare Grundgleichungen, welches kein reducirtes ist, haben demnach die sechs Determinanten einen gemeinsamen Factor. Existirt ein solcher nicht, so sind die Gleichungen nothwendig reducirte.

Es fragt sich nun, ob, wenn die Determinanten einen gemeinsamen Factor haben, nicht vielleicht dennoch die Gleichungen reducirte sein können. In den Gleichungen 14) und 15) mögen die Determinanten den gemeinsamen Primfactor τ haben. Derselbe ist entweder zugleich ein gemeinsamer Theiler von k und k_1, von l und l_1, von k' und k'_1, von l' und l'_1, oder er ist wenigstens von einem dieser Zahlenpaare kein gemeinsamer Theiler.

Im ersten Falle können beide Gleichungen durch τ dividirt und somit die Determinanten im Verhältniss $\tau^2 : 1$ verkleinert werden. In letzterem Falle sei z. B. τ kein gemeinsamer Theiler von k und k_1. Der grösste gemeinsame Theiler von k und k_1 sei $= t$, wo t möglicherweise $= 1$ ist. Wir setzen

$$21)\quad \begin{vmatrix} k & l \\ k_1 & l_1 \end{vmatrix} = tD_1; \quad \begin{vmatrix} k & k' \\ k_1 & k'_1 \end{vmatrix} = tD_2; \quad \begin{vmatrix} k & l' \\ k_1 & l'_1 \end{vmatrix} = tD_3.$$

Zwei ganze Zahlen x und y mögen bestimmt werden, so dass

$$22)\quad \begin{vmatrix} k & x \\ k_1 & y \end{vmatrix} = t,$$

was geschehen kann, weil t der grösste gemeinsame Theiler von k und k_1 ist. Löst man nun die Gleichungen 21) resp. nach l und l_1, k' und k'_1, l' und l'_1 allgemein diophantisch auf, so erhält man, unter n_1, n_2, n_3 beliebige ganze Zahlen verstanden:

$$l = D_1 x + n_1 \frac{k}{t}, \quad l_1 = D_1 y + n_1 \frac{k_1}{t};$$
$$k' = D_2 x + n_2 \frac{k}{t}, \quad k'_1 = D_2 y + n_2 \frac{k_1}{t};$$
$$l' = D_3 x + n_3 \frac{k}{t}, \quad l'_1 = D_3 y + n_3 \frac{k_1}{t};$$

wo nun, um die wirklichen Werthe von l, l_1, k', k'_1, l', l'_1 zu erhalten, für n_1, n_2, n_3 die entsprechenden besonderen Zahlen gesetzt werden müssen.

Setzt man dann diese Ausdrücke in die Gleichungen 14) und 15) ein, so werden letztere

$$23)\quad kK + \left(D_1 x + n_1 \frac{k}{t}\right) L = \left(D_2 x + n_2 \frac{k}{t}\right) K' + \left(D_3 x + n_3 \frac{k}{t}\right) L',$$

$$24)\quad k_1 K + \left(D_1 y + n_1 \frac{k_1}{t}\right) L = \left(D_2 y + n_2 \frac{k_1}{t}\right) K' + \left(D_3 y + n_3 \frac{k_1}{t}\right) L'.$$

Gleichung 23) mit k_1, 24) mit k multiplicirt und erstere von letzterer subtrahirt, liefert nach Division durch $ky - k_1 x$:

$$25)\quad D_1 L = D_2 K' + D_3 L'.$$

Diese Gleichung mit y multiplicirt und von 24) subtrahirt, giebt nach Multiplication mit $\frac{t}{k_1}$:

$$26)\quad tK + n_1 L = n_2 K' + n_3 L'.$$

Die Gleichungen 25) und 26) stellen eine Transformation von 14) und 15) dar, deren Determinante links $= tD_1$, also gleich derjenigen von 14) und 15) ist. Sämmtliche übrigen Determinanten sind daher ebenfalls unverändert geblieben, und es ist noch τ ein gemeinsamer Factor derselben. Drei dieser Determinanten sind aber $= tD_1$, tD_2, tD_3. Da nun t den Factor τ nicht enthält, so muss derselbe in D_1, D_2, D_3 enthalten sein, und es lässt sich daher die Gleichung 25) durch τ dividiren. Hierdurch werden sämmtliche Determinanten der beiden Gleichungen τ mal kleiner. Wenn dieselben jetzt noch einen gemeinsamen Theiler haben, so kann man auf gleiche Weise einen Primfactor des letzteren fortschaffen, und so fort, bis die Determinanten von dem gemeinsamen Theiler ganz befreit sind. Aus jedem Paar Grundgleichungen, dessen Determinanten einen gemeinsamen Factor haben, lässt sich demnach ein Paar ableiten, dessen Determinanten kleiner sind und keinen gemeinsamen Factor haben. Der Mangel eines solchen ist also nothwendige und genügende Bedingung, damit die Grundgleichungen reducirte seien.

Beliebige reducirte Grundgleichungen lassen sich nach eben demselben Verfahren, welches hier zur Ableitung derselben angewandt wurde, so um-

formen, dass in der einen Gleichung eins der vier Glieder fehlt, während das entsprechende Glied der andern Gleichung einen Coefficienten hat gleich dem grössten gemeinsamen Theiler der ursprünglichen Coefficienten dieser beiden Glieder. Denn die Gleichungen 25) und 26) sind in Bezug auf 14) und 15) von der hier angegebenen Beschaffenheit.

III. Nach I erhält $f(x)$ für einen bestimmten Werth $\varphi(x_1)$ von $\varphi(x)$ die Werthe

$$f_1 = f(x_1 + m'K' + n'L') = f_1^{m',n'},$$
$$f_2 = f(s' - x_1 + m'K' + n'L') = f_2^{m',n'},$$

und ebenso erhält $\varphi(x)$ für den Werth $f(x_1)$ von $f(x)$ die Werthe

$$\varphi_1 = \varphi(x_1 + mK + nL) = \varphi_1^{m,n},$$
$$\varphi_2 = \varphi(s - x_1 + mK + nL) = \varphi_2^{m,n}.$$

Vier Ebenen I, II, III, IV mögen in gleiche Quadrate getheilt und die Werthe f_1, f_2, φ_1, φ_2 in folgender Weise an den Ecken dieser Quadrate geordnet sein:

$$\text{I.}\quad \begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots f_1^{1,-1} & f_1^{1,0} & f_1^{1,1}\dots \\ \dots f_1^{0,-1} & f_1^{0,0} & f_1^{0,1}\dots \\ \dots f_1^{-1,-1} & f_1^{-1,0} & f_1^{-1,1}\dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix} \qquad \text{II.}\quad \begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots f_2^{1,-1} & f_2^{1,0} & f_2^{1,1}\dots \\ \dots f_2^{0,-1} & f_2^{0,0} & f_2^{0,1}\dots \\ \dots f_2^{-1,-1} & f_2^{-1,0} & f_2^{-1,1}\dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix}$$

$$\text{III.}\quad \begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots \varphi_1^{1,-1} & \varphi_1^{1,0} & \varphi_1^{1,1}\dots \\ \dots \varphi_1^{0,-1} & \varphi_1^{0,0} & \varphi_1^{0,1}\dots \\ \dots \varphi_1^{-1,-1} & \varphi_1^{-1,0} & \varphi_1^{-1,1}\dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix} \qquad \text{IV.}\quad \begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots \varphi_2^{1,-1} & \varphi_2^{1,0} & \varphi_2^{1,1}\dots \\ \dots \varphi_2^{0,-1} & \varphi_2^{0,0} & \varphi_2^{0,1}\dots \\ \dots \varphi_2^{-1,-1} & \varphi_2^{-1,0} & \varphi_2^{-1,1}\dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix}.$$

In irgend einer der Ebenen möge der Werth mit dem Index μ, ν der $(\mu, \nu)^{\text{te}}$ genannt werden. Die Ebenen I. und II., sowie III. und IV. werden parallel neben einander stehend gedacht, so dass die Verbindungslinie von irgend zwei Werthen mit gleichem Index auf beiden Ebenen senkrecht steht. Verbindet man zwei Quadratecken einer der Ebenen durch eine gerade Linie, so soll die Länge dieser Linie der Abstand, ihre Neigung gegen die Horizontale die gegenseitige Lage der beiden Werthe genannt werden. Wenn irgend zwei Werthe in derselben Ebene einander gleich sind, so sind auch je zwei andere gleich, welche denselben Abstand und dieselbe gegenseitige Lage haben. Aus den Gleichungen 14) und 15) folgt nun, dass sowohl in I als in II der $(0,0)^{\text{te}}$ Werth dem $(k', l')^{\text{ten}}$ und auch dem $(k'_1, l'_1)^{\text{ten}}$ Werthe gleich ist.

Construirt man das Parallelogramm (s. lithogr. Tafel Fig. 8), dessen Ecken die Werthe 0,0; k', l'; k'_1, l'_1; $k' + k'_1, l' + l'_1$ sind, und verschiebt dieses Parallelogramm längs der Diagonale AC ein wenig gegen A hin, so enthält dasselbe eine Anzahl Werthe, welche gleich dem Inhalte des Parallelogramms, gemessen durch eins der Quadrate, ist. Dieser Inhalt ist aber die Determinante $k'l'_1 - k'_1 l'$. Schliesst man an dieses Parallelogramm andere an, so dass die ganze Ebene mit denselben bedeckt ist, so sind irgend zwei ähnlich liegende Werthe in zwei Parallelogrammen einander gleich. Unter der Voraussetzung aber, dass die Gleichungen 14) und 15) reducirte sind, enthält jedes Parallelogramm lauter verschiedene Werthe.

Angenommen nämlich, irgend zwei in dem Parallelogramm $ABCD$ nach der Verschiebung desselben befindliche Werthe seien gleich; dann kann man die Verbindungslinie PQ der entsprechenden Quadrateckpunkte so verschieben, dass der Eckpunkt P mit einer Ecke des Parallelogramms in dessen ursprünglicher Lage zusammenfällt, während der Endpunkt Q in dem Parallelogramm liegt. Am Punkte Q befindet sich dann ein Werth, welcher dem in dem betreffenden Eckpunkte, mithin auch dem $(0,0)^{\text{ten}}$ Werthe gleich ist. Wenn demnach (μ', ν') der Werth in Q ist, so besteht eine Gleichung

27) $$\mu K + \nu L = \mu' K' + \nu' L'.$$

Bildet man nun aus der Linie von 0,0 nach μ', ν' und entweder AB oder AD ein Parallelogramm, so umschliesst dieses ebenfalls nach geringer Verschiebung Werthe, welche sich beständig wiederholen. Dieses Parallelogramm ist aber kleiner als $ABCD$, mithin auch die Anzahl der darin enthaltenen Werthe kleiner. Die Determinante von 14) und 27) oder von 15) und 27) ist also kleiner als die von 14) und 15); mithin wären letztere Gleichungen keine reducirten, gegen die Voraussetzung.

Entsprechendes gilt für III und IV. Die Determinante der Gleichungen 14) und 15) links $= kl_1 - k_1 l$ giebt die Zahl der in III oder IV enthaltenen verschiedenen Werthe an.

Entweder stimmt nun I mit II und III mit IV in allen oder in keinen Werthen überein, je nachdem eine Gleichung 5) stattfindet oder nicht. In ersterem Falle hat $f(x)$ für jeden Werth von $\varphi(x)$ eine Anzahl verschiedene Werthe $= k'l'_1 - k'_1 l'$ und $\varphi(x)$ für jeden Werth von $f(x)$ eine Anzahl verschiedene Werthe $= kl_1 - k_1 l$; in letzterem Falle ist die Anzahl beide Male die doppelte. Demnach wird die algebraische Gleichung zwischen $f(x)$ und $\varphi(x)$ in $f(x)$ vom $(k'l'_1 - k'_1 l')^{\text{ten}}$ und in $\varphi(x)$ vom $(kl_1 - k_1 l)^{\text{ten}}$ oder in $f(x)$ vom $2(k'l'_1 - k'_1 l')^{\text{ten}}$ und in $\varphi(x)$ vom $2(kl_1 - k_1 l)^{\text{ten}}$ Grade sein, je nachdem eine Gleichung 5) besteht oder nicht.

IV. Zwei Variabeln x und y mögen durch eine algebraische Gleichung verbunden sein, welche in x vom m^{ten}, in y vom n^{ten} Grade ist. Zu einem Werthe x_1 von x mögen die n verschiedenen Werthe $y_1, y_2, \dots y_n$ und zu jedem der letzteren m verschiedene Werthe von x gehören. Die Gleichung kann nun die besondere Eigenschaft haben, dass man aus jedem der n Werthe von y stets dieselben m Werthe von x erhält. Es existiren also dann immer m Werthe $x_1, x_2, \dots x_m$ von x und n Werthe $y_1, y_2, \dots y_n$ von y derart, dass irgend einer der m Werthe von x mit irgend einem der n Werthe von y der Gleichung genügt.

Unter obiger Voraussetzung lässt sich die Gleichung auf die Form bringen:

$$28)\qquad \frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_m)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_m)} = M\frac{(y-b_1)(y-b_2)\dots(y-b_n)}{(y-\beta_1)(y-\beta_2)\dots(y-\beta_n)},$$

wie jetzt gezeigt werden soll. Es sei

$$29)\qquad y^n + \frac{f_1(x)}{f_0(x)}\cdot y^{n-1} + \dots + \frac{f_{n-1}(x)}{f_0(x)}y + \frac{f_n(x)}{f_0(x)},$$

wo die f ganze Functionen sind, die Gleichung zwischen x und y. Durch die Gleichung ist x und also auch $\frac{f_\nu(x)}{f_0(x)}$ als Function von y definirt. Letztere Function ist aber eine eindeutige; denn für einen bestimmten Werth von y erhält x im Allgemeinen m verschiedene Werthe, für jeden von diesen aber $\frac{f_\nu(x)}{f_0(x)}$ ein und denselben Werth, da sonst die Gleichung 29) nicht für alle diese Werthe von x denselben Werth von y liefern könnte. Es besteht daher eine Gleichung $\frac{f_\nu(x)}{f_0(x)} = \varphi(y)$, wo $\varphi(y)$ eine eindeutige Function ist, für welche nun leicht weiter folgt, dass dieselbe eine rationale ist.

Die Beziehung zwischen x und y hat also die Form:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi_1(y)}{\psi_1(y)},$$

woraus folgt, wenn a und b, α und β beliebige Constanten sind:

$$\frac{a\varphi(x)+b\psi(x)}{\alpha\varphi(x)+\beta\psi(x)} = \frac{a\varphi_1(y)+b\psi_1(y)}{\alpha\varphi_1(y)+\beta\psi_1(y)}.$$

Hier können a, b, α, β immer so gewählt werden, dass sowohl links als rechts Zähler und Nenner von gleichem Grade werden, womit dann der Satz bewiesen ist.

Die Voraussetzung des Satzes lässt eine Einschränkung zu; letzterer findet schon statt, wenn eine Reihe von Werthen $x_1, \dots x_m$ und eine Reihe von Werthen $y_1, \dots y_n$ zu je zwei der Gleichung genügen.

Setzt man nämlich in Gleichung 29) für x nacheinander die Werthe $x_1, \dots x_m$, so liefert dieselbe jedesmal die nämlichen Werthe von y; die Coefficienten $\frac{f_\nu(x)}{f_0(x)}$ erhalten also immer die nämlichen Werthe. Diese Werthe seien $c_1, c_2 \dots, c_n$. Es ist also:

$$\frac{f_\nu(x_\varrho)}{f_0(x_\varrho)} = \frac{a_m^{(\nu)} x_\varrho^m \dots + a_0^{(\nu)}}{a_m^{(0)} x_\varrho^m \dots + a_0^{(\nu)}} = c_\nu,$$

wo ϱ eine der Zahlen 1 bis m. Oder:

$$30) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a_m^{(\nu)} - c_\nu a_m^{(0)}) x_\varrho^m + (a_{m-1}^{(\nu)} - c_\nu a_{m-1}^{(0)}) x_\varrho^{m-1} \dots \\ \qquad + (a_0^{(\nu)} - c_\nu a_0^{(\nu)}) = 0. \end{array} \right.$$

Setzt man hier für ϱ die Zahlen 1 bis m und löst diese m Gleichungen nach $a_m^{(\nu)} - c_\nu a_m^{(0)}$, $a_{m-1}^{(\nu)} - c_\nu a_{m-1}^{(0)}$ u. s. w. auf, so erhält man

$$(a_m^{(\nu)} - c_\nu a_m^{(0)}) : (a_{m-1}^{(\nu)} - c_\nu a_{m-1}^{(0)}) \dots : (a_0^{(\nu)} - c_\nu a_0^{(0)}) = p_m : p_{m-1} \dots : p_0,$$

wo die p aus den $x_1, \dots x_m$ zusammengesetzte Ausdrücke sind. Es ist also dann, unter f einen gewissen constanten Factor verstanden:

$$(a_m^{(\nu)} - c_\nu a_m^{(0)}) x^m + (a_{m-1}^{(\nu)} - c_\nu a_{m-1}^{(0)}) x^{m-1} \dots$$
$$+ (a_0^{(\nu)} - c_\nu a_0^{(0)}) \equiv (p_m x^m + p_{m-1} x^{m-1} \dots + p_0) f,$$

oder

$$\frac{a_m^{(\nu)} x^m + a_{m-1}^{(\nu)} x^{m-1} \dots + a_0^{(\nu)}}{a_m^{(0)} x^m + a_{m-1}^{(0)} x^{m-1} \dots + a_0^{(0)}} = c_\nu + \frac{(p_m x^m \dots + p_0) f}{a_m^{(0)} x^m \dots + a_0^{(0)}}.$$

Welchen der Quotienten $\frac{f_\nu(x)}{f_0(x)}$ man aber genommen haben mag, die Constanten p haben immer dasselbe Verhältniss, da in die Gleichungen 30), aus welchen sie sich bestimmen, hierbei immer dieselben Werthe von x eingesetzt werden. Mithin sind sämmtliche Coefficienten $\frac{f_\nu(x)}{f_0(x)}$ in Gleichung 29) lineare Functionen ein und derselben Function von x. Man kann also setzen:

$$\frac{f_\nu(x)}{f_0(x)} = c_\nu + q_\nu \varphi(x),$$

wo q_ν eine Constante, und die Gleichung 29) wird dann:

$$y^n + [c_1 + q_1 \varphi(x)] y^{n-1} + [c_2 + q_2 \varphi(x)] y^{n-1} \dots + [c_n + q_n \varphi(x)] = 0$$

oder

$$-\varphi x = \frac{y^n + c_1 y^{n-1} \dots + c_n}{q_1 y^{n-1} + q_2 y^{n-2} \dots + q_n},$$

welche Gleichung sich wieder so umformen lässt, dass links und rechts gebrochene Functionen stehen, welche in Zähler und Nenner links vom m^{ten}, rechts vom n^{ten} Grade sind.

Wenn die Voraussetzung obigen Satzes stattfindet, man also weiss, dass x und y durch eine Gleichung von der Form 28) verbunden sind,

braucht man nur zwei Paare von zusammengehörigen Werthreihen von x und y zu kennen, um die Gleichung sofort hinschreiben zu können. Zur Bestimmung der $mn+m+n$ Coefficienten der von den Brüchen befreiten Gleichung 29) genügt übrigens ein System zusammengehöriger Werthe von x und y, wenn ausserdem noch zwei zusammengehörige Werthe x_1 und y_1, sowie sämmtliche zu x_1 gehörige Werthe von y und sämmtliche zu y_1 gehörige Werthe von x gegeben sind. — Ausgeschlossen sind hier überall die Verzweigungswerthe.

V. Die algebraische Gleichung, welche zwischen den beiden doppeltperiodischen Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ unter Voraussetzung der Gleichungen 15) und 16) besteht, kann unter gewissen Bedingungen, welche jetzt ermittelt werden sollen, von der Form 28) sein.

Für $f(x)=f(x_1)$ erhält $\varphi(x)$ die Werthe

$$\varphi_1=\varphi\,(x_1+mK+nL),$$
$$\varphi_2=\varphi\,(s-x_1+mK+nL),$$

wo für m und n alle ganzen Zahlen zu setzen sind. Bestimmt man nun rückwärts die zu allen diesen Werthen von $\varphi(x)$ gehörigen Werthe von $f(x)$, so gehören nach Gleichung 1) und 2) zu φ_1 die Werthe

$$f(x_1+mK+nL+m'K'+n'L')=f(x_1+m'K'+n'L')=F_1$$

und

$$f(s'-x_1-mK-nL+m'K'+n'L')=f(s'-x_1+m'K'+n'L')=F_2,$$

ferner zu φ_2 die Werthe

$$f(s-x_1+mK+nL+m'K'+n'L')=f(s-x_1+m'K'+n'L')=F_3$$

und

$$f(s'-s+x_1-mK-nL+m'K'+n'L')=f(s'-s+x_1+m'K'+n'L')=F_4.$$

Die Werthe φ_1 unterscheiden sich durch die verschiedenen m und n; da diese nun in F_1 und F_2 nicht mehr vorkommen, so gehören zu allen Werthen φ_1 dieselben Werthe von $f(x)$. Ebenso gehören zu allen φ_2 dieselben Werthe F_3 und F_4 von $f(x)$.

Es fragt sich nun noch, ob in F_1 und F_2 die nämlichen Werthe ent halten sind, wie in F_3 und F_4. Dies ist im Allgemeinen nicht der Fall. Zwar stimmt F_1 mit F_3 überein, da, wenn man in F_1 $m'=g$, $n'=h$, in F_3 $m'=-g$, $n'=-h$ setzt, die Argumente zur Summe s geben. In F_2 und F_4 dagegen ist bei eben solchen Werthen von m' und n' die Summe der Argumente $=2s'-s$. Soll nun ein Werth $f(s'-x_1+gK'+hL')$ einem Werthe $f(s'-s+x_1+pK'+qL')$ gleich sein, so muss die Summe der Argumente sich darstellen lassen unter der Form

$$s + n_i K + n_i L,$$

also

$$2s' - s + (g+p)K' + (q+h)L' = s + n_i K + n_i L,$$

oder

$$2s' + (g+p)K' + (h+q)L' = 2s + n_i K + n_i L.$$

Sobald aber irgend zwei Werthe einander gleich sind, sind sämmtliche Werthe von F_2 und F_4 zu zwei und zwei einander gleich, und es genügt also, damit dies der Fall sei, dass irgend eine Gleichung besteht von der Form

$$2s + \mu K + \nu L = 2s' + \mu' K' + \nu' L'. \tag{32}$$

Bei dem Amplitudensinus ist dies nun stets der Fall, da hier $2s = K$, $2s' = K'$ ist, mithin eine Gleichung von der Art wie 32) aus den Gleichungen 15) und 16) folgt.

VI. Die Gleichungen 15) und 16) können als reducirte Gleichungen in der Form

$$mK = m'K' + n'L', \tag{33}$$

$$m_1 K + n_1 L = m'_1 K' + n'_1 L', \tag{34}$$

und auch in der Form

$$\mu K + \nu L = \mu' K', \tag{35}$$

$$\mu_1 K + \nu_1 L = \mu'_1 K' + \nu'_1 L' \tag{36}$$

wo $m < m_1$ und $\mu' < \mu'_1$, erhalten werden. Die Gleichungen 35) und 36) müssen aus 33) und 34) durch eine Transformation mit der Determinante $= 1$ entstehen. Man kann also setzen:

$$\mu K + \nu L = amK + b(m_1 K + n_1 L), \tag{37}$$

$$\mu_1 K + \nu_1 L = \alpha mK + \beta(m_1 K + n_1 L), \tag{38}$$

$$m'K' + n'L' = \beta\mu' K' - b(\mu'_1 K' + \nu'_1 L'), \tag{39}$$

$$m'_1 K' + n'_1 L' = -\alpha\mu' K' + a(\mu'_1 K' + \nu'_1 L'), \tag{40}$$

$$a\beta - b\alpha = \pm 1. \tag{41}$$

Setzt man die Ausdrücke auf der rechten Seite von 37) bis 40) in 33) bis 36) ein, so erhält man:

$$mK = \beta\mu' K' - b(\mu'_1 K' + \nu'_1 L'), \tag{42}$$

$$m_1 K + n_1 L = -\alpha\mu' K' + a(\mu'_1 K' + \nu'_1 L'), \tag{43}$$

$$amK + b(m_1 K + n_1 L) = \mu' K', \tag{44}$$

$$\alpha mK + \beta(m_1 K + n_1 L) = \mu'_1 K' + \nu'_1 L'. \tag{45}$$

Statt der Gleichungen 33) und 34) oder 35) und 36) kann man nun entweder 42) und 43) oder 44) und 45) nehmen, falls a, b, α, β der Gleichung 41) genügen, während m, m_1, n_1, μ', μ'_1, ν'_1 willkürlich sind.

Die Beziehung zwischen K, K', L, L' wird aber auch durch irgend zwei dieser Gleichungen, also etwa die einfachsten:

$$46)\qquad mK = (\beta\mu' - b\mu'_1)K' - b\nu'_1 L',$$

$$47)\qquad (am + bm_1)K + bn_1 L = \mu' K'$$

dargestellt; nur sind diese keine reducirten Gleichungen, da die Determinanten b mal grösser geworden sind. Die Zahlen m und μ' können immer als positiv betrachtet werden.

Der Grad der Gleichung zwischen $f(x)$ und $\varphi(x)$ möge nun in $f(x) = M$ resp. $2M$, in $\varphi(x) = N$ resp. $2N$ gegeben sein, wo M und N relative Primzahlen sind. Es sollen alle hierdurch bedingte Beziehungen zwischen K, K', L, L' bestimmt werden. Man nehme in den Gleichungen 46) und 47) m und n_1, μ' und ν'_1, so dass $mn_1 = \pm N$, $\mu'\nu'_1 = \pm M$, jedoch immer m und μ' positiv, was eine bestimmte Anzahl Fälle giebt.

In jedem dieser Fälle setze man für m_1 die Zahlen $-(m-1)$ bis $+(m-1)$, für μ'_1 die Zahlen $-(\mu'-1)$ bis $+(\mu'-1)$, wodurch man also jedesmal $4(m-1)(\mu'-1)$ neue Fälle erhält. Endlich nehme man a und β ganz beliebig und dann α und b so, dass $ab \pm 1 = b\alpha$.

Um zwei zusammengehörige Systeme von Werthen von $f(x)$ und $\varphi(x)$ zu erhalten, hat man nach pag. 79 zu verfahren. Man construire also zwei Parallelogramme (s. lithogr. Tafel Fig. 9 u. 10).

Das Parallelogramm Fig. 9 liefert in Ebene I und II (pag. 78) die Werthe $f(x)$ und dasjenige Fig. 10 in III und IV die zugehörigen Werthe von $\varphi(x)$.

Die Gleichung zwischen $f(x)$ und $\varphi(x)$ ist dann:

$$A\cdot\frac{\Pi[f(x)-f(x_1+k'K'+l'L')]\,.\,\Pi[f(x)-f(s'-x_1+k'K'+l'L')]}{\Pi[f(x)-f(x_2+k'K'+l'L')]\,.\,\Pi[f(x)-f(s'-x_2+k'K'+l'L')]}$$

$$=\frac{\Pi[\varphi(x)-\varphi(x_1+kK+lL)]\,.\,\Pi[\varphi(x)-\varphi(s-x_1+kK+lL)]}{\Pi[\varphi(x)-\varphi(x_2+kK+lL)]\,.\,\Pi[\varphi(x)-\varphi(s-x_2+kK+lL)]},$$

wo für x_1 und x_2 irgend welche nicht singuläre Werthe zu setzen sind, während für k' und l' sowie k und l die Zahlen aus den Parallelogrammen Fig. 9 u. 10 zu entnehmen sind, derart, dass (k', l') jedes Zahlenpaar in dem Parallelogramm Fig. 10 und (k, l) in dem Parallelogramm Fig. 9 vorstellt.

Obige Gleichung ist in $f(x)$ vom M^{ten}, in $\varphi(x)$ vom N^{ten} Grade. Wählt man aber s und s' so, dass eine Gleichung 5) besteht, so werden auf beiden Seiten sowohl im Zähler als im Nenner die beiden Factoren Π identisch und die Gleichung lässt sich also auf den M^{ten} Grad in $f(x)$ und den N^{ten} Grade in $\varphi(x)$ reduciren.

IV.

Neue Untersuchungen über die Lage der Brennlinien unendlich dünner copulirter Strahlenbündel gegen einander und gegen einen Hauptstrahl.

Von

Prof. Dr. LUDWIG MATTHIESSEN.

Lithogr. Tafel Fig. 11—13.

Unter einer Brennlinie eines Strahlenbündels eine Gerade verstanden, welche sämmtliche Strahlen des Bündels schneidet, findet dieser Begriff im Besonderen Anwendung auf unendlich dünne Strahlenbündel, wo es sich um die Betrachtung der Umhüllungsfläche sämmtlicher Normalen eines unendlich kleinen Elementes einer krummen Oberfläche und speciell der Gestalt eines optischen ursprünglich homocentrischen, dann in krummen Flächen gebrochenen astigmatischen Strahlenbündels handelt. Sturm, der Begründer der Theorie des Astigmatismus, hat in seinem Mémoire sur l'optique in Liouville's Journ. de Math. III S. 357 (1838) und in einer gleichbetitelten Abhandlung in den Compt. rend. T. XX S. 554, 761 und 1238 (1845), übersetzt in Pogg. Ann. LXV S. 116 und 374 (1845),* das Theorem aufgestellt, dass in diesen besonderen Fällen immer zwei Brennlinien existiren, dass dieselben in zwei aufeinander senkrechten Ebenen liegen und dass sie beide gegen einander und zum Hauptstrahle des Bündels senkrecht stehen. Das letzte Attribut hat aber keineswegs allgemeine Giltigkeit, wie schon daraus hervorgeht, dass, wenn man in dem Meridiane einer Rotationsfläche zwei unendlich nahe Normalen zieht und den Meridian ein weniges um die Axe dreht, man das auf der Axe abgeschnittene Stück als Brennlinie erhält und dass die Lage dieses Stückes zur Normale keine Senkrechte zu sein braucht. Die zweite Brennlinie ist offenbar der unendlich kleine Kreisbogen, welchen der Durchschnittspunkt der beiden Normalen um die Axe beschreibt; eine dritte giebt es nicht. Ein solches Strahlenbündel mit zwei Brennlinien wollen wir ein copulirtes nennen.

---

* Man vergleiche auch: Kummer, Borchardt's Journ. LVII S. 189 (1860) und Berl. Monatsber. f. 1860 S. 469—474; Möbius, Sitzungsber. d. Sächs. Akad. Math.-phys. Cl. XIV (1862); Helmholtz, Physiol. Opt. II. Thl. S. 246 (1860); Lippich, Denkschr. d. Wien. Akad. Math.-phys. Cl. (1877) S. 167; C. Neumann, Sitzungsber. d. Sächs. Akad. Math.-phys. Cl. f. 1879, S. 42.

Es lässt sich nun leicht auf synthetischem Wege zeigen, dass jedes unendlich dünne Bündel von Normalen um einen Punkt auf einer krummen Fläche, also speciell auch auf der Malus'schen Wellenfläche, die Eigenschaften besitzt, durch zwei Brennlinien zu gehen, welche in zwei gegen einander senkrechten Ebenen (Focalebenen) liegen und welche mit der Hauptnormale, sowie mit einander einen beliebigen Winkel bilden.

Nach Euler hat jede krumme Fläche in jedem ihrer Punkte zwei aufeinander senkrechte Krümmungslinien, die beiden Hauptnormalschnitte, und ebenso zwei Hauptkrümmungsradien, wie zwei Krümmungsmittelpunkte, welche mit der Hauptnormale coincidiren. Die Ebenen, welche durch die beiden Hauptnormalschnitte und die Hauptnormale bestimmt sind, stehen gegen einander senkrecht; in ihnen liegen die Brennlinien, weswegen sie auch Focalebenen genannt werden.

Es sei P (s. lithogr. Tafel Fig. 11) der Flächenpunkt, $P\beta\varepsilon$ seine Normale, NPN_1 die erste Krümmungslinie oder erster Hauptschnitt, MPM_1 der zweite Hauptschnitt. Man denke die Fläche um P in parallele Schnitte zerlegt; diese werden dann paarweise die Hauptschnitte der acht benachbarten Flächenpunkte d, e, g, f, c, a, h, b darstellen. Es sei nun

$\alpha\alpha_1$	die	Evolute	des	Bogens	cf,
$\beta\beta_1$	"	"	"	"	Pg,
$\gamma\gamma_1$	"	"	"	"	de,
$\delta\delta_1$	"	"	"	"	hb,
$\varepsilon\varepsilon_1$	"	"	"	"	Pd,
$\zeta\zeta_1$	"	"	"	"	ge.

Diese Evoluten sind die sogenannten Rückkehrkanten. Sie bilden in ihrer Continuität Orthogonalflächen unter einander und zur Fläche um P. Diese Orthogonalflächen sind mit den Krümmungsmittelpunktflächen identisch; sie werden tangirt von der Normalebene

$cPd\varepsilon$ in der I. Brennlinie $\alpha\beta\gamma$,
$gPh\beta$ " " II. " $\zeta\varepsilon\delta$.

Die Brennlinien liegen demnach in zwei gegen einander senkrechten Ebenen. Es fragt sich nun aber: wie gross sind die Winkel

$$P\beta\alpha = \omega_1, \quad P\varepsilon\delta = \omega.$$

Zur deutlicheren Einsicht heben wir aus dem ganzen Strahlenbündel ein Strahlenprismatoid (s. lithogr. Tafel Fig. 12) heraus; wir sehen zugleich, dass dies Strahlenbündelelement eine tetraedrische Modification zwischen den Brennlinien erfährt; es ist der sogenannte Brennraum und der Abstand der Mittelpunkte der beiden Brennlinien (Brennpunkte) die Brennstrecke. Es sei die erste Brennlinie $\alpha\beta = da_1$, die zweite Brennlinie $\delta\varepsilon = da$, das Bogenelement $Ph = ds$, $Pc = d\sigma$; ferner $P\beta$ der erste Krümmungsradius des Bogens Ph gleich ϱ, $P\varepsilon$ der Krümmungsradius des Bogens Pc gleich r. Fällt man δR

senkrecht auf $P\varepsilon$, so ist $R\varepsilon = dr$ das Differential der zweiten Brennweite. Bezeichnet man den Winkel $P\beta h$ mit φ, so ist $\varphi = \frac{ds}{\varrho}$, und man erhält aus ähnlichen Dreiecken

$$1)\qquad \tan\omega = \left(\frac{r-\varrho}{\varrho}\right)\frac{ds}{dr}.$$

Ebenso findet man

$$2)\qquad \tan\omega_1 = \left(\frac{\varrho - r}{r}\right)\frac{d\sigma}{d\varrho}.$$

Für einen jeden Punkt P der krummen Fläche sind nun aber $\frac{dr}{ds}$ und $\frac{d\varrho}{d\sigma}$ bestimmte und im Allgemeinen von Null verschiedene Grössen und zwar bestimmbare Functionen der Coordinaten x, y, z des Punktes P. Es sind also durchaus nicht immer ω und ω_1 rechte Winkel, und ebenso wenig der Winkel λ, welchen die Brennlinien mit einander bilden. Es ist nämlich $\cos\lambda = \cos\omega \,.\, \cos\omega_1$, also auch λ im Allgemeinen von 90^0 verschieden. Bei Rotationsflächen ist aber $d\varrho = 0$, also $\omega_1 = 90^0$ und folgeweise $\lambda = 90^0$.

Es sind nun weiter die Brennlinien da und da_1 sehr kleine gerade Linien und zwar ist wegen $dr = \cos\omega\, da$, $d\varrho = \cos\omega_1\, da_1$:

$$3)\qquad da = \frac{r-\varrho}{\varrho\sin\omega}\,ds, \qquad\qquad 4)\qquad da_1 = \frac{r-\varrho}{r\sin\omega_1}\,d\sigma.$$

Daraus folgt noch

$$\frac{da_1}{da} = \frac{\varrho\sin\omega\, d\sigma}{r\sin\omega_1\, ds}.$$

Es giebt nun aber noch endlich dicke, wie unendlich dünne copulirte Strahlenbündel, welchen als Normalen krumme Flächenelemente nicht entsprechen, die also der von C. Neumann eingeführten Bezeichnung gemäss nicht reguläre Strahlenbündel sind, nämlich dann, wenn die Brennlinien in zweien nicht aufeinander senkrechten Ebenen liegen, welche durch den Hauptstrahl und jede der Brennlinien gelegt sind. Wir können immer eine solche Regelfläche als Umhüllungsfläche eines Strahlenbündels construiren, dass der Leitstrahl durch eine Leitcurve n^{ten} Grades und zugleich durch zwei beliebig im Raume gelegene Grade hindurchgeht. Nach Steiner ist die Regelfläche und ebenso jeder Ebenenschnitt des Strahlenbündels vom $2n^{ten}$ Grade. Ist also die Leitcurve ein Kreis, so wird jeder Ebenenschnitt eine Curve vierten Grades darstellen. Dies gilt auch dann noch von regulären Strahlenbündeln, wenn wenigstens eine der Brennlinien schief zum Hauptstrahle steht; sonst ist ein senkrecht zur Strahlenaxe gerichteter Querschnitt eine Curve zweiten Grades. Der Beweis des Steiner'schen Satzes kann analytisch auf folgendem Wege geführt werden. Die Gleichung des Leitstrahles und der beiden Brennlinien seien

$$5)\quad \begin{cases} x + a_1 z + \alpha_1 = 0, \\ y + b_1 z + \beta_1 = 0; \end{cases}$$

$$6)\quad \begin{cases} x + a' z + \alpha' = 0, \\ y + b' z + \beta' = 0; \end{cases}$$

$$7)\quad \begin{cases} x + a'' z + \alpha'' = 0, \\ y + b'' z + \beta'' = 0. \end{cases}$$

Alsdann sind $-\alpha_1$ und $-\beta_1$ die Coordinaten der ebenen Leitcurve, deren Gleichung sein möge

$$8)\quad \alpha_1^n + m\alpha_1^{n-1}\beta_1 + \ldots + s = 0.$$

Aus 5) und 6), 5) und 7) folgen die Bedingungsgleichungen für das Schneiden

$$9)\quad \begin{vmatrix} a' - a_1 & \alpha' - \alpha_1 \\ b' - b_1 & \beta' - \beta_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'' - a_1 & \alpha'' - \alpha_1 \\ b'' - b_1 & \beta'' - \beta_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Mit Hilfe von 5) und 9) lassen sich die Variabeln α_1 und β_1 bestimmen und in 8) substituiren. Nach 5) ist

$$a_1 = -\frac{\alpha_1 + x}{z}, \quad b_1 = -\frac{\beta_1 + y}{z},$$

also gemäss 9):

$$(\beta' + y + b'z)\,\alpha_1 - (\alpha' + x + a'z)\,\beta_1 + (\alpha' b' - a'\beta')\,z + \alpha' y - \beta' x = 0,$$
$$(\beta'' + y + b''z)\,\alpha_1 - (\alpha'' + x + a''z)\,\beta_1 + (\alpha'' b'' - a''\beta'')\,z + \alpha'' y - \beta'' x = 0.$$

Es werden also $-\alpha_1$ und $-\beta_1$ als Quotienten von algebraischen Functionen zweiten Grades dargestellt, wodurch die Gleichung 8) vom $2n^{\text{ten}}$ Grade wird. Um einen beliebigen Durchschnitt zu erhalten, verwandle man die Coordinaten, indem man substituirt:

$$x = A_1\xi + B_1\eta + C_1\zeta + D_1,$$
$$y = A_2\xi + B_2\eta + C_2\zeta + D_2,$$
$$z = A_3\xi + B_3\eta + C_3\zeta + D_3.$$

Setzt man $\zeta = 0$, so ist die Durchschnittscurve in dieser Ebene

$$10)\quad \xi^{2n} + M\xi^{2n-1}\eta + \ldots + S = 0.$$

Betrachtet man ein unendlich dünnes Strahlenbündel von Normalen eines krummen Flächenelementes und wählt die Hauptnormale als z-Axe, so werden a_1, b_1, α_1, β_1 unendlich kleine Grössen sein. Ist in diesem Falle die Leitcurve ein Kreis, so ist 10) dementsprechend zu discutiren.

Es kann nun weiter gefragt werden: wie viele Strahlen sind erforderlich und zugleich hinreichend, um ein copulirtes Strahlenbündel zu bestimmen und wie viele Brennlinien hat dasselbe? Welche Bedingungen müssen neu hinzutretende Strahlen erfüllen, wenn sie zu denselben Brennlinien gehören sollen?

Zunächst folgt aus dem Steiner'schen Satze, dass ein copulirtes Strahlenbündel auch drei Brennlinien haben kann. Denn offenbar kann

als Leitcurve eine Gerade gewählt werden; die Schnittcurven werden vom zweiten Grade sein. Es giebt aber auch Regelflächen, welche unendlich viele Brennlinien haben, z. B. das Hyperboloid; diese beiden Fälle sind identisch.

Wir gehen aus von der Betrachtung beliebiger Strahlen im Raume, deren Gleichungen auf ein beliebiges rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogen sind. Zur Bestimmung der Constanten ihrer Brennlinie betrachten wir die Coordinaten ihrer Schnittpunkte mit sämmtlichen Strahlen als Unbekannte. Sind n Strahlen gegeben, so lassen sich $4n$ Gleichungen mit $3n + 4$ Unbekannten aufstellen. Diese sind nur dann bestimmbar, wenn $n = 4$ ist.* Daraus resultiren vier Quadruple von Gleichungen, nämlich:

$$x_i + a_i z_i + \alpha_i = 0, \quad x_i + a z_i + \alpha = 0,$$
$$y_i + b_i z_i + \beta_i = 0; \quad y_i + b z_i + \beta = 0,$$

wo i von 1 bis 4 schwankt. Damit jeder Quadruple zusammenbestehe, muss

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a_i & \alpha_i \\ 0 & 1 & b_i & \beta_i \\ 1 & 0 & a & \alpha \\ 0 & 1 & b & \beta \end{vmatrix} = 0$$

sein, d. h.

$$(a - a_i)(\beta - \beta_i) - (b - b_i)(\alpha - \alpha_i) = 0.$$

Da alle vier Gleichungen den Ausdruck $a\beta - b\alpha$ enthalten, so kann man ihn eliminiren; daraus resultiren folgende drei lineare Gleichungen in a, b, α, β:

$$11)\quad \begin{cases} \begin{vmatrix} a & \alpha_1 - \alpha_2 \\ b & \beta_1 - \beta_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha & a_1 - a_2 \\ \beta & b_1 - b_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 \\ b_1 & \beta_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & \alpha_2 \\ b_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} a & \alpha_1 - \alpha_3 \\ b & \beta_1 - \beta_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha & a_1 - a_3 \\ \beta & b_1 - b_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 \\ b_1 & \beta_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & \alpha_3 \\ b_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} a & \alpha_1 - \alpha_4 \\ b & \beta_1 - \beta_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha & a_1 - a_4 \\ \beta & b_1 - b_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 \\ b_1 & \beta_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_4 & \alpha_4 \\ b_4 & \beta_4 \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen lassen sich der Kürze wegen schreiben

$$12)\quad \begin{aligned} aA + bB + E_1 &= 0, \\ aC + \alpha B + E_2 &= 0, \\ aD + \beta B + E_3 &= 0. \end{aligned}$$

Das vollständige System ergiebt die quadratische Finalgleichung

$$M_1 a^2 + N_1 a + P_1 = 0.$$

Die conjugirten Wurzeln sind

$$a = m_1 \pm n_1, \qquad b = m_3 \pm n_3,$$
$$\alpha = m_2 \pm n_2, \qquad \beta = m_4 \pm n_4.$$

---

* Grunert, Arch. f. Math. I. S. 136 (1841); Schlömilch, Ber. d. Sächs. Ges. d. Wiss. Math.-phys. Cl. VII. S. 39 (1855).

Das Strahlenbündel hat demnach zwei Brennlinien, die auch in eine doppelte oder in zwei complexe übergehen können. Die Oerter der acht Durchschnittspunkte der Strahlen mit den Brennlinien sind die Brennpunkte; ihre Werthe sind die Wurzeln der Gleichungen

$$\begin{aligned} &x_i + a_i z_i + \alpha_i = 0, \\ &y_i + b_i z_i + \beta_i = 0, \\ &x_i + (m_1 \pm n_1)\, z_i + (m_2 \pm n_2) = 0 \end{aligned}$$

wo i zwischen 1 und 4 schwankt.

Wir wollen nunmehr die vorstehenden Betrachtungen auf unendlich dünne Strahlenbündel übertragen, indem wir die Grössen a, b, α, β um unendlich kleine Grössen χ, ϑ, ω, ψ von derselben Ordnung der Kleinheit variiren. Es sei also

$$13)\quad \begin{cases} a_2 = a_1 - \chi_1, & b_2 = b_1 + \vartheta_1, \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \omega_1, \quad \beta_2 = \beta_1 - \psi_1, \\ a_3 = a_1 - \chi_2, & b_3 = b_1 + \vartheta_2, \quad \alpha_3 = \alpha_1 + \omega_2, \quad \beta_3 = \beta_1 - \psi_2, \\ a_4 = a_1 - \chi_3; & b_4 = b_1 + \vartheta_3; \quad \alpha_4 = \alpha_1 + \omega_3; \quad \beta_4 = \beta_1 - \psi_3. \end{cases}$$

Das frühere System 11) wird auf diese Weise:

$$14)\quad \begin{cases} (a-a_1)\psi_1 + (b-b_1)\omega_1 + (\alpha-\alpha_1)\vartheta_1 + (\beta-\beta_1)\chi_1 + (\psi_1\chi_1 - \vartheta_1\omega_1) = 0, \\ (a-a_1)\psi_2 + (b-b_1)\omega_2 + (\alpha-\alpha_1)\vartheta_2 + (\beta-\beta_1)\chi_2 + (\psi_2\chi_2 - \vartheta_2\omega_2) = 0, \\ (a-a_1)\psi_3 + (b-b_1)\omega_3 + (\alpha-\alpha_1)\vartheta_3 + (\beta-\beta_1)\chi_3 + (\psi_3\chi_3 - \vartheta_3\omega_3) = 0, \end{cases}$$

welche Gleichungen in Verbindung mit

$$15)\qquad (a - a_1)\,(\beta - \beta_1) - (b - b_1)\,(\alpha - \alpha_1) = 0$$

ebenfalls quadratische Gleichungen für a, b, α, β geben. Bei endlichen von Null verschiedenen Werthen von $a - a_1$ u. s. w. sind nun zwar die Absolutglieder unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung; trotzdem dürfen sie gegen die vorangehenden Glieder nicht vernachlässigt werden, weil sonst $a - a_1$ u. s. w. verschwinden müssten, was bedeuten würde, dass die Brennlinie mit dem ersten oder Hauptstrahle coincidire.

Es lassen sich nun entsprechend 12) folgende lineare Gleichungen zwischen je zwei Constanten der Brennlinien bilden:

$$16)\quad \begin{cases} (a-a_1)\begin{vmatrix} \psi_1\chi_1\vartheta_1 \\ \psi_2\chi_2\vartheta_2 \\ \psi_3\chi_3\vartheta_3 \end{vmatrix} + (b-b_1)\begin{vmatrix} \omega_1\chi_1\vartheta_1 \\ \omega_2\chi_2\vartheta_2 \\ \omega_3\chi_3\vartheta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\psi_1\chi_1-\vartheta_1\omega_1)\,\chi_1\vartheta_1 \\ (\psi_2\chi_2-\vartheta_2\omega_2)\,\chi_2\vartheta_2 \\ (\psi_3\chi_3-\vartheta_3\omega_3)\,\chi_3\vartheta_3 \end{vmatrix} = 0, \\[2ex] (a-a_1)\begin{vmatrix} \omega_1\chi_1\psi_1 \\ \omega_2\chi_2\psi_2 \\ \omega_3\chi_3\psi_3 \end{vmatrix} + (\alpha-\alpha_1)\begin{vmatrix} \omega_1\chi_1\vartheta_1 \\ \omega_2\chi_2\vartheta_2 \\ \omega_3\chi_3\vartheta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\psi_1\chi_1-\vartheta_1\omega_1)\,\omega_1\chi_1 \\ (\psi_2\chi_2-\vartheta_2\omega_2)\,\omega_2\chi_2 \\ (\psi_3\chi_3-\vartheta_3\omega_3)\,\omega_3\chi_3 \end{vmatrix} = 0, \\[2ex] (a-a_1)\begin{vmatrix} \vartheta_1\omega_1\psi_1 \\ \vartheta_2\omega_2\psi_2 \\ \vartheta_3\omega_3\psi_3 \end{vmatrix} + (\beta-\beta_1)\begin{vmatrix} \omega_1\chi_1\vartheta_1 \\ \omega_2\chi_2\vartheta_2 \\ \omega_3\chi_3\vartheta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\psi_1\chi_1-\vartheta_1\omega_1)\,\vartheta_1\omega_1 \\ (\psi_2\chi_2-\vartheta_2\omega_2)\,\vartheta_2\omega_2 \\ (\psi_3\chi_3-\vartheta_3\omega_3)\,\vartheta_3\omega_3 \end{vmatrix} = 0; \end{cases}$$

oder kurz

$$17)\quad \begin{cases} (a-a_1)\,A+(b-b_1)\,B+M\mu=0, \\ (a-a_1)\,C+(\alpha-\alpha_1)\,B+N\nu=0, \\ (a-a_1)\,D+(\beta-\beta_1)\,B+P\pi=0; \end{cases}$$

wo A, B, C, D im Allgemeinen kleine Grössen dritter Ordnung, μ, ν, π kleine Grössen erster Ordnung sind. Mit Hilfe von 15) wird nun die quadratische Finalgleichung

$$18)\quad (a-a_1)^2(AC+BD)+(a-a_1)\{CM\mu+AN\nu+BP\pi\}+MN\mu\nu=0.$$

Bezeichnet man die Determinante A kurz durch $|\,\psi_1\chi_1\vartheta_1\,|$, so erhält man weiter die linearen Gleichungen

$$19)\quad \begin{cases} (b-b_1)\,|\,\omega_1\chi_1\vartheta_1\,|+(a-a_1)\,|\,\psi_1\chi_1\vartheta_1\,|+|\,(\psi_1\chi_1-\vartheta_1\omega_1)\,\chi_1\vartheta_1\,|=0, \\ (b-b_1)\,|\,\omega_1\chi_1\vartheta_1\,|-(\alpha-\alpha_1)\,|\,\psi_1\chi_1\vartheta_1\,|+|\,(\psi_1\chi_1-\vartheta_1\omega_1)\,\chi_1\psi_1\,|=0, \\ (b-b_1)\,|\,\vartheta_1\omega_1\psi_1\,|-(\beta-\beta_1)\,|\,\psi_1\chi_1\vartheta_1\,|+|\,(\psi_1\chi_1-\vartheta_1\omega_1)\,\psi_1\vartheta_1\,|=0, \end{cases}$$

oder der Kürze wegen

$$20)\quad \begin{cases} (b-b_1)\,B+(a-a_1)\,A+M\mu=0, \\ (b-b_1)\,C-(\alpha-\alpha_1)\,A+L\lambda=0, \\ (b-b_1)\,D-(\beta-\beta_1)\,A+T\tau=0. \end{cases}$$

Mit Hilfe von 15) ergiebt diese Gruppe die quadratische Finalgleichung

$$21)\quad (b-b_1)^2(AC+BD)+(b-b_1)\{DM\mu+AL\lambda+BT\tau\}+MT\mu\tau=0.$$

Bei willkürlichen Annahmen von ψ, χ, ϑ, ω ist nun offenbar

der Coefficient des 1. Gliedes eine kleine Grösse der VI. Ordnung,
„ „ „ 2. „ „ „ „ „ VII. „
„ „ „ 3. „ „ „ „ „ VIII. „

und ähnlich verhält es sich mit den Finalgleichungen der drei übrigen Constanten. Man erkennt jedoch leicht, dass ψ, χ, ϑ, ω so gewählt werden können, dass

1. die beiden grössten Coefficienten von gleicher Ordnung,
2. „ „ kleinsten „ „ „ „
3. alle drei von gleicher Ordnung

werden.

Im ersten Falle sind die Wurzeln entweder

0 und endlich,
oder $\pm$ endlich und gleich,
oder endlich und ∞;

im zweiten Falle sind die Wurzeln entweder

$\pm\,\infty$,
oder 0 und ∞,
oder 0 und 0;

im dritten Falle hat die Gleichung zwei endliche Wurzeln und es existiren zwei Brennlinien, welche den Hauptstrahl unter einem spitzen von Null und 90^0 verschiedenen Winkel ω schneiden, wenn

$$\cos\omega = \frac{a_1 a + b_1 b + 1}{\sqrt{(a^2 + b^2 + 1)\,(a_1^2 + b_1^2 + 1)}} \gtrless \begin{matrix}0.\\1\end{matrix}$$

Bezeichnet $(\psi)^1$ eine sehr kleine Grösse erster Ordnung, $(\psi)^2$ eine solche zweiter Ordnung, so ist die Bedingung, dass $a - a_1$ mindestens einen endlichen Werth habe,

$$\frac{1}{\psi_1^6} AC + \frac{1}{\psi_1^6} BD = (\psi)^1 \text{ oder } (\psi)^2.$$

Es ergiebt sich daraus die bemerkenswerthe Bedingung, dass die Summe vorstehender beiden endlichen Grössen zwar unendlich klein, aber nicht Null werden darf.

Bezeichnet man den Winkel, unter welchem sich die Brennlinien kreuzen, mit ε, so ist noch

$$\cos\varepsilon = \frac{a' a'' + b' b'' + 1}{\sqrt{(a'^2 + b'^2 + 1)\,(a''^2 + b''^2 + 1)}}.$$

Zahlenbeispiel für zwei schiefe Brennlinien:

Setzt man statt unendlich kleiner Grössen sehr kleine, also etwa Tausendstel ein:

$a_1 = 2,\quad \alpha_1 = 3,\quad b_1 = -1,\quad \beta_1 = 3,$

$\chi_1 = 0{,}002,\quad \omega_1 = -0{,}001,\quad \vartheta_1 = -0{,}00374981,\quad \psi_1 = 0{,}00224943,$

$\chi_2 = 0{,}003,\quad \omega_2 = -0{,}004,\quad \vartheta_2 = -0{,}00625047,\quad \psi_2 = 0{,}00775141,$

$\chi_3 = 0{,}004;\quad \omega_3 = -0{,}003;\quad \vartheta_3 = -0{,}00774956;\quad \psi_3 = 0{,}00624868;$

so wird

$$A = -\frac{0{,}00181}{1000^3},\quad B = \frac{0{,}00181}{1000^3},\quad C = -\frac{0{,}00543}{1000^3},\quad D = -\frac{0{,}00905}{1000^3};$$

also

$$AC + BD = -\frac{0{,}0000065522}{1000^6} = (\psi)^8,$$

ebenso

$$CM\mu + AN\nu + BP\pi = +\frac{0{,}0000196566}{1000^6} = (\psi)^8,$$

$$MN\mu\nu = -\frac{0{,}0000131044}{1000^6} = (\psi)^8.$$

Die Finalgleichungen sind demnach:

$$\begin{aligned}
&(a - a_1)^2 - 3(a - a_1) + 2 = 0, && a - a_1 = 2 \text{ oder } 1,\\
&(\beta - \beta_1)^2 - (\beta - \beta_1) - 6 = 0, && \beta - \beta_1 = 3 \quad „ \quad -2,\\
&(b - b_1)^2 - 5(b - b_1) + 6 = 0, && b - b_1 = 3 \quad „ \quad 2,\\
&(\alpha - \alpha_1)^2 - (\alpha - \alpha_1) - 2 = 0; && \alpha - \alpha_1 = 2 \quad „ \quad -1.
\end{aligned}$$

Daraus resultiren folgende Werthe der Constanten der beiden Brennlinien und des Hauptstrahles:

$$\begin{array}{llll} a' = 4, & \beta' = 6, & b' = 2, & \alpha' = 5; \\ a'' = 3, & \beta'' = 1, & b'' = 1, & \alpha'' = 2; \\ a_1 = 2, & \beta_1 = 3, & b_1 = -1, & \alpha_1 = 3. \end{array}$$

Weiter findet man

$$\omega = 51^0 25' 10'', \qquad \omega_1 = 42^0 23' 40'', \qquad \varepsilon = 9^0 16' 30''.$$

Die Coordinaten der Brennpunkte sind:

$$\begin{array}{lll} \xi_1 = -1, & \eta_1 = 0{,}5, & \zeta_1 = -1, \\ \xi_2 = -5, & \eta_2 = -2, & \zeta_2 = 1, \end{array}$$

und die Brennstrecke

$$\sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2} = \sqrt{26{,}25}.$$

Die Variationen $\psi, \chi, \vartheta, \omega$ können so gewählt werden, dass $\varepsilon = 90^0$ wird; eine Bedingungsgleichung dafür ist $a'a'' + b'b'' + 1 = 0$, welche sich durch die Coefficienten der Finalgleichung ausdrücken lässt. Transformirt man dieselbe in

$$(a' - a_1)(a'' - a_1) + (b' - b_1)(b'' - b_1) + a_1(a' + a'') \\ + b_1(b' + b'') - a_1^2 - b_1^2 + 1 = 0,$$

so kann man an die Stelle setzen:

$$M\mu(N\nu + T\tau) - a_1(CM\mu + AN\nu + BP\pi) - b_1(DM\mu + AL\lambda + BT\tau) \\ + (AC + BD)(1 - a_1^2 - b_1^2) = 0.$$

Wenn man der Einfachheit wegen den ersten Strahl oder Hauptstrahl zur z-Axe wählt, so wird $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$; die vorstehende Relation reducirt sich dann auf

$$22) \qquad \frac{M\mu}{AC + BD}(T\tau + N\nu) = -1.$$

Die Variationen $\psi, \chi, \vartheta, \omega$ können ferner so gewählt werden, dass die Focalebenen auf einander senkrecht stehen, dass also das Strahlenbündel ein reguläres wird. Wir gehen aus von den Gleichungen der Focalebenen, d. h. der Ebenen, welche durch jede Brennlinie und den Hauptstrahl bestimmt sind; dieselben sind:

$$(b' - b_1)x - (a' - a_1)y - (a'b_1 - a_1b')z + \alpha'(b' - b_1) - \beta'(a' - a_1) = 0,$$
$$(b'' - b_1)x - (a'' - a_1)y - (a''b_1 - a_1b'')z + \alpha''(b'' - b_1) - \beta''(a'' - a_1) = 0.$$

Bezeichnen wir den Neigungswinkel dieser Ebenen mit δ, so ist

$$\cos\delta = \frac{X'X'' + Y'Y'' + Z'Z''}{\sqrt{(X'^2 + Y'^2 + Z'^2)(X''^2 + Y''^2 + Z''^2)}}.$$

Der Winkel δ wird also 90°, wenn $X'X'' + Y'Y'' + Z'Z'' = 0$ ist; d. h.

$$23)\quad \begin{cases} (b' - b_1)(b'' - b_1) + (a' - a_1)(a'' - a_1) \\ \qquad + (a' b_1 - a_1 b')(a'' b_1 - a_1 b'') = 0. \end{cases}$$

Das dritte Glied lässt sich transformiren in

$$(a' - a_1)(a'' - a_1) b_1^2 + (b' - b_1)(b'' - b_1) a_1^2 - a_1 b_1 (b' - b_1)(a'' - a_1) \\ - a_1 b_1 (a' - a_1)(b'' - b_1).$$

Es ist nun gemäss 17):

$$(a'' - a_1) A + (b'' - b_1) B + M\mu = 0.$$
$$(a' - a_1) A + (b' - b_1) B + M\mu = 0,$$

Durch Einführung dieser Relationen in die vorhergehende Gleichung geht 23) über in

$$24)\quad \begin{cases} (a' - a_1)(a'' - a_1)\left(1 + b_1^2 + 2 a_1 b_1 \frac{A}{B}\right) + (b' - b_1)(b'' - b_1)(1 + a_1^2) \\ \qquad + a_1 b_1 \frac{M\mu}{B}(a' - a_1 + a'' - a_1) = 0. \end{cases}$$

Nach 18) und 21) ist weiter

$$(a' - a_1)(a'' - a_1) = \frac{MN\mu\nu}{AC + BD},$$

$$(b' - b_1)(b'' - b_1) = \frac{MT\mu\tau}{AC + BD},$$

$$a' - a_1 + a'' - a_1 = -\frac{CM\mu + AN\nu + BP\pi}{AC + BD}.$$

Substituirt man diese Werthe in 24), so wird daraus nach Multiplication mit B:

$$(1 + a_1^2)\frac{BMT\mu\tau}{AC + BD} + (1 + b_1^2)\frac{BMN\mu\nu}{AC + BD} \\ - a_1 b_1 \frac{(CM\mu - AN\nu + BP\pi) M\mu}{AC + BD} = 0.$$

Ist der Hauptstrahl zugleich Axe des z, so wird a_1 und b_1 Null und die Bedingungsgleichung des Senkrechtstehens der Focalebenen

$$25)\qquad T\tau + N\nu = 0.$$

Unsere Untersuchungen haben uns also zu dem Resultate geführt, dass die beiden Brennlinien unendlich dünner Strahlenbündel durch vier Strahlen bestimmt sind, dass sie ferner mit dem Hauptstrahle und mit einander sehr verschiedene Winkel bilden können, sowie endlich dass sie in Ebenen liegen, welche sehr verschiedene Neigungswinkel mit einander bilden. In dem oben berechneten concreten Falle ist $\delta = 2^\circ 55' 20''$.

Wenn neue Strahlen hinzutreten, welche zu denselben Brennlinien gehören, so haben sie gewisse Bedingungen zu erfüllen. Es müssen die Variationen $\chi_n, \vartheta_n, \omega_n, \psi_n$ offenbar so gewählt werden, dass das System 14) bestehen bleibt. Durch die neuen Variationen muss also folgenden Gleichungen Genüge geschehen:

$$(a-a_1)\psi_1+(b-b_1)\omega_1+(\alpha-\alpha_1)\vartheta_1+(\beta-\beta_1)\chi_1+(\psi_1\chi_1-\vartheta_1\omega_1)=0,$$
$$(a-a_1)\psi_2+(b-b_1)\omega_2+(\alpha-\alpha_1)\vartheta_2+(\beta-\beta_1)\chi_2+(\psi_2\chi_2-\vartheta_2\omega_2)=0,$$
$$(a-a_1)\psi_3+(b-b_1)\omega_3+(\alpha-\alpha_1)\vartheta_3+(\beta-\beta_1)\chi_3+(\psi_3\chi_3-\vartheta_3\omega_3)=0,$$
$$(a-a_1)\psi_n+(b-b_1)\omega_n+(\alpha-\alpha_1)\vartheta_n+(\beta-\beta_1)\chi_n+(\psi_n\chi_n-\vartheta_n\omega_n)=0.$$

Diese Gleichungen bestehen nur dann zusammen, wenn

$$\begin{vmatrix} \chi_n & \vartheta_n & \omega_n & \psi_n \\ \chi_1 & \vartheta_1 & \omega_1 & \psi_1 \\ \chi_2 & \vartheta_2 & \omega_2 & \psi_2 \\ \chi_3 & \vartheta_3 & \omega_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0,$$

d. h.

$$26)\qquad D\chi_n+C\vartheta_n+A\omega_n+B\psi_n=0,$$

und zugleich

$$\begin{vmatrix} (\psi_n\chi_n-\vartheta_n\omega_n) & \vartheta_n & \chi_n & \psi_n \\ (\psi_1\chi_1-\vartheta_1\omega_1) & \vartheta_1 & \chi_1 & \psi_1 \\ (\psi_2\chi_2-\vartheta_2\omega_2) & \vartheta_2 & \chi_2 & \psi_2 \\ (\psi_3\chi_3-\vartheta_3\omega_3) & \vartheta_3 & \chi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0,$$

d. h.

$$27)\qquad A(\psi_n\chi_n-\vartheta_n\omega_n)+L\lambda\vartheta_n+T\tau\chi_n-M\mu\psi_n=0.$$

Durch willkürliche Annahmen von χ_n und ϑ_n erhält man aus 26) und 27) zwei lineare Gleichungen in ω_n und ψ_n, woraus diese berechnet werden können. Wenn indessen die Constanten der Brennlinien bereits bekannt sind, wird man sich mit Vortheil der beiden Gleichungen

$$28)\quad \begin{cases} (a'-a_1+\chi_n)\psi_n+(b'-b_1-\vartheta_n)\omega_n+(\alpha'-\alpha_1)\vartheta_n+(\beta'-\beta_1)\chi_n=0, \\ (a''-a_1+\chi_n)\psi_n+(b''-b_1-\vartheta_n)\omega_n+(\alpha''-\alpha_1)\vartheta_n+(\beta''-\beta_1)\chi_n=0 \end{cases}$$

bedienen. Die Rechnung ist selbstverständlich bis auf sehr kleine Grössen zweiter Ordnung inclusive genau auszuführen. Die Relationen gelten sämmtlich auch für endlich dicke Strahlenbündel, welche copulirt sind. Es treten aber Abkürzungen der linearen Gleichungen selbst dann nicht ein, wenn die Variationen unendlich klein, also die Absolutglieder unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung werden. Die Brennlinien können auch imaginär sein, nämlich dann, wenn die quadratische Finalgleichung zwei complexe Wurzeln hat. Umgekehrt lassen sich zu imaginären Brennlinien immer reelle Strahlen finden. Es seien die Constanten der beiden Brennlinien

$$a=m_1\pm n_1\sqrt{-1},\quad \beta=m_2\pm n_2\sqrt{-1},$$
$$b=m_3\pm n_3\sqrt{-1};\quad \alpha=m_4\pm n_4\sqrt{-1}.$$

Ist ein Strahl $a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1$ gegeben, dann geschieht die Bestimmung eines neuen Strahles aus

$$(m_1 \pm n_1\sqrt{-1} - a_n)\psi_n + (m_3 \pm n_3\sqrt{-1} - b_n)\omega_n + (m_4 \pm n_4\sqrt{-1} - \alpha_1)\vartheta_n + (m_2 \pm n_2\sqrt{-1} - \beta_1)\chi_n = 0;$$

d. h. vermittelst der beiden reellen linearen Gleichungen

$$29)\quad \begin{cases} (m_1 - a_n)\psi_n + (m_3 - b_n)\omega_n + (m_4 - \alpha_1)\vartheta_n + (m_2 - \beta_1)\chi_n = 0, \\ n_1\psi_n + n_3\omega_n + n_4\vartheta_n + n_2\chi_n = 0. \end{cases}$$

Durch willkürliche Annahmen von ϑ_n und χ_n werden hieraus ψ_n und ω_n gefunden. Sind aber nur die Constanten der Brennlinien bekannt, so lässt sich ein reeller Strahl so finden; es ist

$$(m_1 \pm n_1\sqrt{-1} - a_1)(m_2 \pm n_2\sqrt{-1} - \beta_1) - (m_3 \pm n_3\sqrt{-1} - b_1)(m_4 \pm n_4\sqrt{-1} - \alpha_1) = 0.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$(m_1 m_2 - n_1 n_2) + (m_1 n_2 + m_2 n_1)\sqrt{-1} = A_1 + B_1\sqrt{-1},$$
$$(m_3 m_4 - n_3 n_4) + (m_3 n_4 + m_4 n_3)\sqrt{-1} = A_2 + B_2\sqrt{-1},$$

so wird sein

$$30)\quad \begin{cases} a_1\beta_1 - m_1\beta_1 - m_2 a_1 + A_1 - A_2 - \alpha_1 b_1 + m_3\alpha_1 + m_4 b_1 = 0, \\ n_1\beta_1 + n_2 a_1 - B_1 + B_2 - n_3\alpha_1 - n_4 b_1 = 0. \end{cases}$$

Durch Elimination von β_1 erhält man die quadratische Gleichung

$$31)\quad a_1^2 + f(\alpha_1 b_1)a_1 + F(\alpha_1 b_1) = 0.$$

Es lassen sich α_1 und b_1 reell so wählen, dass a_1 reell wird; dann ist auch β_1 reell. Wir wollen nun noch die Formeln 13) bis 25) anwenden auf ein unendlich dünnes reguläres Strahlenbündel. Die Hauptnormale PQ (s. lithogr. Tafel Fig. 13) sei z-Axe, zwei andere unendlich nahe Normalen cc_1 und hh_1 in den beiden Hauptschnitten Pc und Ph, eine vierte Normale aa_1 in den Hauptschnitten ca und ha. Wir betrachten dabei den Hauptschnitt Ph als $-x$-Axe, Pc als $-y$-Axe und PQ als $-z$-Axe. Der Krümmungsradius von $Ph = -ds$ sei $-\varrho$, der von $ca = -ds$ sei $-(\varrho + d\varrho)$, der von $Pc = -d\sigma$ gleich $-r$ und der von $ha = -d\sigma$ gleich $-(r + dr)$. Für die vier Normalen gelten dann folgende Gleichungen:

$$x_1 + 0 \,.\, z_1 + 0 = 0, \qquad x_2 + \frac{ds}{\varrho}z_2 + ds = 0,$$
$$y_1 + 0 \,.\, z_1 + 0 = 0; \qquad y_2 + 0 \,.\, z_2 + 0 = 0;$$
$$x_3 + 0 \,.\, z_3 + 0 = 0, \qquad x_4 + \frac{ds}{\varrho + d\varrho}z_4 + ds = 0,$$
$$y_3 + \frac{d\sigma}{r}z_3 + d\sigma = 0; \qquad y_4 + \frac{d\sigma}{r + dr}z_4 + d\sigma = 0.$$

Die Gleichungen der Brennlinien seien

$$x + az + \alpha = 0,$$
$$y + bz + \beta = 0.$$

Gemäss 13) ist nun

$$a_1 = 0, \quad b_1 = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 0,$$
$$\chi_1 = -\frac{ds}{\varrho}, \quad \vartheta_1 = 0, \quad \omega_1 = ds, \quad \psi_1 = 0,$$
$$\chi_2 = 0, \quad \vartheta_2 = \frac{d\sigma}{r}, \quad \omega_2 = 0, \quad \psi_2 = -d\sigma,$$
$$\chi_3 = -\frac{ds}{\varrho + d\varrho}; \quad \vartheta_3 = \frac{d\sigma}{r + dr}; \quad \omega_3 = ds; \quad \psi_3 = -d\sigma.$$

Aus 14) folgt weiter

$$a\beta - \alpha b = 0,$$
$$b ds - \frac{\beta}{\varrho} ds = 0, \qquad \text{oder } \beta = b\varrho,$$
$$-a d\sigma + \frac{\alpha}{r} d\sigma = 0; \quad \text{oder } \alpha = ar;$$
$$-a d\sigma + b ds + \alpha \frac{d\sigma}{r + dr} - \beta \frac{ds}{\varrho + d\varrho} + \frac{d\sigma ds}{\varrho + d\varrho} - \frac{d\sigma ds}{r + dr} = 0.$$

Hieraus resultiren folgende Werthe:

$$A = \frac{ds d\sigma^2}{\varrho r} - \frac{ds d\sigma^2}{\varrho (r + dr)} = \frac{dr ds d\sigma^2}{\varrho r^2},$$
$$B = \frac{ds^2 d\sigma}{r(\varrho + d\varrho)} - \frac{ds^2 d\sigma}{r\varrho} = -\frac{d\varrho ds^2 d\sigma}{\varrho^2 r},$$
$$C = \frac{ds^2 d\sigma}{\varrho} - \frac{ds^2 d\sigma}{\varrho + d\varrho} = \frac{d\varrho ds^2 d\sigma}{\varrho^2},$$
$$D = \frac{ds d\sigma^2}{r} - \frac{ds d\sigma^2}{r + dr} = \frac{dr ds d\sigma^2}{r^2},$$
$$M\mu = -\frac{ds^2 d\sigma^2}{r^2 \varrho^2}(r - \varrho), \qquad N\nu = 0, \qquad P\pi = -\frac{ds^2 d\sigma^2}{r^2 \varrho}(r - \varrho),$$
$$L\lambda = \frac{ds^2 d\sigma^2}{\varrho^2 r}(r - \varrho), \qquad T\tau = 0.$$

In den quadratischen Finalgleichungen nach a und b werden also die Coefficienten der beiden ersten Glieder von gleicher Ordnung der Kleinheit, die Absolutglieder verschwinden. Nach Division durch

$$\frac{d\varrho ds^3 d\sigma^3}{r^2 \varrho^2} \text{ resp. } \frac{dr ds^3 d\sigma^3}{r^2 \varrho^2}$$

resultiren die Gleichungen der Constanten der Brennlinien

$$a^2\left(\frac{dr}{\varrho}-\frac{dr}{r}\right)+a\left(\frac{ds}{r\varrho}-\frac{ds}{\varrho^2}\right)(r-\varrho)+0=0,$$
$$b^2\left(\frac{d\varrho}{\varrho}-\frac{d\varrho}{r}\right)+b\left(\frac{d\sigma}{r\varrho}-\frac{d\sigma}{r^2}\right)(r-\varrho)+0=0.$$

Aus der ersten ergiebt sich:

$$a'=tan\,\omega=\frac{(r-\varrho)}{\varrho}\frac{ds}{dr},\qquad a''=0;$$

wegen der Relationen $\alpha'=a'r$, $b'\varrho=\beta'$ und $a'\beta'-\alpha'b'=0$:

$$\alpha'=r\,tan\,\omega=\frac{r(r-\varrho)}{\varrho}\frac{ds}{dr},\qquad b'=0,\ \beta'=0.$$

Aus der zweiten:

$$b''=tan\,\omega_1=\frac{(\varrho-r)}{r}\frac{d\sigma}{d\varrho},\qquad b'=0,$$
$$\beta''=\varrho\,tan\,\omega_1=\frac{\varrho(\varrho-r)}{r}\frac{d\sigma}{d\varrho},\quad a''=0,\quad \alpha''=0.$$

Dieselben Werthe fanden wir in 1) und 2). Zur Bestimmung des Winkels ε ist:

$$cos\,\varepsilon=cos\,\omega\,.\,cos\,\omega_1=\frac{\varrho r}{\sqrt{\varrho^2+(r-\varrho)^2\frac{ds^2}{dr^2}}\sqrt{r^2+(\varrho-r)^2\frac{d\sigma^2}{d\varrho^2}}}.$$

Der Kreuzungswinkel ε der Brennlinien ist also nur dann ein rechter, wenn entweder ω oder ω_1 ein rechter ist. Die Gleichung 22) wird also im vorliegenden Falle nicht erfüllt, weil $N\nu+T\tau=0$ ist, nicht aber $AB+CD$. Erfüllt wird sie nur, wenn dr oder $d\varrho$ verschwindet. Ist z. B. $dr=0$, so wird $A=0$, $D=0$, ferner

$$a'=\infty,\quad \alpha'=\infty,\quad b'=0,\quad \beta'=0,$$
$$b''=tan\,\omega_1,\quad \beta''=\varrho\,tan\,\omega_1,\quad a''=0,\quad \alpha''=0.$$

Dieser Fall findet statt bei Rotationsflächen, bei einmaliger sphärischer Brechung und bei mehrmaliger Brechung in centrirten Systemen oder in Systemen sphärischer Flächen, deren Centra in einer Ebene mit dem leuchtenden Punkte liegen; der vorhergehende bei mehrmaliger Brechung in Systemen, welche nicht in einer Ebene centrirt sind.

Die Gleichung 23) kann dazu benutzt werden, zu zwei Brennlinien, welche ihrer Lage nach bekannt sind, ein reguläres Strahlenbündel zu construiren. Man bestimme erst die Constanten a_1 und b_1 des Hauptstrahles nach 23), α_1 und β_1 nach 15); neue Strahlen können dann nach 28) gefunden werden. Wählt man den Hauptstrahl als z-Axe und die neuen Strahlen in den Focalebenen, so wird die Länge der Brennlinien durch 3) und 4) bestimmt sein. Es lässt sich dann leicht ein beliebiger

Strahl des zugehörigen Bündels construiren, z. B. zum Punkte M (
Tafel Fig. 13) in der Basis *Phac*. Die Coordinaten von M seien
$MN = dy$; die Abschnitte auf den Brennlinien $\varepsilon_1 M_1 = d\eta$, $\varepsilon M_2 =$

$$d\xi = \frac{(r-\varrho)\,dx}{\varrho \sin\omega}, \quad d\eta = \frac{(r-\varrho)\,dy}{r\sin\omega},$$

folglich

$$d\xi : dx = da : ds,$$
$$d\eta : dy = da_1 : d\sigma.$$

Ist $dx = \frac{1}{2}ds$, $dy = \frac{1}{2}d\sigma$, wie es dem Punkte P_1 entsp
liegen die zugehörigen Punkte F_1 und F_2 in der Mitte der Br
es sind die Brennpunkte des Strahlenbündels.

Bezeichnet man die Coordinaten eines entsprechenden Punktes
beliebigen zum Hauptstrahle PQ senkrechten Querschnitte mit ds_1
den Abstand von der xy-Ebene mit l, so ist unter der Vora
dass $l - \varrho$ und $l - r$ endliche von da und da_1 verschiedene Grösse

$$ds_1 : da\sin\omega = (l - \varrho) : (r - \varrho),$$
$$d\sigma_1 : da_1 \sin\omega_1 = (l - r) : (r - \varrho).$$

Es ist folglich

$$ds_1 : ds = (l - \varrho) : \varrho,$$
$$d\sigma_1 : d\sigma = (l - r) : r.$$

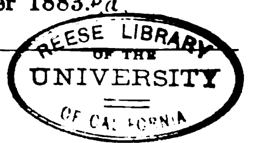
Betrachtet man dann P als das Centrum einer Leitcurve, im S
eines Kreises vom Radius Pa, so ist

$$Pa^2 = ds^2 + d\sigma^2 = \frac{\varrho^2}{(l-\varrho)^2}\,ds_1{}^2 + \frac{r^2}{(l-r)^2}\,d\sigma_1{}^2,$$

d. h. es ist jeder andere Querschnitt des Strahlenbündels eine
deren Axenverhältniss sich in grossen Abständen dem Grenzwert
nähert. Zwischen den Brennlinien wird der Querschnitt ein zwei
ein Kreis (Kreis der kleinsten Verwirrung). Der Abstand der Kr
einander ist $l = \frac{2r\varrho}{r+\varrho}$ und der Radius des Zweiten gleich $\frac{r-\varrho}{r+\varrho}\,P$
Maximalquerschnitt liegt in der Mitte der Brennstrecke, also bei $l = \frac{1}{2}$
Sind r und ϱ wenig von einander verschieden, so coincidiren diese
schnitte. In unendlicher Nähe der Brennlinien werden die Quer
Curven vierter Ordnung, wenn ω und ω_1 von 90^0 verschiedene
sind.* Sonst degeneriren die Ellipsen an diesen Stellen in zwei
von den Breiten $ds_1 = 0$ und $d\sigma_1 = 0$, von den Längen da und d

* Matthiessen, Sitzungsber. der math.-phys. Classe der k. Bayer. Ak
Wiss., 1883, Heft I, S. 49.

Rostock, 12. November 1883.



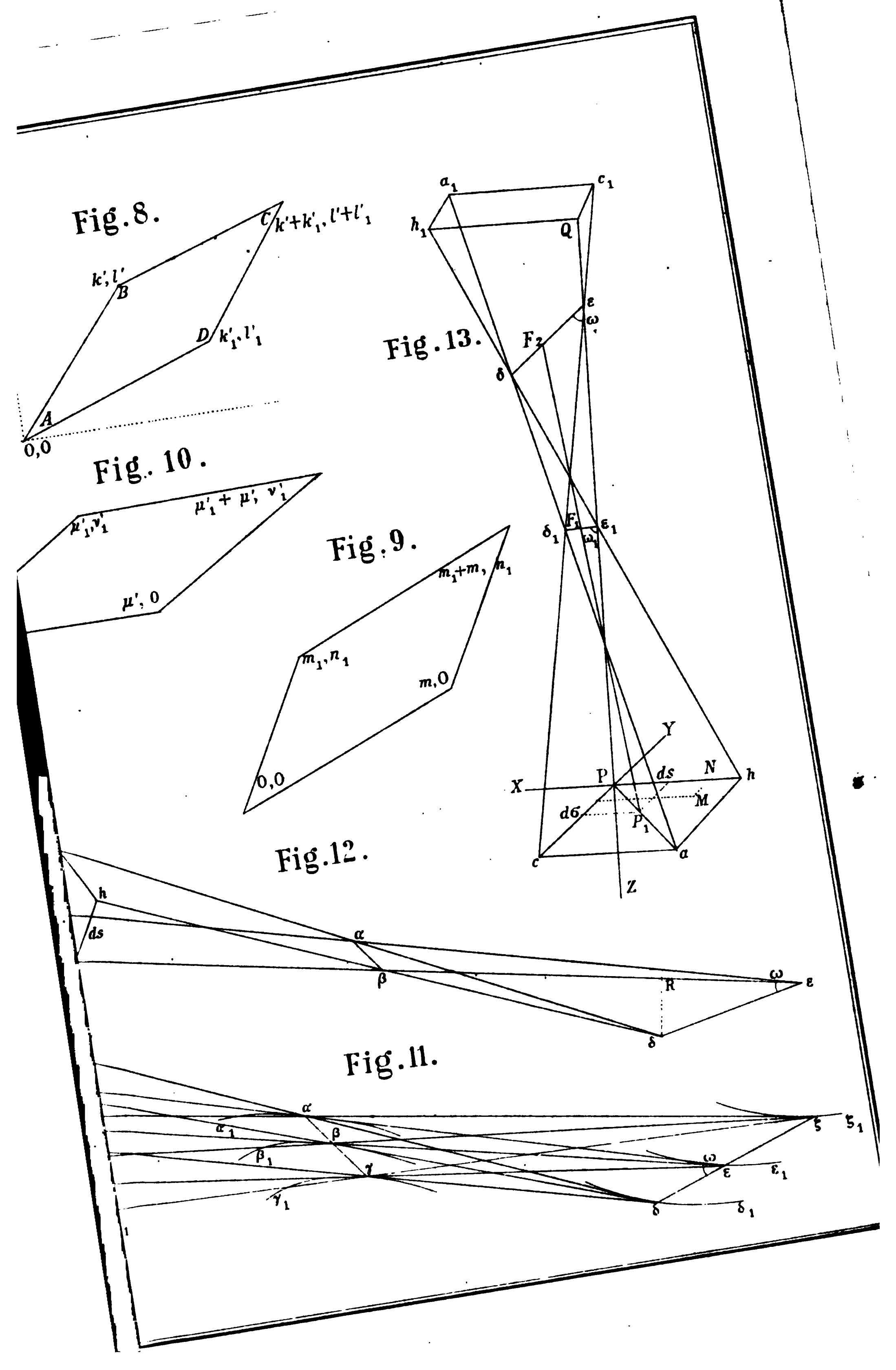
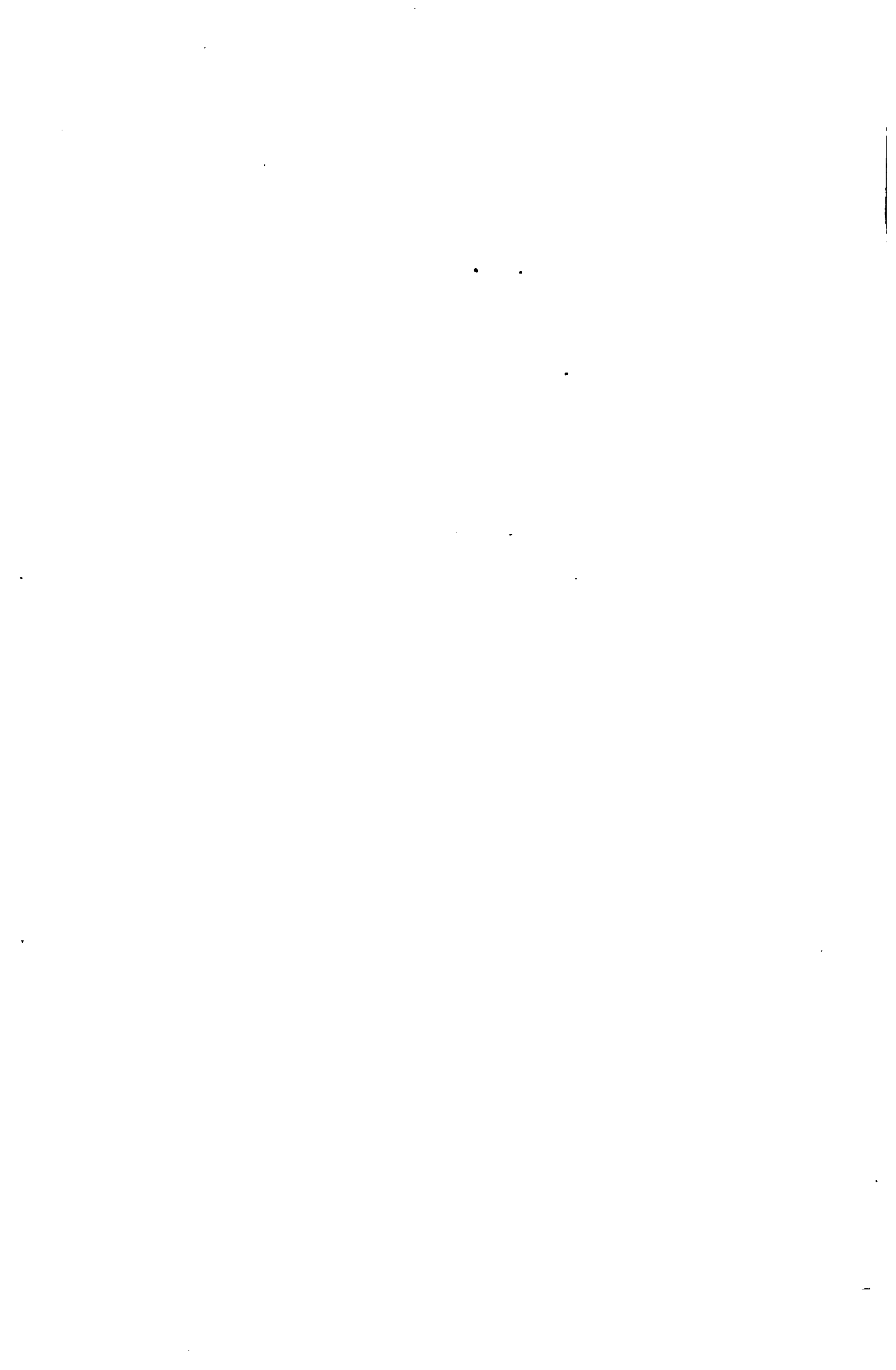
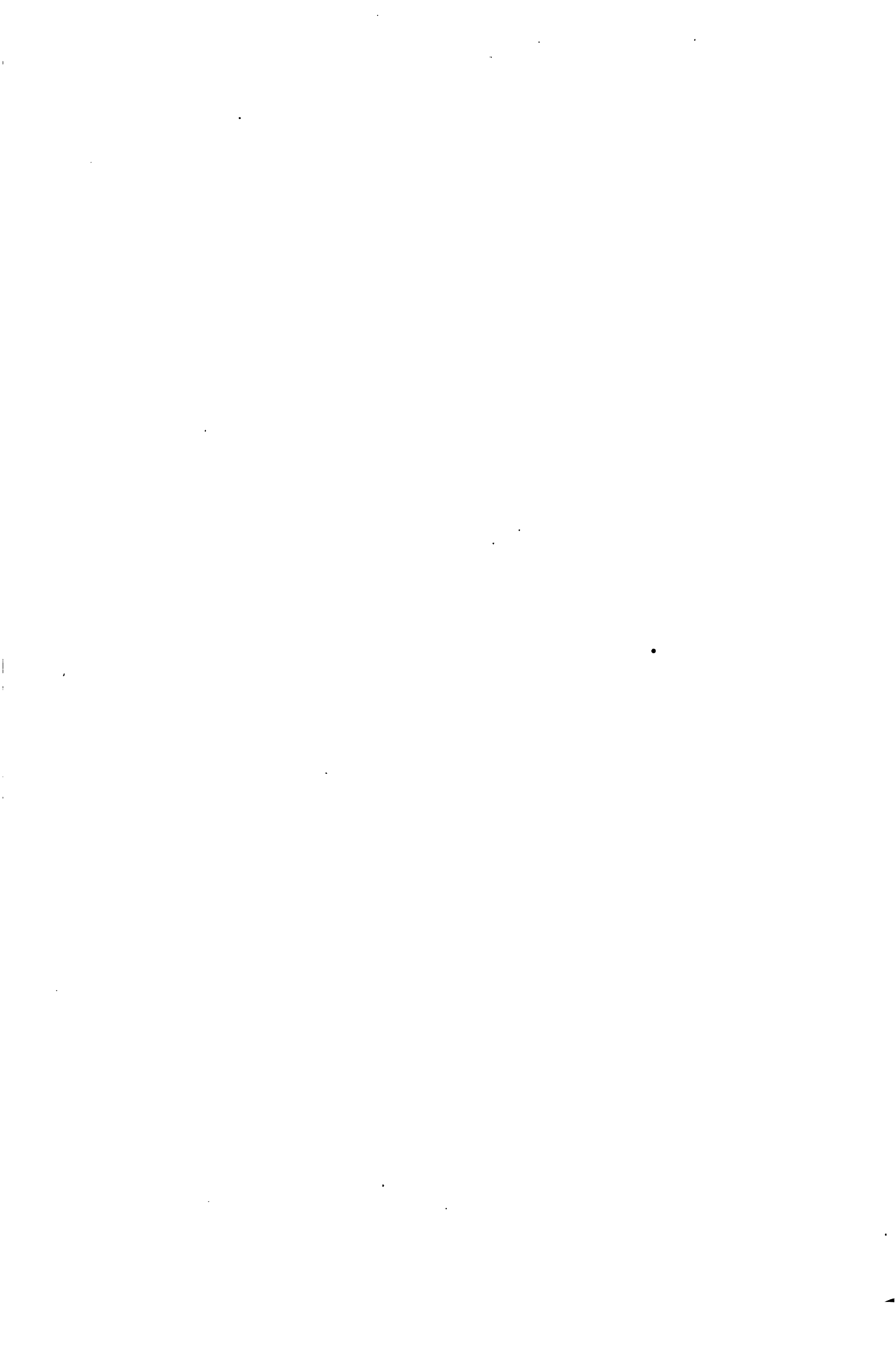


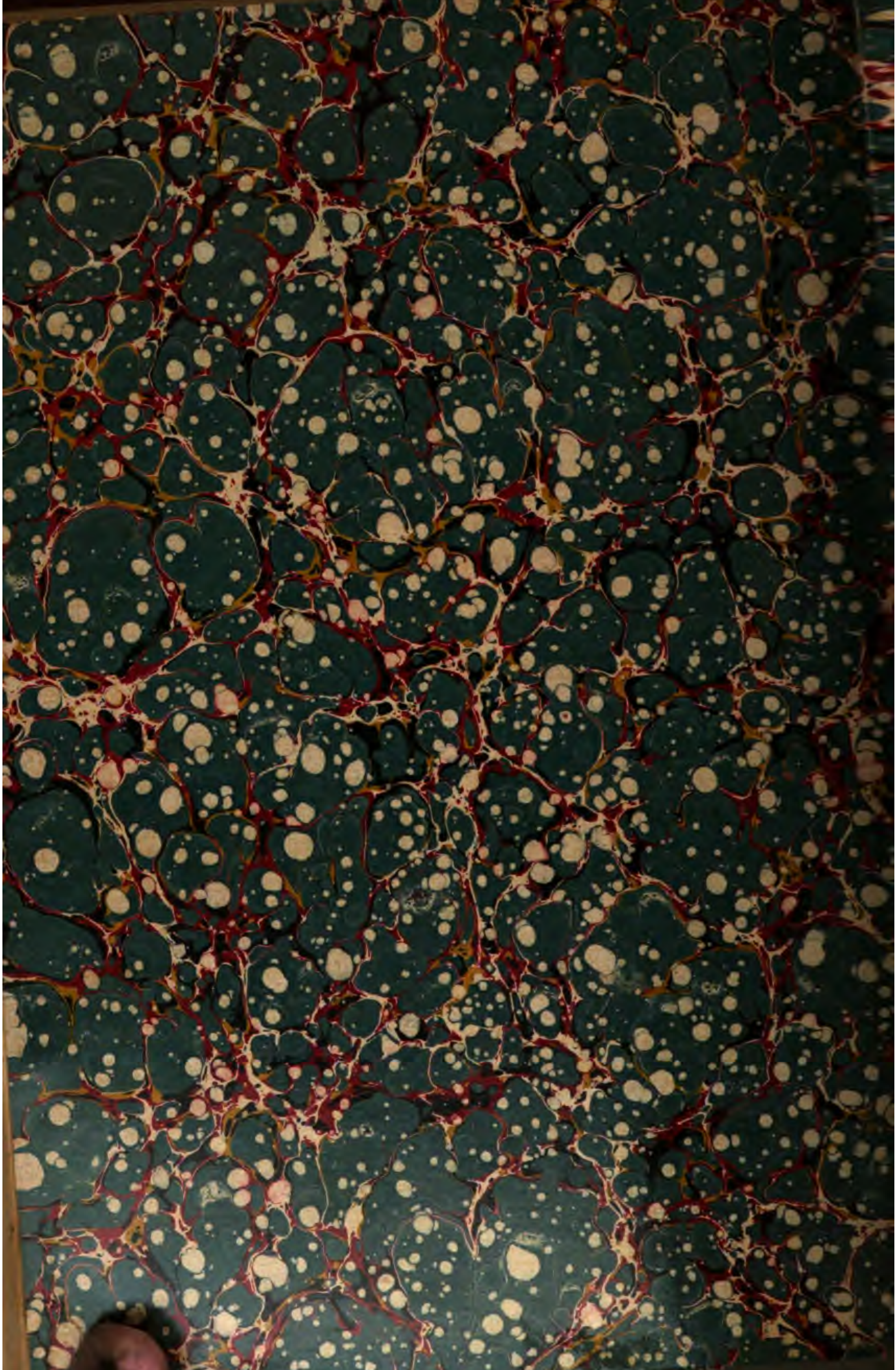
Fig.8.
$k'+k'_1, l'+l'_1$
C
k', l'
B
D
k'_1, l'_1
A
0,0
Fig. 10.
μ'_1, ν'_1
$\mu'_1 + \mu', \nu'_1$
$\mu', 0$
Fig. 9.
m_1+m, n_1
m_1, n_1
m,0
0,0
Fig. 13.
a_1
c_1
h_1
Q
ε
ω
F_2
δ
δ_1
F_1
ε_1
ω_1
Y
X
P
ds
N
h
M
dσ
P_1
c
a
Z
Fig.12.
h
ds
α
β
ω
ε
R
δ
Fig.11.
α
α_1
β
β_1
γ
γ_1
ζ
ζ_1
ω
ε
ε_1
δ
δ_1

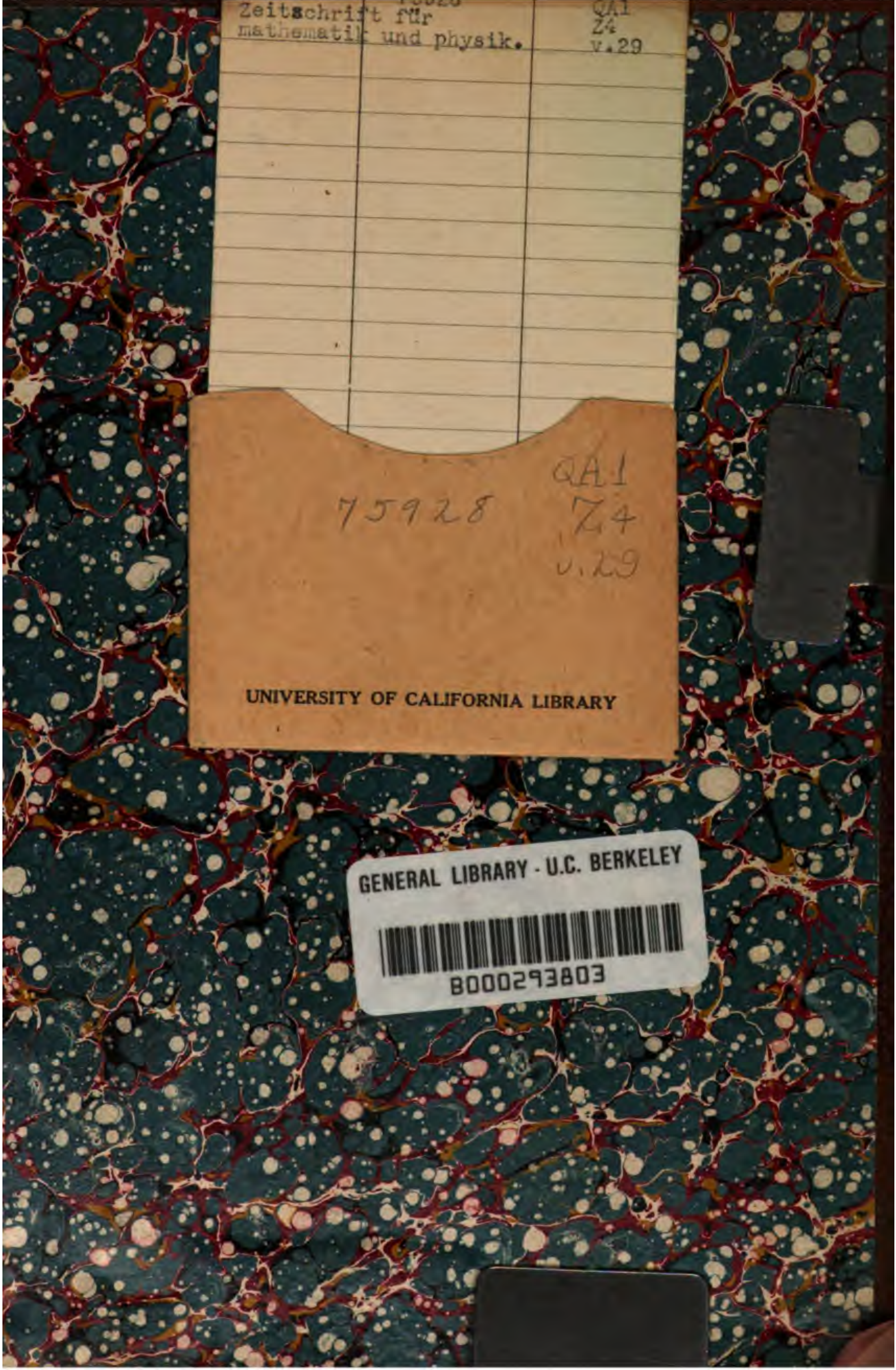











Zeitschrift für
mathematik und physik.
QA1
Z4
v.29
75928
QA1
Z4
v.29
UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY
GENERAL LIBRARY - U.C. BERKELEY
B000293803